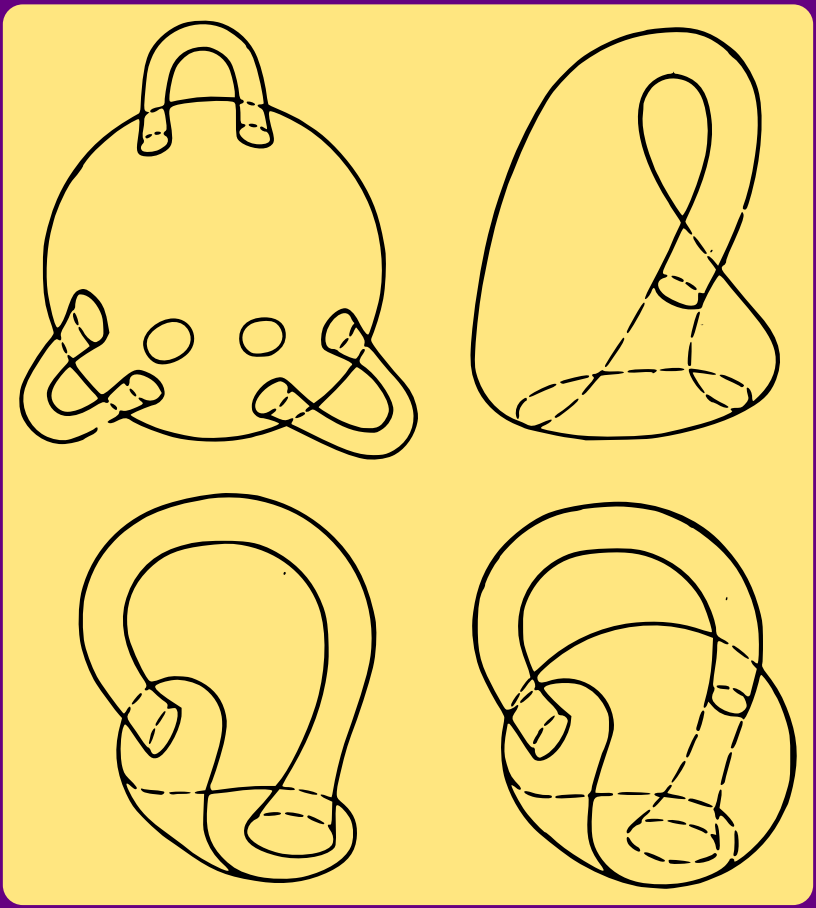
V. Rohlin, D. Fuchs

PREMIER COURS DE TOPOLOGIE



Éditions Mir Moscou

В. А. РОХЛИН, Д. Б. ФУКС

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС ТОПОЛОГИИ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГЛАВЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. ROHLIN, D. FUCHS

PREMIER COURS DE TOPOLOGIE

CHAPITRES GÉOMÉTRIQUES

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe par
A. SOSSINSKI

На французском языке

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» 1977

© Traduction française Editions Mir 1981

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 9

Introduction. TERMINOLOGIE ET NOTATIONS NON USUELLES DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES EMPLOYÉES DANS CET OUVRAGE 11

Chapitre premier. ESPACES TOPOLOGIQUES 14

§ 1. Notions fondamentales 14
1. Topologie (14). 2. Distance (17). 3. Sous-espaces (18). 4. Applications continues (20). 5. Axiomes de séparation (23). 6. Axiomes de dénombrabilité (27). 7. Compacité (29).

§ 2. Constructions 33
1. Sommes (33). 2. Produits (34). 3. Espaces quotients (37). 4. Recollements (40). 5. Espaces projectifs (44). 6. Constructions plus spéciales (47). 7. Espaces d'applications continues (50). 8. Le cas des espaces pointés (54). 9. Exercices (60).

§ 3. Homotopies 61
1. Définitions générales (61). 2. Chemins (65). 3. Connexité et k-connexité (65). 4. Propriétés locales (69). 5. Couples de Borsuk (70). 6. Espaces SCNR (73). 7. Propriétés homotopiques des constructions topologiques (75). 8. Exercices (81).

Chapitre 2. ESPACES CELLULAIRES 82

§ 1. Espaces cellulaires et leurs propriétés topologiques 82
1. Notions fondamentales (82). 2. Espaces cellulaires comme recollements de boules (87). 3. Partitions cellulaires canoniques de la sphère, de la boule et des espaces projectifs (88). 4. Autres propriétés topologiques des espaces cellulaires (89). 5. Constructions cellulaires (93). 6. Exercices (97).

§ 2. Espaces simpliciaux 98
1. Simplexes euclidiens (98). 2. Espaces simpliciaux et applications simpliciales (100). 3. Schémas simpliciaux (104). 4. Polyèdres (105). 5. Constructions simpliciales (106). 6. Etoiles.

Links. Voisinages réguliers (112). 7. Approximation simpliciale d'une application continue (116). 8. Exercices (117).

§ 3. Propriétés d'homotopie des espaces cellulaires 118
1. Couples cellulaires (118). 2. Approximation cellulaire d'une application continue (120). 3. Couples cellulaires k-connexes (123). 4. Approximation simpliciale des espaces cellulaires (127). 5. Exercices (129).

Chapitre 3. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES 130

§ 1. Notions fondamentales 130
1. Variétés topologiques (130). 2. Structures différentielles (137). 3. Orientations (147). 4. Variété des vecteurs tangents (152). 5. Plongements, immersions et submersions (157). 6. Structures complexes (161). 7. Exercices (166).

§ 2. Variétés de Stiefel et de Grassmann 166
1. Variétés de Stiefel (166). 2. Variétés de Grassmann (172). 3. Quelques variétés de Stiefel et de Grassmann de petites dimensions (180). 4. Exercices (181).

§ 3. Digression: trois théorèmes d'analyse 182
1. Approximation des fonctions par des polynômes (182). 2. Valeurs spéciales (186). 3. Points critiques non dégénérés (189).

§ 4. Plongements. Immersions. Lissages. Approximations . . . 192
1. Espaces d'applications différentiables (192). 2. Théorèmes élémentaires de plongement (195). 3. Transversalisations et tubes (197). 4. Lissage des applications dans le cas fermé (199). 5. Recollement différentiable de variétés (202). 6. Lissage des applications de variétés à bord (208). 7. Mise des applications en position générale (212). 8. Applications transversales à une sous-variété (218). 9. Augmentation de la classe de différentiabilité d'une variété (220). 10. Approximation des applications par des plongements et des immersions (226). 11. Exercices (299).

§ 5. Théorèmes structuraux élémentaires 231
1. Fonctions de Morse (231). 2. Cobordismes et chirurgie (235). 3. Variétés de dimension deux (246). 4. Exercices (253).

Chapitre 4. LES FIBRÉS 255

§ 1. Fibrés sans structure de groupe 255
1. Définitions générales (255). 2. Fibrés localement triviaux (257). 3. Fibrés de Serre (259). 4. Fibrés d'espaces d'applications (262). 5. Exercices (265).

§ 2. Digression: groupes topologiques et groupes de transformations 266
1. Groupes topologiques (266). 2. Groupes d'homéomorphismes (271). 3. Action de groupe (274). 4. Exercices (286).

§ 3. Fibrés à structure de groupe 286
1. Espaces à F-structure (286). 2. Fibrés de Steenrod (288). 3. Fibrés associés (293). 4. Fibrés d'Ehresmann-Feldbau (297). 5. Exercices (299).

§ 4. Classification des fibrés de Steenrod 300
1. Fibrés de Steenrod et homotopie (300). 2. Fibrés universels (304). 3. Fibrés de Milnor (307). 4. Réduction du groupe structural (310). 5. Exercices (311).

§ 5. Fibrés vectoriels 311
1. Définitions générales (311). 2. Constructions (318). 3. Fibrés vectoriels universels classiques (323). 4. Principales réductions du groupe structural (330). 5. Exercices (332).

§ 6. Fibrés différentiables 333
1. Notions fondamentales (333). 2. Lissages et approximations (336). 3. Fibrés vectoriels différentiables (340). 4. Fibrés normaux et tangents (345). 5. Degrés (350). 6. Exercices (356).

Chapitre 5. GROUPES D'HOMOTOPIE 358

§ 1. Théorie générale 358
1. Groupes d'homotopie absolus (358). 2. Digression: assemblages (362). 3. Assemblages de groupes d'homotopie d'un espace topologique (364). 4. Groupes d'homotopie relatifs (368). 5. Digression: suites de groupes et d'homomorphismes et π-suites (373). 6. Suite d'homotopie d'un couple (380). 7. Assemblages de groupes d'homotopie des fibres d'un fibré de Serre (385). 8. Suite d'homotopie d'un fibré de Serre (388). 9. Influence d'autres structures (394). 10. Autres descriptions des groupes d'homotopie (400). 11. Théorèmes d'addition (404). 12. Exercices (406).

§ 2. Groupes d'homotopie des sphères et des variétés classiques 407
1. Suspension dans les groupes d'homotopie des sphères (407). 2. Groupes d'homotopie des sphères dans les cas les plus simples (412). 3. Composition (416). 4. Information: groupes d'homotopie des sphères (419). 5. Groupes d'homotopie des espaces projectifs et des lentilles (420). 6. Groupes d'homotopie des groupes classiques (422). 7. Groupes d'homotopie des variétés et des espaces de Stiefel (424). 8. Groupes d'homotopie des variétés et des espaces de Grassmann (425). 9. Exercices (426).

§ 3. Groupes d'homotopie des espaces cellulaires 427
1. Groupes d'homotopie d'un espace cellulaire unidimensionnel (427). 2. L'effet du recollement de boules (428). 3. Groupe fondamental d'un espace cellulaire (430). 4. Groupes d'homotopie des surfaces compactes (433). 5. Groupes d'homotopie des bouquets (435). 6. Groupes d'homotopie d'un couple cellulaire k-connexe (437). 7. Espace à groupes d'homotopie donnés (441). 8. Huit exemples édifiants (442). 9. Exercices (444).

§ 4. Equivalence d'homotopie faible 445
1. Notions fondamentales (445). 2. Autres constructions (450). 3. Approximation cellulaire d'un espace topologique (454). 4. Exercices (459).

§ 5. Multiplication de Whitehead 460
1. La classe wd (m, n) (460). 2. Définition et principales propriétés du produit de Whitehead (463). 3. Applications (465). 4. Exercices (467).

§ 6. Suite de la théorie des fibrés 467
1. Equivalence d'homotopie faible et fibré de Steenrod (467). 2. Théorie des revêtements (470). 3. Orientations (479). 4. Quelques fibrés au-dessus des sphères (480). 5. Exercices (482).

Bibliographie 484

Index alphabétique des matières 485

Liste des notations 491

AVANT-PROPOS

Ce livre est issu d'un grand cours professé par les auteurs aux universités de Léningrad et de Moscou. Le cours exposait les fondements des principales branches de la topologie : les théories de l'homologie, de l'homotopie, des espaces fibrés et la topologie des variétés. Le contenu de ce cours est assez précisément délimité par l'expression « topologie élémentaire » ; elle signifie surtout que l'outil utilisé n'est pas trop compliqué. Le livre est composé des chapitres du cours où l'algèbre joue un rôle subalterne. Les parties plus « algébriques » de notre cours feront l'objet d'un autre volume.

La transformation d'un cours oral en un cours écrit a ses avantages et ses inconvénients : l'exposé gagne en précision et perd en suggestion. Ainsi, les descriptions géométriques ont été forcément remplacées par des formules que le lecteur aura à déchiffrer, etc. Néanmoins, il nous semble que le livre a conservé les qualités principales de notre cours : son caractère élémentaire, systématique et didactique. Pour une bonne assimilation du livre, le lecteur doit être initié aux notions usuelles de Théorie des ensembles, d'Algèbre et d'Analyse qui sont enseignées généralement dans la première ou les deux premières années de l'Université. L'exposé est accompagné d'exemples et d'exercices. Nous espérons que le livre pourra servir de manuel de topologie.

Le livre diffère de la partie correspondante de notre cours oral essentiellement par la disposition des matières, étant en ce sens beaucoup plus systématique. A nos yeux, un exposé oral trop systématique de la topologie élémentaire est plus ennuyeux et moins effectif qu'un mélange dosé de géométrie et d'algèbre, le tout suivi d'applications. Cette remarque est faite à l'intention du professeur qui voudrait utiliser notre ouvrage comme manuel. Le livre ne nécessite pas une lecture consécutive ; le lecteur qui voudrait aborder plus rapidement les groupes d'homotopie par exemple, ou tout autre chapitre pourra le faire facilement.

En ce qui concerne la terminologie et les notations, nous avons essayé de nous conformer à l'usage général en mathématiques, mais

nous nous sommes permis quelques réformes qui à notre sens s'imposaient depuis longtemps. Ainsi, nous avons remplacé les « complexes simpliciaux » et les « CW-complexes » par les « espaces simpliciaux » et les « espaces cellulaires » ; les « cofibrés » par les « couples de Borsuk »; nous considérons également les « fibrés de Steenrod ». Nous employons un terme dans un sens inhabituel : dans ce livre on entendra par « connexité » la « connexité par arcs » (la notion habituelle de « connexité » n'a pas de nom spécial dans ce livre). En principe, nous avons cherché à éviter les notations non standards pour des objets standards. Dans la majorité des cas nos notations sont tout simplement des abréviations des termes correspondants et se conçoivent d'elles-mêmes. Par exemple, pr est la projection, in l'inclusion, dim la dimension, ske le squelette, bs la base, etc.

La topologie nécessite un langage très précis, basé sur la théorie des ensembles, ce qui nous a amenés à lui prêter une attention particulière. Nous avons consacré une INTRODUCTION à une liste de termes et de notations, le sujet lui-même étant supposé connu dans ses grandes lignes.

Cet ouvrage ne contient pratiquement aucun historique de la topologie. Nous avons évité de nous conformer à la tradition qui veut que certains théorèmes portent le nom de leurs auteurs, réels ou présumés. Par contre, nous nous servons volontiers des noms des topologistes dans la terminologie et les notations.

Le système des renvois peut être brièvement décrit de la manière suivante. Chaque chapitre est divisé en paragraphes, les paragraphes en sous-paragraphes, ces derniers en alinéas numérotés dont les numéros sont imprimés en écriture cursive. Parfois, plusieurs alinéas numérotés d'un sous-paragraphe sont réunis sous un titre commun. Les faits communiqués sans démonstration sont précédés par le mot « Information ».

Les renvois à des théorèmes, définitions, remarques, etc., sont donnés en principe par quatre chiffres, indiquant successivement le chapitre, le paragraphe, le sous-paragraphe et l'alinéa numéroté. A l'intérieur d'un même chapitre le numéro de ce chapitre est supprimé. Il en va de même pour les paragraphes et les sous-paragraphes.

Exemples : les notations § 1.2 (paragraphe 2 du chapitre 1), p. 1.2.3 (sous-paragraphe 3 du paragraphe 2 du chapitre 1) et 1.2.3.4 (alinéa *4* du sous-paragraphe 3 du paragraphe 2 du chapitre 1) sont abrégés au chapitre 1 pour devenir respectivement § 2, p. 2.3 et 2.3.4. Le renvoi p. 1.2.3 devient à l'intérieur du § 2 du premier chapitre tout simplement p. 3, et le renvoi 1.2.3.4 se note *4* et à l'intérieur du sous-paragraphe p. 1.2.3 et 3.4 à l'intérieur du paragraphe 2 du premier chapitre.

Les auteurs

INTRODUCTION

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS NON USUELLES DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES EMPLOYÉES DANS CET OUVRAGE

Dans la théorie des ensembles, les mathématiciens se satisfont d'une liste remarquablement modeste de termes et de notations. Ceux-ci peuvent être répartis, *grosso modo*, en trois groupes. Le premier comprend des termes et des notations universellement reconnus. Ceux du second groupe sont usités aussi largement, mais peuvent prêter à des interprétations variées. Les termes et les notations moins usuels sont rapportés au troisième groupe.

Les notations du premier groupe ne nécessitent aucune explication. Par exemple, $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X_1 \times \ldots \times X_n$ désignent invariablement la réunion, l'intersection et le produit des ensembles ; les notations $f: X \to Y$, $\operatorname{Im} f$ et $f|_A : A \to Y$ une application, son image et sa restriction à A. Il en va de même pour la formule $x \in X$ et les expressions *application injective* et *application surjective*.

En ce qui concerne notre mode d'emploi des termes et des notations du deuxième groupe, quelques remarques sont nécessaires. L'ensemble vide sera désigné par le symbole $\varnothing$. La notation $X \subset Y$ sera entendue au sens large, i.e. nous n'excluons pas l'égalité $X = Y$. De même pour l'expression *ensemble dénombrable* : nous appelons ainsi tout ensemble qui est infini dénombrable ou bien fini. L'application identique de l'ensemble X sera désignée par id X ou simplement par id si le contexte ne prête pas à confusion. Une application est dite *bijective*, lorsqu'elle possède une application inverse, i.e. est à la fois injective et surjective. La notation $\{x \in X \mid \ldots\}$ désigne la partie de l'ensemble X constituée par tous les x vérifiant la condition écrite à la place des points de suspension. Une *famille* $\{X_\mu\}_{\mu \in M}$ est l'application de l'ensemble M sur l'ensemble des objets X_μ pour $\mu \in M$, déterminée par la formule $\mu \mapsto X_\mu$.

Le but principal de ce chapitre introductoire est de citer et d'expliquer les notations et la terminologie non usuelles.

Applications

Si A est un sous-ensemble de l'ensemble X, alors l'inclusion de A dans X peut être envisagée comme l'application définie par la formule $x \mapsto x$. Notation : in : $A \to X$. Si A et X ne prêtent pas à confusion, nous écrirons plus brièvement in.

Si A est un sous-ensemble de X, et B un sous-ensemble de Y, alors à chaque application $f: X \to Y$ vérifiant $f(A) \subset B$ correspond une application ab $f: A \to B$ donnée par la formule $x \mapsto f(x)$ et appelée *abréviation de l'application f à A, B*. Dans les cas où A et B sont bien déterminés par le contexte, nous écrirons ab f à la place de ab $f: A \to B$. Lorsque $B = Y$, l'application ab f sera la restriction usuelle de f à A.

Par application d'une suite $(X, A_1, \ldots, A_n)$, où $A_1, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles de X, dans une suite $(Y, B_1, \ldots, B_n)$, où $B_1, \ldots, B_n$ sont des sous-ensembles de Y, nous entendons la suite d'applications

$$(\varphi: X \to Y,\ \varphi_1: A_1 \to B_1,\ \ldots,\ \varphi_n: A_n \to B_n)$$

telle que $\varphi_i = \text{ab}\ \varphi$. Notation :

$$(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n): (X, A_1, \ldots, A_n) \to (Y, B_1, \ldots, B_n).$$

Lorsque les sous-ensembles $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ sont fixés, l'application $f = (\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et sa première composante φ se déterminent l'une l'autre et ne seront pas généralement distinguées ; par exemple, la notation $f: (X, A_1, \ldots, A_n) \to (Y, B_1, \ldots, B_n)$ peut également signifier que f est une application de l'ensemble X dans Y telle que $f(A_1) \subset B_1, \ldots, f(A_n) \subset B_n$. Lorsqu'il s'agit de préciser la relation entre f et φ, nous écrirons

$$f = \text{rel}\ \varphi, \qquad \varphi = \text{abs}\ f.$$

La notation rel id sera parfois réduite à rel.

Quotients

L'ensemble quotient de l'ensemble X par sa partition $\mathfrak{f}$ est désigné par $X/\mathfrak{f}$. L'application $X \to X/\mathfrak{f}$, qui fait correspondre à chaque point l'élément de la partition qui le contient, est appelée *projection* et désignée par pr. Les sous-ensembles de X constitués par des éléments entiers de la partition sont dits *saturés*. Le plus petit ensemble saturé contenant un sous-ensemble A de l'ensemble X (i.e. $\text{pr}^{-1}(\text{pr}(A))$) s'appelle *saturation* de l'ensemble A.

Si $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$ sont des partitions des ensembles X, Y, alors à chaque application $f: X \to Y$ qui applique les éléments de la partition $\mathfrak{f}$ dans des éléments de la partition $\mathfrak{t}$ correspond l'application $X/\mathfrak{f} \to Y/\mathfrak{t}$ qui fait correspondre à l'élément A de la partition $\mathfrak{f}$ l'élément de la partition $\mathfrak{t}$ qui contient $f(A)$. Cette application est notée fact f. En particulier, elle est définie lorsque $\mathfrak{t}$ est une partition dont les ensembles sont des points, tandis que f est constante sur les éléments de la partition $\mathfrak{f}$; ainsi, à chaque application $f: X \to Y$, constante sur les éléments de la partition $\mathfrak{f}$ de X, correspond l'application fact $f: X/\mathfrak{f} \to Y$.

La partition de l'ensemble X en ensembles non vides constitués par les images inverses des points par l'application $f: X \to Y$ sera désignée par zer (f). L'application correspondante fact $f: X/\text{zer}\,(f) \to Y$ est injective et sera appelée *quotient injectif de l'application f.*

Sommes

On appelle *somme d'une famille d'ensembles* $\{X_\mu\}_{\mu \in M}$ la réunion des copies disjointes des ensembles X_μ, i.e. l'ensemble des couples (x_μ, μ) tels que x_μ est élément de X_μ. Notation: $\sqcup_{\mu \in M} X_\mu$. L'application de l'ensemble X_ν $(\nu \in M)$ dans $\sqcup_{\mu \in M} X_\mu$ donnée par la formule $x \mapsto (x, \nu)$ sera désignée par in_ν.

Puisque les applications in_ν sont injectives et les images $\text{in}_\nu\,(X_\nu)$ sont deux à deux disjointes et recouvrent $\sqcup X_\mu$, pour chaque famille d'ensembles $\{Y_\mu\}$ indexée par le même ensemble M, et pour toute famille d'applications $\{f_\mu: X_\mu \to Y_\mu\}_{\mu \in M}$, il existe une application et une seule $f: \sqcup X_\mu \to \sqcup Y_\mu$ qui vérifie la relation $f \circ \text{in}_\nu = \text{in}_\nu \circ f_\nu$. On l'appelle *somme des applications* f_μ et on la désigne par $\sqcup_{\mu \in M} f_\mu$.

Lorsque M se compose des nombres $1, \ldots, n$, on emploie tout aussi bien que $\sqcup X_\mu$ et $\sqcup f_\mu$ les notations

$$X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n \quad \text{et} \quad f_1 \sqcup \ldots \sqcup f_n.$$

Produits

Le produit $X_1 \times \ldots \times X_n$ s'applique naturellement sur chaque facteur X_i d'après la règle

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i.$$

Cette application est appelée *i-ième projection*; on la désigne par pr_i.

Si les applications $f_1: X_1 \to Y_1, \ldots, f_n: X_n \to Y_n$ sont données, on peut envisager l'application du produit $X_1 \times \ldots \times X_n$ dans le produit $Y_1 \times \ldots \times Y_n$ déterminée par la formule

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1\,(x_1), \ldots, f_n\,(x_n)).$$

Cette application est appelée *produit des applications* $f_1, \ldots, f_n$; on la désigne par $f_1 \times \ldots \times f_n$.

Soient $\mathfrak{f}$ une partition de l'ensemble X et $\mathfrak{t}$ une partition de l'ensemble Y. Nous désignerons par $\mathfrak{f} \times \mathfrak{t}$ la partition du produit $X \times Y$ en ensembles de la forme $A \times B$, où A est un élément de la partition $\mathfrak{f}$ et B un élément de la partition $\mathfrak{t}$.

L'ensemble X s'applique naturellement sur son carré $X \times X$ selon la formule $x \mapsto (x, x)$. Cette application est dite *diagonale*; elle est notée diag; le sous-ensemble diag (X) de l'ensemble $X \times X$ est appelé *diagonale* de ce dernier.

CHAPITRE PREMIER

ESPACES TOPOLOGIQUES

§ 1. NOTIONS FONDAMENTALES

1. Topologie

1. On dit qu'un ensemble X est muni d'une *structure topologique*, ou simplement d'une *topologie*, lorsqu'on a choisi dans X une famille de sous-ensembles qui contient la réunion de chacune de ses sous-familles et l'intersection de chacune de ses sous-familles finies. Un ensemble muni d'une topologie est appelé *espace topologique*, ses éléments sont des *points*, tandis que les ensembles de la famille choisie sont des *ensembles ouverts* ou des *ouverts*.

Une sous-famille d'ensembles dont on prend la réunion ou l'intersection peut, en particulier, être vide. La réunion d'une sous-famille vide est $\varnothing$, l'intersection d'une sous-famille vide d'ensembles de X est X tout entier. Ainsi $\varnothing$ et X sont des ensembles ouverts.

En guise d'exemple de structure topologique signalons la topologie triviale où seuls les ensembles X et $\varnothing$ sont ouverts, et la topologie *discrète*, pour laquelle toutes les parties de X sont ouvertes. Lorsque X contient plus d'un élément, il y a aussi d'autres topologies. Par exemple, l'ensemble X constitué par deux éléments a, b possède, en plus des deux topologies indiquées, les deux suivantes: pour l'une les ensembles ouverts seront X, $\{a\}$, $\varnothing$, pour l'autre X, $\{b\}$, $\varnothing$. Des exemples plus sérieux seront envisagés par la suite.

2. Un sous-ensemble d'un espace topologique est dit *fermé* lorsque son complémentaire est ouvert. La classe des ensembles fermés contient l'intersection de chacune de ses sous-familles et la réunion de chacune de ses sous-familles finies; pour chaque famille de sous-ensembles de X qui possède cette propriété, il existe une seule topologie dans X relativement à laquelle la famille donnée est celle de tous les ensembles fermés.

3. On appelle *voisinage* d'un point d'un espace topologique tout ensemble ouvert qui contient ce point. On appelle voisinage d'une partie d'un espace topologique tout ensemble ouvert qui contient cette partie.

Notions dérivées

4. Parmi les ensembles ouverts contenus dans une partie A d'un espace topologique X il y en a un qui est maximal : c'est la réunion de tous ses ensembles ouverts. On l'appelle *partie intérieure* ou simplement *intérieur* de l'ensemble A et on le désigne par $\operatorname{Int} A$, ou plus explicitement, par $\operatorname{Int}_X A$. De même, parmi tous les ensembles fermés qui contiennent A, il y en a un qui est minimal : c'est l'intersection de tous les fermés. On l'appelle *adhérence* de l'ensemble A et on le désigne par $\operatorname{Cl} A$, ou plus explicitement, par $\operatorname{Cl}_X A$. La différence $\operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$ peut être représentée comme l'intersection des fermés $\operatorname{Cl} A$ et $X \setminus \operatorname{Int} A$; elle est donc fermée. On l'appelle *frontière* de l'ensemble A et l'on la désigne par $\operatorname{Fr} A$ ou bien par $\operatorname{Fr}_X A$. Remarquons que $X \setminus \operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}(X \setminus A)$ et que les ensembles A et $X \setminus A$ ont la même frontière.

5. Relativement à l'ensemble A, les points des ensembles $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Cl} A$, $\operatorname{Fr} A$ et $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$ sont appelés respectivement *points intérieurs*, *points d'adhérence*, *points frontière* et *points extérieurs*. On les décrit plus explicitement dans le langage des voisinages. Un point sera intérieur lorsqu'il possède un voisinage entièrement contenu dans A ; c'est un point d'adhérence si chacun de ces voisinages rencontre A ; un point frontière lorsque chacun de ses voisinages rencontre A aussi bien que $X \setminus A$; un point extérieur lorsqu'il possède un voisinage qui n'a pas de points communs avec A.

Il est clair qu'un ensemble n'est ouvert que s'il coïncide avec son intérieur, i.e. se compose de points intérieurs ; il est fermé si et seulement s'il coïncide avec son adhérence, i.e. contient tous ses points frontière.

6. La partie A de l'espace topologique X est appelée *dense dans* X ou *partout dense* si $\operatorname{Cl} A = X$, i.e. si A rencontre tous les ouverts non vides. L'ensemble A s'appelle *rare* lorsque l'ensemble $X \setminus \operatorname{Cl} A$ est partout dense.

Bases et prébases

7. On appelle *base d'un espace topologique* une famille d'ensembles ouverts telle que tout ensemble ouvert se met sous forme de réunion d'ensembles appartenant à cette famille. Enoncé équivalent : une famille Γ d'ensembles ouverts est une base si pour tout ensemble ouvert U et pour tout point $x \in U$ il existe un ensemble $V \in \Gamma$ tel que $x \in V \subset U$.

Une base détermine entièrement une topologie : sont ouverts précisément les ensembles qui se mettent sous forme de réunions d'éléments de la base.

8. Pour munir un ensemble d'une topologie on se sert généralement de la proposition suivante. Soit Γ une famille de sous-ensembles de l'ensemble X. *Pour qu'il existe dans X une topologie de base Γ,*

il est nécessaire et suffisant que l'intersection d'une sous-famille finie quelconque d'ensembles de Γ *puisse être représentée comme réunion d'ensembles de* Γ.

La nécessité découle du fait que l'intersection d'une famille finie d'ensembles de la base est ouverte. La suffisance se déduit du fait évident suivant : la classe des parties de l'ensemble X représentables sous forme de réunions d'ensembles de Γ vérifie les conditions de la définition *1*.

9. La proposition précédente admet une reformulation utile : *pour qu'il existe dans* X *une topologie de base* Γ *il faut et il suffit que les ensembles de* Γ *recouvrent* X *et que, pour deux ensembles quelconques* U, $V \in \Gamma$ *et pour chaque point* $x \in U \cap V$, *il existe un ensemble* $W \in \Gamma$ *tel que* $x \in W \subset U \cap V$.

10. Une famille de parties d'un espace topologique est appelée *prébase* si les intersections des familles finies de cet ensemble constituent une base de cet espace.

Il découle de *8* qu'*il existe, pour toute famille* Γ *de parties de l'ensemble* X, *une topologie unique de prébase* Γ *dans* X.

11. On appelle *base au point* x de l'espace topologique X une famille de voisinages de x telle que chaque voisinage de x contient un voisinage appartenant à cette famille. On appelle *prébase au point* x une famille d'ensembles pour laquelle les intersections de ses sous-familles finies constituent une base au point x.

Recouvrements

12. Les recouvrements dont il s'agira ici seront en général des recouvrements d'un espace topologique par ses parties ou des recouvrements d'une partie d'un espace topologique par d'autres parties de cet espace. Pour souligner que le recouvrement considéré d'une partie A d'un espace topologique X est constitué par des parties de X qui peuvent ne pas être contenues dans A nous l'appellerons *recouvrement de l'ensemble* A *dans* X.

On dit qu'un recouvrement Γ est *inscrit* dans un recouvrement Δ si chaque ensemble de Γ est contenu dans un certain ensemble de Δ.

Un recouvrement est dit *localement fini* si chaque point de l'espace possède un voisinage qui rencontre seulement un nombre fini d'éléments du recouvrement.

Un recouvrement est dit *ouvert* (resp. *fermé*) s'il est constitué par des ensembles ouverts (resp. fermés).

13. Dans tout recouvrement ouvert d'un espace topologique X *on peut inscrire un recouvrement constitué d'ensembles d'une base donnée de* X.

Un tel recouvrement est constitué, par exemple, par des ensembles d'une base et contenus dans des ensembles du recouvrement donné.

2. Distance

1. Une fonction ρ à valeurs réelles non négatives, définie sur le carré $X \times X$ d'un ensemble X est appelée *distance sur* X lorsque les trois conditions suivantes sont remplies:

a) $\rho(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;

b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ quels que soient $x, y \in X$;

c) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ quels que soient $x, y, z \in X$.

Un ensemble muni d'une distance est appelé *espace métrique.* La notation standard pour la distance est dist.

Par abus de langage les valeurs de la fonction de distance sont appelées *distances*; l'inégalité c) est appelée *inégalité du triangle* ou *inégalité triangulaire.*

2. L'exemple fondamental d'espace métrique est l'espace euclidien R^n usuel à n dimensions ($n \geqslant 0$), i.e. l'ensemble des suites constituées par n nombres réels $\{x_i\}_1^n$ dans lequel la distance entre les suites $\{x_i\}_1^n$ et $\{y_i\}_1^n$ se détermine par $\left[\sum_1^n (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$. La droite R^1 est identifiée avec le corps des nombres réels désigné par R.

En passant des suites à n termes $\{x_i\}_1^n$ à des suites infinies $\{x_i\}_1^\infty$, soumises à la condition $\sum_1^\infty x_i^2 < \infty$, et en remplaçant $\sum_1^n$ par $\sum_1^\infty$ dans la formule pour la distance, on obtient la définition de l'espace hilbertien standard l_2.

3. On appelle *boule de centre* $x_0 \in X$ *et de rayon* $r > 0$ dans un espace métrique X l'ensemble de tous les $x \in X$ tels que dist $(x_0, x) \leqslant r$. L'inégalité correspond à une *boule ouverte*, tandis que l'égalité définit une *sphère.* La boule unité et la sphère unité de l'espace R^n, i.e. la boule et la sphère de centre $(0, \ldots, 0)$ et de rayon 1, sont simplement appelées *boule de dimension* n et *sphère de dimension* $n - 1$; on les désigne par D^n et S^{n-1}. En particulier, D^0 est un point, S^0 est un couple de points, $S^{-1} = \varnothing$. En outre, nous posons $D^n = \varnothing$ pour $n \leqslant -1$ et $S^n = \varnothing$ pour $n \leqslant -2$.

4. On appelle *distance des ensembles* A *et* B, et on note Dist (A, B), le nombre $\inf_{x \in A,\, y \in B}$ dist (x, y). En particulier, lorsque a est un point, on a

$$\text{Dist}\,(a, B) = \inf_{y \in B} \text{dist}\,(a, y).$$

On appelle *diamètre* de l'ensemble A, et on note diam A, le nombre $\sup_{x, y \in A}$ dist (x, y). Un ensemble de diamètre fini est dit *borné.*

Topologie métrique

5. L'inégalité du triangle montre que si une boule ouverte de centre x_0 et de rayon r contient un point x_1, alors elle contient la boule ouverte de centre x_1 et de rayon r — dist (x_0, x_1). Par conséquent, l'intersection de deux boules ouvertes d'un espace métrique contient, pour chaque point de cette intersection, une certaine boule ouverte de centre en ce point. Puisqu'en outre les boules ouvertes recouvrent l'espace, elles constituent la base d'une topologie (voir 1.9). Ainsi un espace métrique se munit d'une topologie.

La topologie décrite est dite *métrique*. Par la suite, nous considérerons sans l'indiquer explicitement tout espace métrique comme topologique, la topologie métrique étant sous-entendue. En particulier, ceci se rapporte aux espaces R^n et l_2.

Un espace topologique dont la topologie est métrique relativement à une certaine distance est dit *métrisable*.

6. Les boules ouvertes de centre en un point d'un espace métrique constituent évidemment une base en ce point. La partie de cette base constituée par les boules de rayon $1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est également une base en ce point.

7. On appelle *voisinage métrique de rayon* $r > 0$ d'une partie A d'un espace métrique X l'ensemble de points $x \in X$ tels que Dist $(A, x) < r$. Etant réunion des boules ouvertes de rayon r de centres en les points de A, cet ensemble est un ouvert, i.e. effectivement un voisinage de A.

3. Sous-espaces

1. Dans ce sous-paragraphe, nous étudions la *topologie induite*: elle transforme une partie A d'un espace topologique X en un espace topologique indépendant. Cette topologie se définit de la manière suivante: ses ensembles ouverts sont des intersections de la forme $A \cap B$, où B est un ouvert de X. Il est évident que les conditions de la définition 1.1 sont satisfaites. Il est également clair que les ensembles fermés dans cette topologie sont précisément des intersections de la forme $A \cap B$, où B est un fermé de X. Les parties de X munies de la topologie induite sont appelées *sous-espaces*.

Un couple (X, A) constitué par un espace topologique X et son sous-espace A est appelé *couple topologique*. Un triplet (X, A, B) formé d'un espace topologique X et de ses sous-espaces A, B tels que $B \subset A$ s'appelle *triplet topologique*.

2. Un ensemble de A, sous-espace de X, ouvert ou fermé dans X, le sera dans A. Si A est ouvert, tout ouvert de A est également ouvert dans X. Si A est fermé, tout fermé de A est également fermé dans X. Dans tous les cas $B \subset A \subset X$ implique $\mathrm{Cl}_A B = (\mathrm{Cl}_X B) \cap A$.

Il est clair que si Γ est une base (resp. prébase) de l'espace X, les ensembles $A \cap B$ pour $B \in \Gamma$ constituent une base (resp. prébase) de l'espace A.

La topologie induite, comme on voit immédiatement d'après sa définition, est transitive : si B est un sous-ensemble d'une partie A d'un espace X, les topologies induites dans B par les inclusions $B \subset A$ et $B \subset X$ coïncident.

3. Soient X un espace métrique et A une partie de X ; la restriction de la fonction dist à $A \times A$ est évidemment une distance sur A. Par conséquent, toute partie d'un espace métrique est également un espace métrique. Evidemment, la topologie métrique de ce dernier coïncide avec la topologie induite par la topologie métrique de l'espace sous-jacent.

4. Les constructions étudiées dans ce sous-paragraphe élargissent considérablement notre liste d'exemples non triviaux d'espaces topologiques : elle comprend maintenant tous les sous-ensembles des espaces R^n et l_2. En particulier, les boules et les sphères de l'espace R^n sont des espaces topologiques. Nous indiquerons encore ici les *cubes* de l'espace R^n définis par les inégalités de la forme $\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \alpha_i + a$ $(i = 1, \ldots, n)$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, a sont des nombres réels et $a > 0$. Lorsque $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ et $a = 1$, on dit que le cube en question est un *cube unité* et on le désigne par I^n. Le segment unité I^1 est également désigné par I.

Recouvrements fondamentaux

5. Un recouvrement Γ d'un espace X est dit *fondamental* si est ouvert (resp. fermé) chaque ensemble dont l'intersection avec tous les ensembles $B \in \Gamma$ est ouverte (resp. fermée) dans B.

Il est évident que tout recouvrement dans lequel on peut inscrire un recouvrement fondamental est lui-même fondamental.

6. Tous les recouvrements ouverts de même que tous les recouvrements finis et localement finis fermés sont fondamentaux.

Les cas d'un recouvrement ouvert ou d'un recouvrement fermé fini sont évidents. Soit Γ un recouvrement localement fermé d'un espace X. Construisons à partir des ensembles ouverts qui rencontrent seulement un nombre fini d'éléments de Γ un recouvrement Δ de l'espace X. Puisque Δ est fondamental, nous démontrerons que Γ l'est également en établissant que les recouvrements des ensembles $U \in \Delta$ par les intersections $U \cap B$, $B \in \Gamma$, sont fondamentaux. Mais ceci découle du fait que les recouvrements considérés sont finis et fermés.

7. Un triplet (X, A, B), où X est un espace topologique et A et B ses parties qui constituent son recouvrement fondamental, s'appelle *triade*. Ainsi l'espace X constitue avec ses parties A, B une triade lorsque $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B = X$, et également lorsque $A \cup B = X$ et les ensembles A, B sont fermés.

4. Applications continues

1. Une application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite *continue* si l'image inverse de tout ouvert (resp. fermé) de Y est un ouvert (resp. fermé) de X.

Une application $f: (X, A_1, \ldots, A_n) \to (Y, B_1, \ldots, B_n)$, où les $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de X et les $B_1, \ldots, B_n$ sont des parties de Y est dite *continue* si l'application abs $f: X \to Y$ l'est.

Remarque utile: pour que l'application $X \to Y$ soit continue il suffit que soient ouvertes les images inverses d'ensembles d'une certaine prébase de Y.

2. Il est évident que si les applications $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$ sont continues, alors leur composée $g \circ f: X \to Z$ l'est aussi. Il est également clair que l'application identique $\mathrm{id}\, X: X \to X$ est continue pour tout espace topologique X.

Il découle de la définition de la topologie induite que si l'application $f: X \to Y$ est continue et les ensembles A, B de X, Y vérifient $f(A) \subset B$, l'application ab $f: A \to B$ est continue. En particulier, la restriction $f|_A: A \to Y$ d'une application continue $f: X \to Y$ à un sous-ensemble quelconque A de X est continue. Par exemple, l'inclusion dans un espace de ses parties est une application continue.

Si l'abréviation ab f d'une application $f: X \to Y$ est définie sur X tout entier, alors sa continuité découle non seulement de la continuité de f, mais à son tour implique la continuité de celle-ci. En particulier, l'application $f: X \to Y$ est continue si et seulement si l'application ab $f: X \to f(X)$ l'est.

3. Il est clair que si Γ est un recouvrement fondamental d'un espace X, la continuité de l'application $f: X \to Y$ découle de la continuité des restrictions $f|_A$ pour $A \in \Gamma$. Enoncé équivalent: *soit Γ un recouvrement fondamental d'un espace X et supposons donnée, pour chaque ensemble $A \in \Gamma$, une application continue $f_A: A \to Y$ telle que $f_A(x) = f_B(x)$ si $x \in A \cap B$ $(A, B \in \Gamma)$; alors l'application $f: X \to Y$, définie par la formule*

$$(x) = f_A(x) \quad \textit{pour } x \in A \qquad (A \in \Gamma),$$

est continue.

4. Une application continue est dite *ouverte* (resp. *fermée*) si les images des ensembles ouverts (resp. fermés) sont ouvertes (resp. fermées).

Il est évident que la composée d'applications ouvertes (resp. fermées) est ouverte (resp. fermée).

Indiquons une condition suffisante utile pour qu'une application soit ouverte: une application continue $f: X \to Y$ est ouverte s'il existe pour chaque point $y \in Y$ un voisinage U_y et une application

continue $g_y : U_y \to X$ tels que la composée $f \circ g_y$ coïncide avec in : $U_y \to Y$. Démonstration : dans ce cas $f(A) = \bigcup_{y \in Y} g_y^{-1}(A)$ pour chaque partie A de X.

Continuité en un point

5. Une application $f : X \to Y$ est dite *continue en un point* $x \in X$ si pour chaque voisinage V du point $f(x)$ il existe un voisinage U du point x tel que $f(U) \subset V$.

Reformulons la définition précédente en évoquant moins d'ensembles ouverts. Supposons que l'application $f : X \to Y$ est donnée avec une certaine base Δ au point $x \in X$ et une certaine prébase E au point $f(x) \in Y$. Il est clair que pour la continuité de l'application f au point x il faut et il suffit que chaque voisinage $V \in$ E contienne l'image d'un voisinage $U \in \Delta$.

Dans le cas où X et Y sont des espaces métriques, et les bases Δ et E sont constituées par des boules ouvertes à centres aux points x et $f(x)$, cette dernière proposition nous amène à l'énoncé numérique suivant si populaire en Analyse : une application $f : X \to Y$ est continue au point $x \in X$ si pour chaque ε positif il existe un δ positif tel que l'image d'un point quelconque $x' \in X$ dont la distance de x est inférieure à δ est éloignée du point $f(x)$ d'au plus ε.

6. *Une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si elle l'est en chaque point.*

Démonstration. Si l'application f est continue et V est un voisinage du point $f(x)$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage du point x et l'on a $f(f^{-1}(V)) \subset V$.

Si l'application f est continue en chaque point et V est un voisinage ouvert dans Y, alors chaque point de l'ensemble $f^{-1}(V)$ est un point intérieur, puisqu'il possède un voisinage qui s'applique dans V.

Homéomorphismes et plongements

7. La continuité d'une application bijective $f : X \to Y$ n'implique pas celle de l'application inverse $f^{-1} : Y \to X$. Par exemple, l'application inverse de l'identité d'un ensemble, muni de la topologie discrète, sur ce même ensemble, muni d'une autre topologie, n'est pas continue.

Une application bijective f telle que les deux applications f et f^{-1} sont continues s'appelle *homéomorphisme*. Lorsqu'il existe un homéomorphisme $X \to Y$, on dit que l'espace Y est *homéomorphe* à l'espace X.

Il est évident que l'application identique d'un espace est un homéomorphisme, que l'application inverse d'un homéomorphisme et la composée de deux homéomorphismes sont des homéomorphismes. Par conséquent, l'homéomorphisme est une relation d'équivalence.

8 (Exemples). La boule ouverte Int D^n est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$. L'homéomorphisme standard $\mathbf{R}^n \to \operatorname{Int} D^n$ se note:

$$x \mapsto \begin{cases} 2x \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{dist}(0, x))/\pi \operatorname{dist}(0, x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Le cube I^n est homéomorphe à la boule D^n, sa partie intérieure Int I^n est homéomorphe à Int D^n, tandis que sa frontière Fr I^n est homéomorphe à Fr D^n, i.e. à S^{n-1}. Les homéomorphismes $D^n \to I^n$, Int $D^n \to$ Int I^n, Fr $D^n \to$ Fr I^n représentent une translation d'un vecteur $(\mathrm{ort}_1 + \ldots + \mathrm{ort}_n)/2$, où $\mathrm{ort}_1, \ldots, \mathrm{ort}_n$ désignent les vecteurs $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$, suivie d'une projection centrale.

La sphère S^n dont on a éliminé un point unique est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$. L'homéomorphisme $\mathbf{R}^n \to S^n \setminus \mathrm{ort}_1$ peut être composé de l'homéomorphisme $\{x_1, \ldots, x_n\} \mapsto \{0, x_1, \ldots, x_n\}$ de l'espace $\mathbf{R}^n$ sur le sous-espace correspondant de l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$, suivi de la projection stéréographique, i.e. de la projection de ce sous-espace sur $S^n \setminus \mathrm{ort}_1$ à partir du point ort_1.

9. On appelle *plongement*, ou plus précisément *plongement topologique*, une application $f: X \to Y$ lorsque ab $f: X \to f(X)$ est un homéomorphisme. Par exemple, l'inclusion d'un sous-espace dans l'espace sous-jacent est un plongement.

Rétractions

10. On appelle *rétraction* une application d'un espace sur son sous-espace quand elle coïncide sur ce dernier avec l'identité. Le sous-espace sur lequel on peut effectuer la rétraction s'appelle *rétracte* d'un espace donné.

Chaque point d'un espace topologique est son rétracte. Un couple de points peut ne pas être un rétracte. Par exemple, l'intervalle fermé ne peut être rétracté sur sa frontière: une telle rétraction serait sur cet intervalle une fonction réelle continue prenant deux valeurs et ne possédant pas de valeurs intermédiaires.

11. Une partie A d'un espace topologique X est son rétracte si et seulement si toute application continue $A \to Y$ se prolonge en une application continue $X \to Y$ quel que soit l'espace topologique Y.

Démonstration. Soient $\rho: X \to A$ une rétraction et $f: A \to Y$ une application continue; la composée $f \circ \rho$ prolonge f à X.

Si une application continue $A \to Y$ se prolonge en une application continue $X \to Y$, alors l'identité $A \to A$ se prolonge en une application continue $X \to A$, qui sera justement une rétraction.

Fonctions numériques

12. Le théorème connu de l'Analyse sur la continuité des fonctions, résultats des opérations arithmétiques sur des fonctions continues, est évidemment valable pour les fonctions numériques définies sur un espace topologique. Il en va de même pour le théorème de la continuité de la limite d'une suite uniformément convergeante de fonctions continues.

13. Si X est un espace métrique et A un sous-ensemble de X, alors la fonction $X \to \mathsf{R}$ définie par la formule $x \mapsto \mathrm{Dist}\,(x, A)$ est continue.

Démonstration. Si $x, y \in X$, $z \in A$, on a $\mathrm{Dist}\,(x, A) \leqslant \mathrm{dist}\,(x, z) \leqslant \mathrm{dist}\,(x, y) + \mathrm{dist}\,(y, z)$. Par conséquent $\mathrm{Dist}\,(x, A) \leqslant \mathrm{dist}\,(x, y) + \mathrm{Dist}\,(y, A)$ quels que soient $x, y \in X$; puisque x et y jouent un rôle symétrique dans cette démonstration, on a $|\,\mathrm{Dist}\,(x, A) - \mathrm{Dist}\,(y, A)\,| \leqslant \mathrm{dist}\,(x, y)$.

14. On dit qu'un sous-ensemble A d'un espace topologique X est *découpable* s'il existe une fonction continue $f\colon X \to I$ telle que $f(x) = 0$ pour $x \in A$ et $f(x) > 0$ pour $x \in X \setminus A$. Nous dirons alors qu'une telle fonction *découpe* l'ensemble A.

Il est évident que tous les ensembles susceptibles d'être découpés sont fermés. Réciproquement, tout ensemble fermé d'un espace métrique est découpable : un sous-ensemble fermé A d'un espace métrique est découpé par la fonction $x \mapsto \min\,(1, \mathrm{Dist}\,(x, A))$ par exemple.

5. Axiomes de séparation

1. Dans ce sous-paragraphe et les deux suivants, nous énonçons des conditions supplémentaires, souvent imposées aux structures topologiques. On reconnaîtra les propriétés familières des sous-espaces des espaces R^n.

2. D'une douzaine « d'axiomes de séparation » nous aurons besoin des quatre suivants :

T_1. *Pour deux points distincts quelconques a, b d'un espace topologique il existe un voisinage du point a qui ne contient pas le point b.* Enoncés équivalents : *le point est un ensemble fermé ; les ensembles finis sont fermés.*

T_2. *Deux points distincts quelconques possèdent des voisinages disjoints.*

T_3. *Un point quelconque et un ensemble fermé quelconque ne contenant pas ce point possèdent des voisinages disjoints.* Enoncé équivalent : *chaque voisinage d'un point quelconque contient l'adhérence d'un voisinage de ce point.*

T_4. *Pour deux ensembles fermés disjoints il existe des voisinages disjoints.* Enoncé équivalent : *chaque voisinage d'un ensemble fermé contient l'adhérence d'un voisinage de cet ensemble.* Autre énoncé

équivalent : *pour chaque famille finie d'ensembles fermés deux à deux disjoints il existe des voisinages de ces ensembles à adhérences disjointes.*

3. L'axiome T_1 découle de l'axiome T_2 mais ne se déduit pas, comme le montrent des exemples évidents, des axiomes T_3 et T_4.

Les espaces qui vérifient l'axiome T_2 sont dits *espaces de Hausdorff* ou *espaces séparés*; ceux pour lesquels on a à la fois les axiomes T_1 et T_3 sont dits *réguliers*, tandis que ceux qui vérifient les deux axiomes T_1 et T_4 sont dits *normaux*. La normalité implique la régularité : le fait qu'un espace est régulier implique qu'il est un espace de Hausdorff.

4. Il est clair qu'un sous-espace d'un espace de Hausdorff est également un espace de Hausdorff, un sous-espace d'un espace régulier est régulier et un sous-espace fermé d'un espace normal est normal.

Information. Un sous-espace non fermé d'un espace normal peut ne pas être normal; voir [11].

5. Un rétracte d'un espace de Hausdorff est fermé.

Démonstration. Soient A un rétracte d'un espace de Hausdorff X, $\rho : X \to A$ une rétraction, b un point n'appartenant pas à A. Puisque l'application ρ est continue et l'espace X est un espace de Hausdorff, les points b, $\rho(b)$ possèdent des voisinages disjoints U, V tels que $\rho(U) \subset V$; cette inclusion implique $\rho(x) \neq x$ lorsque $x \in U$, i.e. U n'a pas de points communs avec A. Par conséquent, tout point qui n'appartient pas à A est un point extérieur de A.

6. Tout espace métrique est normal.

Démonstration. Que les espaces métriques vérifient l'axiome T_1 est évident; vérifions T_4. Soient A, B des sous-ensembles fermés disjoints d'un espace métrique. Posons

$$U = \{x \mid \mathrm{Dist}(x, A) < \mathrm{Dist}(x, B)\},$$

$$V = \{x \mid \mathrm{Dist}(x, B) < \mathrm{Dist}(x, A)\}.$$

Puisque $\mathrm{Dist}(x, A)$, $\mathrm{Dist}(x, B)$ sont des fonctions continues en x (voir 4.13), les ensembles U, V sont ouverts et l'on a évidemment $U \cap V = \varnothing$ et $A \subset U$, $B \subset V$.

Fonctions d'Urysohn

7 (Lemme). *Soient A, B des sous-ensembles fermés d'un espace topologique X, Γ la famille de tous les voisinages de A sans points communs avec B, et enfin Δ l'ensemble des nombres binaires rationnels de l'intervalle fermé I (i. e. des nombres de la forme $m/2^q$, où m, q sont des entiers non négatifs et $m \leqslant 2^q$). Si X est normal, il existe une application $\varphi : \Delta \to \Gamma$ telle que*

$$\mathrm{Cl}\,\varphi(r_1) \subset \varphi(r_2) \quad \textit{pour} \quad r_1 < r_2. \tag{1}$$

Démonstration. Posons $\varphi(1) = X \setminus B$ et prenons en guise de $\varphi(0)$ un voisinage de l'ensemble A contenu, avec son adhérence, dans $X \setminus B$ (deuxième énoncé de l'axiome T_4). Si les valeurs de $\varphi(r)$ sont déjà définies, la condition (1) étant vérifiée pour les nombres $r = m/2^q \in \Delta$ lorsque $q = n$, on peut étendre cette définition, en conservant la propriété (1), aux nombres $r = m/2^{n+1} \in \Delta$: en guise de $\varphi(r)$ pour $r = m/2^{n+1} \in \Delta$, avec $m = 2k + 1$, on peut prendre un ouvert quelconque contenant $\mathrm{Cl}\,\varphi(k/2^n)$ et contenu avec son adhérence dans $\varphi((k+1)/2^n)$. Cette récurrence nous amène à l'application $\varphi: \Delta \to \Gamma$ qui vérifie la propriété (1).

8. Pour deux sous-ensembles fermés disjoints quelconques A, B d'un espace normal X, il existe une fonction continue $X \to I$, égale à 0 sur A et à 1 sur B.

Démonstration. En appliquant le lemme précédent et les notations correspondantes, définissons la fonction $f: X \to I$ par la formule

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid \varphi(r) \ni x\} & \text{si } x \in \varphi(1), \\ 1 & \text{si } x \in X \setminus \varphi(1). \end{cases}$$

Il est clair que cette fonction est égale à 0 sur A et à 1 sur B. Pour démontrer sa continuité montrons que les intervalles $[0, r[$, $]r, 1]$, où $r \in \Delta$, constituent une prébase de l'intervalle fermé I et que $f^{-1}([0, r[) = \bigcup_{r'<r} \varphi(r')$, tandis que $f^{-1}([0, r]) = \bigcap_{r'>r} \varphi(r')$. Cette dernière intersection, d'après l'inclusion (1), coïncide avec $\bigcap_{r'>r} \mathrm{Cl}\,\varphi(r')$, de sorte que $f^{-1}(]r, 1]) = X \setminus f^{-1}([0, r[) = X \setminus \bigcap_{r'>r} \mathrm{Cl}\,\varphi(r')$. Ainsi les intervalles $[0, r[$, $]r, 1]$ possèdent des images inverses ouvertes et la fonction f est donc continue.

9. La fonction continue $X \to I$, égale à 0 sur un ensemble $A \subset X$ et à 1 sur un ensemble $B \subset X$, est appelée *fonction d'Urysohn du couple A, B.*

La fonction d'Urysohn du couple A, B peut s'annuler en dehors de A, mais lorsque l'ensemble A est découpable, la formule $x \mapsto \min(f(x) + g(x), 1)$, où f est une fonction d'Urysohn quelconque du couple A, B, et g une fonction qui découpe A, permet d'obtenir une fonction d'Urysohn du couple A, B, positive en dehors de A.

On voit que la démonstration du théorème *8* n'emploie pas l'axiome T_1, de sorte que ce théorème est valable pour chaque espace vérifiant T_4. La réciproque est également vraie: si, pour deux sous-ensembles fermés disjoints quelconques de l'espace X, il existe une fonction d'Urysohn, alors X vérifie l'axiome T_4.

Notons finalement que le théorème *8* peut être renforcé en composant la fonction d'Urysohn avec une transformation linéaire $t \mapsto a + (b - a)\,t$, où a, b sont des nombres réels quelconques. La composée sera une fonction continue qui applique X sur l'intervalle $[a, b]$ et qui prend la valeur a sur A et b sur B.

Théorèmes de prolongement

10 (Lemme). *Soient F un sous-ensemble fermé d'un espace topologique X et $\varphi: F \to \mathsf{R}$ une fonction continue majorée en valeur absolue par un nombre $L > 0$. Si X est normal, alors il existe une fonction continue $\psi: X \to \mathsf{R}$ telle que*

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leqslant L/3 \quad si \quad x \in X, \\ |\psi(x) - \varphi(x)| &\leqslant 2L/3 \quad si \quad x \in F. \end{aligned} \tag{2}$$

Démonstration. Les sous-ensembles de l'ensemble F définis par les inégalités $\varphi(x) \leqslant -L/3$, $\varphi(x) \geqslant L/3$ sont fermés dans F (et donc dans X) et sont disjoints. Par conséquent, il existe une fonction continue $\psi: X \to [-L/3, L/3]$, égale à $-L/3$ sur le premier ensemble et à $L/3$ sur le second (voir *9*); il est clair qu'elle vérifie la condition (2).

11. Si A est un sous-ensemble fermé d'un espace normal X, alors toute fonction continue $A \to \mathsf{R}$ se prolonge en une fonction continue $X \to \mathsf{R}$. Dans cet énoncé, la droite R peut être remplacée par un intervalle fermé.

Montrons d'abord que chaque application continue f de l'ensemble A dans un segment se prolonge en une application continue g de l'ensemble X sur cet intervalle. On peut supposer qu'il s'agit de l'intervalle $[-1, 1]$. La fonction g se définit comme la somme d'une série de fonctions continues $g_k: X \to \mathsf{R}$ qui vérifient les conditions

$$|g_k(x)| \leqslant 2^{k-1}/3^k \quad \text{si} \quad x \in X, \tag{3}$$

$$\left|f(x) - \sum_0^k g_i(x)\right| < (2/3)^k \quad \text{si} \quad x \in A. \tag{4}$$

Les fonctions g_k se définissent par récurrence. En guise de g_0, nous prenons la fonction nulle et, supposant les fonctions $g_0, \ldots, g_n$ construites de manière à satisfaire les inégalités (3) et (4) pour $k \leqslant n$, définissons g_{n+1} en appliquant le lemme précédent à la fonction $\varphi = f - \sum_0^n (g_i|_A)$ avec $F = A$ et $L = (2/3)^n$. Il découle de (3) que la suite $\sum_0^\infty g_k$ converge uniformément sur X, de sorte que sa somme est continue (voir 4.12), tandis que (4) implique $g|_A = f$.

Nous servant de la démonstration de la première partie du théorème, remplaçons la droite R par l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ qui lui est homéomorphe. D'après ce que nous venons de démontrer, pour une fonction continue donnée $f: A \to]-1, 1[$, il existe certainement une fonction continue $g: X \to [-1, 1]$ telle que $g(x) = f(x)$ pour $x \in A$. Posons $B = g^{-1}(-1) \cup g^{-1}(1)$. Les ensembles B et A sont fermés et disjoints, de sorte que le couple B, A possède une fonction

d'Urysohn. Multiplions-la par g. Nous obtiendrons alors le prolongement cherché $X \to]-1, 1[$ de la fonction f.

12. Si A est un sous-ensemble fermé d'un espace normal X, chaque application continue $A \to \mathsf{R}^n$ se prolonge en une application continue $X \to \mathsf{R}^n$. Dans cet énoncé l'espace R^n peut être remplacé par le cube.

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème *11* aux fonctions coordonnées de l'application donnée.

6. Axiomes de dénombrabilité

1. Le *deuxième axiome de dénombrabilité* affirme l'existence d'une base dénombrable dans l'espace considéré. Le *premier axiome de dénombrabilité* dit que l'espace possède une base dénombrable en chaque point. Un espace E est dit *séparable* s'il existe une partie dénombrable P de E partout dense dans E.

2. Le deuxième axiome de dénombrabilité implique le premier et la condition de séparabilité. Pour les espaces métriques le premier axiome de dénombrabilité est toujours vérifié, tandis que le deuxième est équivalent à la séparabilité.

Le premier axiome de dénombrabilité découle du premier d'une manière évidente, et s'obtient facilement (voir 2.6) pour les espaces métriques. Pour construire dans un espace à base dénombrable un sous-espace dénombrable partout dense, il suffit de choisir un point dans chaque ensemble de la base dénombrable. Une base dénombrable dans un espace métrique séparable peut être constituée par les boules ouvertes de centres en les points de l'ensemble dénombrable partout dense et de rayons $1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

3. Les espaces R^n et l_2 sont séparables et possèdent donc une base dénombrable.

Dans R^n un sous-ensemble dénombrable partout dense est constitué, par exemple, par les suites $\{x_i\}_1^n$ avec x_i rationnels; dans l_2 un tel ensemble est constitué par les suites presque partout nulles $\{x_i\}_1^\infty$ (i.e. possédant un nombre fini de termes non nuls), où les nombres x_i sont rationnels.

4. Une partie d'un espace à base dénombrable possède une base dénombrable. En particulier, tous les sous-espaces des espaces R^n et l_2 possèdent une base dénombrable.

En effet, une base dénombrable d'un sous-espace s'obtient en prenant son intersection avec les éléments de la base dénombrable de l'espace; voir 3.2.

5. Dans un espace séparable toute famille de sous-ensembles ouverts deux à deux disjoints est dénombrable.

En effet, en prenant dans chaque ensemble d'une telle famille un point quelconque d'un ensemble S dénombrable partout dense, nous obtenons une bijection de cette famille sur S.

6. Il est évident qu'une application continue d'un espace topologique sur un autre fait correspondre un ensemble partout dense à un ensemble partout dense. Par ailleurs, une application ouverte d'un espace topologique dans un autre applique une base dans une base, et une base en un point dans une base en l'image de ce point. Par conséquent, l'image d'un espace séparable par une application continue est un espace séparable, de plus, l'image par une application ouverte d'un espace vérifiant le premier ou le second axiome de dénombrabilité satisfait le même axiome de dénombrabilité.

7. Tout espace régulier à base dénombrable est normal.

Démonstration. Soient A, B des sous-ensembles fermés disjoints d'un espace régulier X à base dénombrable. D'après le deuxième énoncé de l'axiome T_3, chaque point de chacun des ensembles A, B possède un voisinage dont l'adhérence n'a pas de points communs avec l'autre ensemble. Les recouvrements ouverts des ensembles A, B ainsi obtenus peuvent être supposés dénombrables puisqu'ils peuvent être remplacés par des recouvrements inscrits constitués par les ensembles de la base dénombrable (voir 1.13). Numérotons-les dans l'ordre suivant: $U_1, U_2, \ldots$; $V_1, V_2, \ldots$ et posons $U'_n = U_n \setminus \bigcup_1^{n-1} \mathrm{Cl}\, V_i$, $V'_n = V_n \setminus \bigcup_1^n \mathrm{Cl}\, U_i$ Les ensembles $U = \bigcup_1^\infty U'_n$, $V = \bigcup_1^\infty V'_n$ sont ouverts et évidemment disjoints, et comme $\mathrm{Cl}\, U_i \cap B = \varnothing$, $\mathrm{Cl}\, V_i \cap A = \varnothing$, alors $U \supset A$, $V \supset B$.

Théorèmes de plongement et de métrisabilité

8. Tout espace régulier à base dénombrable peut être plongé dans l_2.

Démonstration. Soit X un espace régulier à base dénombrable Γ. Numérotons les couples (U, V) avec $U \in \Gamma$, $V \in \Gamma$ et $\mathrm{Cl}\, U \subset V$ dans l'ordre (U_1, V_1), (U_2, V_2), ... et définissons l'application $f\colon X \to l_2$ par la formule $f(x) = \{k^{-1}\varphi_k(x)\}_1^\infty$, où φ_k est une fonction d'Urysohn du couple $\mathrm{Cl}\, U_k$, $X \setminus V_k$ (voir 7). Lorsque $x \neq y$, d'après la régularité de l'espace X, il existe un k tel que $x \in U_k$ et $y \in X \setminus V_k$. Ainsi l'application f est injective. Nous montrerons que f est un plongement.

Puisque les fonctions φ_k sont continues, pour $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ et n donnés, il existe un voisinage U du point x_0 tel que $\sum_1^n (|\varphi_k(x) - \varphi_k(x_0)|/k)^2 < \varepsilon^2/2$ dès que $x \in U$. En choisissant n de manière à vérifier la condition $\sum_{n+1}^\infty k^{-2} < \varepsilon^2/2$, nous voyons que $\mathrm{dist}\,(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Par conséquent l'application f est continue.

Désignons par g l'application inverse de l'application ab f: $X \to f(X)$ et trouvons pour un point donné $y_0 \in f(X)$ et un voisinage donné U du point $g(y_0)$ un nombre n tel que $g(y_0) \in U_n$, $V_n \subset U$. Lorsque $y \in f(X)$ et $\mathrm{dist}\,(y_0, y) < 1/n$, on a évidemment $|\varphi_n(g(y)) -$

$- \varphi_n (g (y_0)) | < 1$. Puisque $\varphi_n (g (y_0)) = 0$, la dernière inégalité est équivalente à l'inégalité $\varphi_n (g (y)) < 1$ qui implique à son tour $g (y) \in V_n$. Ainsi, lorsque $y \in f (X)$ et $\operatorname{dist} (y_0, y) < 1/n$, on a $g (y) \in U$. Par conséquent, l'application g est continue.

9. Un espace topologique à base dénombrable est métrisable si, et seulement si, il est régulier.

La nécessité de cette condition est contenue dans 5.6, sa suffisance dans *8*.

7. Compacité

1. Un espace topologique est dit *compact* si chacun de ses recouvrements ouverts contient un sous-recouvrement fini. Par exemple, un ensemble fini muni d'une topologie quelconque est compact, par contre un ensemble infini muni de la topologie discrète ne l'est pas.

Il est clair qu'un sous-espace d'un espace topologique X est compact si et seulement si chacun de ses recouvrements ouverts dans X contient un recouvrement fini.

2. Un sous-ensemble fermé d'un espace compact est compact.

Démonstration. Soient A un sous-ensemble fermé d'un espace compact X et Δ son recouvrement dans X. Ajoutons à Δ l'ensemble $X \setminus A$, choisissons dans le recouvrement ouvert obtenu de X un recouvrement fini et éliminons-en le dernier ensemble $X \setminus A$ (au cas où il n'a pas encore été éliminé). Il est clair que nous obtiendrons alors un recouvrement fini de l'ensemble A contenu dans Δ.

3. Dans un espace de Hausdorff, deux sous-ensembles compacts disjoints quelconques possèdent des voisinages disjoints.

Démonstration. Soient A, B tels ensembles. Si B est un point, fixons pour chaque point $x \in A$ des voisinages disjoints U_x, V_x des points x, B et choisissons dans le recouvrement ainsi obtenu de l'ensemble A par les voisinages U_x un recouvrement fini $U_{x_1}, \ldots, U_{x_s}$; les ensembles $\bigcup_1^s U_{x_i}$ et $\bigcap_1^s V_{x_i}$ seront alors des voisinages disjoints de l'ensemble A et du point B. Dans le cas général, nous fixons pour chaque point $x \in B$ des voisinages disjoints U_x, V_x de l'ensemble A et du point x et choisissons dans le recouvrement obtenu de l'ensemble B par les voisinages V_x un recouvrement fini $V_{x_1}, \ldots, V_{x_s}$; les ensembles $\bigcap_1^s U_{x_i}$, $\bigcup_1^s V_{x_i}$ seront alors des voisinages disjoints des ensembles A, B.

4. Un sous-ensemble compact d'un espace de Hausdorff est fermé.

En effet, il découle de *3* que tout point d'un espace de Hausdorff qui n'appartient pas à un ensemble compact possède un voisinage sans points communs avec cet ensemble.

5. Un espace de Hausdorff compact est normal.

Ceci découle de *2* et *3*.

Compacité et recouvrements fondamentaux

6. Si A est un sous-ensemble compact d'un espace X vérifiant l'axiome T_1, *chaque recouvrement fondamental dénombrable de X contient un recouvrement fini de A.*

Démonstration. Soit $U_1, U_2, \ldots$ le recouvrement envisagé. Si A n'est recouvert par aucun des ensembles $\bigcup_1^m U_i$, alors nous pouvons choisir un point dans chacun des ensembles $A \setminus \bigcup_1^m U_i$; ces points constitueraient un ensemble infini qui aurait avec chacun des ensembles U_i un nombre fini de points communs. Puisque ces intersections sont finies, l'ensemble considéré et tous ses sous-ensembles seraient fermés ; il serait donc compact (voir *2*) et discret à la fois, ce qui est en contradiction avec le fait qu'il est infini.

7. La condition de dénombrabilité dans le théorème *6* est essentielle. Par exemple, le recouvrement d'un intervalle fermé par tous les sous-ensembles dénombrables est fondamental mais ne possède pas de sous-recouvrement dénombrable.

Compacité et applications

8. L'image d'un espace compact par une application continue est compacte.

Démonstration. Soient f une application continue d'un espace compact X sur un espace topologique Y et Δ un recouvrement ouvert de Y. Les ensembles $f^{-1}(V)$, pour $V \in \Delta$, constituent un recouvrement ouvert Γ de X ; il est clair que si $U_1, \ldots, U_s$ est un sous-recouvrement de Γ, alors $f(U_1), \ldots, f(U_s)$ est un sous-recouvrement du recouvrement Δ.

9. Toute application continue d'un espace compact dans un espace de Hausdorff est fermée.

Ceci découle de *2*, *8* et *4*.

10. Une application continue bijective d'un espace compact sur un espace de Hausdorff est un homéomorphisme. Une application injective continue d'un espace compact dans un espace de Hausdorff est un plongement.

Ceci découle de la proposition *9* et du fait évident qu'une application bijective fermée est un homéomorphisme.

Compacité et distance

11. Un sous-espace compact d'un espace métrique peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε quel que soit ε positif.

Un tel recouvrement peut être choisi dans un recouvrement quelconque composé de boules ouvertes de rayon ε.

12. Tout espace métrique compact possède une base dénombrable.

Pour obtenir une telle base, il suffit de construire, pour chaque entier positif n, un recouvrement fini constitué de boules ouvertes de rayon $1/n$ et prendre la réunion de ces recouvrements.

13. Tout espace métrique compact est borné.

Ceci découle de *11*.

14. Si X est un espace topologique compact, alors toute fonction continue $X \to \mathbf{R}$ est bornée et prend ses valeurs maximale et minimale.

Démonstration. Le fait que l'image de X est bornée dans $\mathbf{R}$ découle de *8* et de *13*. D'après *9* cette image est fermée, ce qui entraîne à son tour qu'elle contient tous ses points d'adhérence parmi lesquels doivent se trouver sa borne inférieure et sa borne supérieure.

15. Soient A et B des sous-ensembles disjoints d'un espace métrique. Si A est compact et B fermé, on a $\operatorname{Dist}(A, B) > 0$.

Démonstration. Puisque A est compact et $\operatorname{Dist}(x, B)$ est une fonction continue en $x \in A$ (voir 4.13), il existe un point $a \in A$ tel que $\operatorname{Dist}(a, B) = \inf_{x \in A} \operatorname{Dist}(x, B) = \operatorname{Dist}(A, B)$ (voir *14*). Puisque B est fermé et $a \notin B$, on a $\operatorname{Dist}(a, B) > 0$, d'où $\operatorname{Dist}(A, B) > 0$.

16. Soient f une application continue d'un espace métrique X dans un espace topologique Y et Δ un recouvrement ouvert de Y. Si X est compact, il existe un nombre positif ε tel que pour tout ensemble $A \subset X$ de diamètre inférieur à ε, l'ensemble $f(A)$ est contenu dans un élément de Δ.

Il suffit de montrer que pour un certain $\varepsilon > 0$ deux points quelconques $x, y \in X$ tels que $\operatorname{dist}(x, y) < \varepsilon$ sont situés dans un même ensemble du recouvrement $\Gamma = f^{-1}(\Delta)$. Considérons la boule de centre en le point $x \in X$, contenue dans un des ensembles du recouvrement Γ ; désignons par U_x la boule ouverte concentrique de rayon deux fois plus petit et choisissons, dans le recouvrement de X par les boules U_x, le recouvrement $U_{x_1}, \ldots, U_{x_s}$. Soit ε_i le rayon de la boule U_{x_i} et ε le plus petit des nombres ε_i. Si $x, y \in X$ et $\operatorname{dist}(x, y) < \varepsilon$, on a $\operatorname{dist}(x_i, x) < \varepsilon_i$ et $\operatorname{dist}(x_i, y) < \operatorname{dist}(x_i, x) + \operatorname{dist}(x, y) < 2\varepsilon_i$ pour un certain i, de sorte que x et y sont situés dans un même élément du recouvrement Γ.

Compacité dans l'espace euclidien

17. Les cubes de l'espace $\mathbf{R}^n$ sont compacts.

Démonstration. Un cube de l'espace $\mathbf{R}^n$ se décompose d'une manière évidente en 2^n cubes; lorsqu'un recouvrement Γ du cube donné par des ensembles ouverts de l'espace $\mathbf{R}^n$ ne contient pas de recouvrement fini, alors il doit jouir de la même propriété relativement à un des petits cubes choisi de manière appropriée. En répétant ce raisonnement, nous construirons une suite décroissante de cubes $Q_1, Q_2, \ldots$, chacun desquels est deux

fois plus petit que le précédent et dont aucun ne peut être recouvert par une famille finie d'ensembles de Γ. Pourtant le point commun de ces cubes se recouvre par un élément de Γ qui doit donc recouvrir également les cubes Q_k pour k suffisamment grand.

18. Un sous-espace de l'espace R^n *est compact si, et seulement si, il est borné et fermé.*

La nécessité de ces conditions est contenue dans *13* et *4*. Sa suffisance découle de *17* et *2*, puisque des sous-ensembles bornés de l'espace R^n sont contenus dans un cube.

Compacité locale

19. Un espace topologique est appelé *localement compact* lorsque chacun de ses points possède un voisinage à adhérence compacte.

Il est évident que les espaces compacts sont localement compacts. L'espace le plus important localement compact non compact est R^n pour $n > 0$.

20. Les sous-ensembles fermés d'un espace localement compact sont localement compacts.

En effet, si a est un point d'un sous-ensemble fermé A d'un espace localement compact X, et U un voisinage du point a dans X à adhérence compacte $\mathrm{Cl}_X U$, alors $U \cap A$ est un voisinage du point a dans A à adhérence compacte $\mathrm{Cl}_A (U \cap A)$. (La compacité de l'adhérence $\mathrm{Cl}_A (U \cap A)$ découle du fait que cet ensemble est fermé dans $\mathrm{Cl}_X U$(voir *2*), ce qui à son tour est une conséquence du fait qu'il est fermé dans X.)

21. Les sous-ensembles ouverts d'un espace de Hausdorff localement compact sont localement compacts.

Démonstration. Soit a un point d'un sous-ensemble ouvert A d'un espace de Hausdorff localement compact X; supposons que U est un voisinage du point a dans X à adhérence compacte $\mathrm{Cl}_X U$. Puisque l'espace $\mathrm{Cl}_X U$ est régulier (voir *5*), le point a possède dans cet espace un voisinage V tel que $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X U} V \subset U \cap A$. Nous montrerons que V est un voisinage du point a dans A à adhérence compacte $\mathrm{Cl}_A V$.

Le fait que l'ensemble V est ouvert dans A découle de ce qu'il est ouvert dans $U \cap A$, ce qui à son tour est une conséquence du fait qu'il est ouvert dans $\mathrm{Cl}_X U$. Pour établir la compacité de l'ensemble $\mathrm{Cl}_A V$, notons que l'adhérence $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X U} V$ est compacte (voir *2*) et située dans $U \cap A$. Ceci implique que cette adhérence coïncide avec $\mathrm{Cl}_{U \cap A} V$ et que cette dernière est fermée dans A (voir *4*), ce qui à son tour implique l'égalité $\mathrm{Cl}_{U \cap A} V = \mathrm{Cl}_A V$.

22. Soit U un voisinage d'un point a d'un espace localement compact X. Si X est un espace de Hausdorff, a possède un voisinage à adhérence compacte contenue dans U.

Démonstration. Puisque l'espace U est localement compact (voir *21*), le point a y possède un voisinage à adhérence compacte; soit V un tel voisinage. Puisque U est ouvert, V l'est aussi dans X. L'adhérence de V dans U étant compacte et l'espace X un espace de Hausdorff, l'adhérence de l'ensemble V dans U est fermée dans X (voir *4*) et donc coïncide avec l'adhérence de V dans X. Ainsi V est le voisinage cherché.

23. Les espaces de Hausdorff localement compacts sont réguliers. Ceci découle de *22*.

Information: paracompacité

24. Un espace de Hausdorff est dit *paracompact* si l'on peut inscrire un recouvrement ouvert localement fini dans chacun de ses recouvrements ouverts. Sont paracompacts les espaces de Hausdorff compacts (ce qui est évident) et tous les espaces métriques. Les sous-ensembles fermés d'un espace paracompact sont paracompacts. Tous les espaces paracompacts sont normaux. Pour les détails voir [11].

On peut montrer qu'un espace paracompact recouvert par des ensembles ouverts métrisables est lui-même métrisable; voir [13].

§ 2. CONSTRUCTIONS

1. Sommes

1. La somme $\sqcup_{\mu\in M} X_\mu$ d'une famille d'espaces topologiques $\{X_\mu\}_{\mu\in M}$ devient elle-même un espace topologique si l'on déclare ouverts (resp. fermés) tous ses sous-ensembles dont les images inverses par toutes les applications $\mathrm{in}_\nu: X_\nu \to \sqcup X_\mu$ sont ouvertes (resp. fermées). Il est clair que chacune des applications $\mathrm{in}_\nu: X_\nu \to \sqcup X_\mu$ est un plongement et que les images $\mathrm{in}_\nu(X_\nu)$ sont à la fois ouvertes et fermées dans $\sqcup X_\mu$.

Soient $\{Y_\mu\}$ une autre famille d'espaces topologiques indexée par le même ensemble M, et $f_\mu: X_\mu \to Y_\mu$ des applications continues. L'application $\sqcup f_\mu: \sqcup X_\mu \to \sqcup Y_\mu$ est évidemment aussi continue.

2. Si tous les espaces X_μ vérifient un des axiomes T_1, T_2, T_3, T_4, leur somme vérifie le même axiome; il en va de même pour le premier axiome de dénombrabilité, ainsi que de la compacité locale et de la métrisabilité (si les espaces X_μ sont métriques, l'espace $\sqcup X_\mu$ peut être transformé en un espace métrique en posant:

$\mathrm{dist}(\mathrm{in}_\nu(x), \mathrm{in}_{\nu'}(x')) = 1$, si $\nu \neq \nu'$ ou si $\nu = \nu'$ et $\mathrm{dist}(x, x') \geqslant 1$;

$\mathrm{dist}(\mathrm{in}_\nu(x), \mathrm{in}_\nu(x')) = \mathrm{dist}(x, x')$ si $\nu = \nu'$ et $\mathrm{dist}(x, x') < 1$).

Si chacun des espaces X_μ possède une base dénombrable et l'ensemble M est dénombrable, alors la somme possède également

une base dénombrable; il en est de même pour la séparabilité. Enfin, si chacun des espaces est compact et l'ensemble M est fini, alors la somme est compacte.

2. Produits

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des espaces topologiques. Munissons l'ensemble $X_1 \times \ldots \times X_n$ d'une topologie en prenant pour base la famille de tous les ensembles $U_1 \times \ldots \times U_n \subset X_1 \times \ldots \times X_n$ où les $U_1, \ldots, U_n$ sont des ouverts dans $X_1, \ldots, X_n$. Les conditions de la proposition 1.1.8 sont vérifiées en vertu de la formule $(U'_1 \times \ldots \times U'_n) \cap (U''_1 \times \ldots \times U''_n) = (U'_1 \cap U''_1) \times \ldots \times (U'_n \cap U''_n)$. L'espace topologique obtenu s'appelle *produit des espaces* $X_1, \ldots, X_n$.

Il est évident que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des sous-espaces des espaces $X_1, \ldots, X_n$, alors la topologie du produit $A_1 \times \ldots \times A_n$ coïncide avec celle qui est induite par l'inclusion $A_1 \times \ldots \times A_n \subset X_1 \times \ldots \times X_n$.

Nous avons déjà considéré certains produits sans le mentionner. Ainsi R^n est le produit de n copies de la droite R de même que I^n est le produit de n copies du segment I.

Le produit de l'espace topologique X par I est appelé *cylindre sur* X.

2. Le produit des espaces est commutatif et associatif: on a les homéomorphismes canoniques évidents suivants: $X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$ et $(X_1 \times X_2) \times X_3 \to X_1 \times (X_2 \times X_3)$. On a de même $(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n = X_1 \times \ldots \times X_n$.

En outre, la multiplication est distributive relativement à la somme: il existe un homéomorphisme canonique évident $X \times (\sqcup_{\mu \in M} Y_\mu) \to \sqcup_{\mu \in M} (X \times Y_\mu)$.

3. Si les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ *sont ouverts dans* $X_1, \ldots, X_n$, *l'ensemble* $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ *est ouvert dans* $X_1 \times \ldots \times X_n$. *Si* $A_1, \ldots, A_n$ *sont fermés,* A *l'est aussi. Dans tous les cas* $\mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Cl}\, A_1 \times \ldots \times \mathrm{Cl}\, A_n$.

La première assertion découle immédiatement de la définition de la topologie dans $X_1 \times \ldots \times X_n$, la deuxième est une conséquence de la troisième; démontrons donc celle-ci. Le point $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ est un point d'adhérence de l'ensemble A si et seulement si l'intersection d'un voisinage quelconque $U_1 \times \ldots \times U_n$ de la base en ce point avec A est non vide, i.e. si les intersections des voisinages $U_1, \ldots, U_n$ quelconques des points $x_1, \ldots, x_n$ avec les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont non vides, autrement dit lorsque les points $x_1, \ldots, x_n$ sont des points d'adhérence des ensembles $A_1, \ldots, A_n$. Ainsi $\mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Cl}\, A_1 \times \ldots \times \mathrm{Cl}\, A_n$.

4. Il est évident que les projections $\mathrm{pr}_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ sont continues et ouvertes pour des espaces topologiques $X_1, \ldots, X_n$ quelconques.

Les ensembles de la forme $x_1^0 \times \ldots \times x_{i-1}^0 \times X_i \times x_{i+1}^0 \times \ldots \times x_n^0$ pour $x_j^0 \in X_j$ $(j \neq i)$ sont appelés *fibres* du produit $X_1 \times \ldots \times X_n$. Il est clair que la restriction de la projection pr_i: $X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ à la fibre $x_1^0 \times \ldots \times x_{i-1}^0 \times X_i \times x_{i+1}^0 \times \ldots \times x_n^0$ est un homéomorphisme. Ainsi les fibres sont canoniquement homéomorphes aux facteurs.

A chaque application f: $Y \to X_1 \times \ldots \times X_n$, où $Y, X_1, \ldots, X_n$ sont des ensembles quelconques, correspondent les applications $\mathrm{pr}_i \circ f$: $Y \to X_i$; pour des applications quelconques f_i: $Y \to X_i$ il existe une seule application f: $Y \to X_1 \times \ldots \times X_n$ telle que $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$. Il est évident que si $Y, X_1, \ldots, X_n$ sont des espaces topologiques, alors l'application f est continue si et seulement si toutes les applications $\mathrm{pr}_i \circ f$ le sont.

Il découle en particulier de cette dernière assertion que l'application diag: $X \to X \times X$ est continue pour tout espace topologique X. Notons le fait évident suivant: la diagonale diag (X) est fermée si et seulement si l'espace X est un espace de Hausdorff.

5. Il est clair que le produit $f_1 \times \ldots \times f_n$: $X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times \ldots \times Y_n$ des applications continues f_1: $X_1 \to Y_1, \ldots, f_n$: $X_n \to Y_n$ est continu. Il est également clair que le produit $f_1 \times \ldots \times f_n$ des applications ouvertes $f_1, \ldots, f_n$ est une application ouverte.

6. Si X est un espace métrique, on a évidemment

$$|\operatorname{dist}(x_1', x_2') - \operatorname{dist}(x_1, x_2)| \leqslant \operatorname{dist}(x_1', x_1) + \operatorname{dist}(x_2', x_2)$$

quels que soient les points x_1, x_2, x_1', x_2' de X. Cette inégalité montre que la fonction dist: $X \times X \to \mathbf{R}$ est continue.

Propriétés du produit

7. Le produit d'espaces vérifiant T_1 *est un espace du même type. Le produit d'espaces de Hausdorff est également un espace de Hausdorff. Le produit d'espaces réguliers est régulier.*

Les deux premières assertions sont évidentes; montrons que le produit des T_3-espaces $X_1, \ldots, X_n$ est un espace du même type. Soit U un voisinage du point $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $X_1 \times \ldots \times X_n$. Trouvons d'abord pour les points $x_1, \ldots, x_n$ des voisinages $U_1, \ldots, U_n$ tels que $U_1 \times \ldots \times U_n \subset U$, et ensuite des voisinages $V_1, \ldots, V_n$ tels que $\mathrm{Cl}\, V_1 \subset U_1, \ldots, \mathrm{Cl}\, V_n \subset U_n$. Puisque

$$\mathrm{Cl}\,(V_1 \times \ldots \times V_n) = \mathrm{Cl}\, V_1 \times \ldots \times \mathrm{Cl}\, V_n$$

(voir *3*), on a $\mathrm{Cl}\,(V_1 \times \ldots \times V_n) \subset U$.

Information. Le produit d'espaces normaux n'est pas nécessairement normal; voir [14].

8. Si $S_1, \ldots, S_n$ sont des sous-ensembles partout denses d'espaces $X_1, \ldots, X_n$, l'ensemble $S_1 \times \ldots \times S_n$ est évidemment

partout dense dans $X_1 \times \ldots \times X_n$. Par conséquent, *le produit d'espaces séparables est un espace séparable.*

Si $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ sont des bases d'espaces $X_1, \ldots, X_n$, les ensembles $U_1 \times \ldots \times U_n$, $U_1 \in \Gamma_1, \ldots, U_n \in \Gamma_n$, constituent une base de l'espace $X_1 \times \ldots \times X_n$. Par conséquent, *le produit d'espaces à base dénombrable possède une base dénombrable.*

Si $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ sont des bases d'espaces $X_1, \ldots, X_n$ aux points $x_1, \ldots, x_n$, les ensembles $U_1 \times \ldots \times U_n$, $U_1 \in \Gamma_1, \ldots, U_n \in \Gamma_n$, constituent une base de l'espace $X_1 \times \ldots \times X_n$ au point $(x_1, \ldots, x_n)$. Par conséquent, *le produit d'espaces vérifiant le premier axiome de dénombrabilité le vérifie également.*

9. Le produit d'espaces métrisables est métrisable.

De plus, si les espaces $X_1, \ldots, X_n$ ont une structure d'espace métrique, alors le produit $X_1 \times \ldots \times X_n$ se munit d'une telle structure à l'aide de la formule canonique $\operatorname{dist}((x_1, \ldots, x_n), (x'_1, \ldots, x'_n)) = [\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{dist}(x_i, x'_i))^2]^{1/2}$.

10. Le produit d'espaces compacts est compact.

Il suffit d'effectuer la démonstration dans le cas de deux espaces. Soient X, Y des espaces compacts et Γ un recouvrement ouvert de l'espace $X \times Y$. Inscrivons dans Γ un recouvrement Δ constitué par des ensembles ouverts de la forme $U \times V$ (voir 1.1.13). Puisque les fibres $x \times Y$ sont homéomorphes à Y, tandis que Y est compact, on peut indiquer, pour chaque point $x \in X$, une famille finie $\Delta_x = \{U_i(x) \times V_i(x)\}_{i=1}^{n(x)}$ qui constitue une partie du recouvrement Δ et qui recouvre entièrement $x \times Y$ (voir 1.7.2); en outre on peut admettre que chacun des ensembles $U_i(x)$ contient x. Puisque les ensembles $U_x = \bigcap_{i=1}^{n(x)} U_i(x)$ sont ouverts et recouvrent X, et X est compact, nous voyons que X est recouvert par une famille finie $U_{x_1}, \ldots, U_{x_m}$; il est donc clair que $\Delta' = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_{x_i}$ est un recouvrement de l'espace $X \times Y$. En remplaçant chacun de ces ensembles par l'élément du recouvrement Γ qui le contient, nous obtiendrons un sous-recouvrement fini du recouvrement Γ.

11. Le produit d'espaces localement compacts est localement compact.

Démonstration. Si $U_1, \ldots, U_n$ sont des points $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$, alors $U_1 \times \ldots \times U_n$ est le voisinage du point $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $X_1 \times \ldots \times X_n$ dont l'adhérence $\operatorname{Cl}(U_1 \times \ldots \times U_n)$ coïncide avec $\operatorname{Cl} U_1 \times \ldots \times \operatorname{Cl} U_n$ (voir *3*); elle est donc compacte, puisque les ensembles $\operatorname{Cl} U_1, \ldots, \operatorname{Cl} U_n$ le sont (voir *10*).

Application pratique: une méthode de construction d'applications continues

12. La proposition *14* ci-dessous permet d'établir la continuité de certaines applications, dans des situations qui ressemblent à celle

envisagée dans le théorème 1.4.3, lorsque ce dernier est inapplicable.

13 (Lemme). *Soit $f: X \times Q \to Z$ une application continue qui envoie la fibre $x_0 \times Q$ en un point. Si l'espace Q est compact, il existe pour tout voisinage W du point $f(x_0 \times Q)$, un voisinage U du point x_0 tel que $f(U \times Q) \subset W$.*

Démonstration. Choisissons pour chaque point $q \in Q$ un voisinage U_q du point x_0 et un voisinage V_q du point q tels que $f(U_q \times V_q) \subset W$. Si l'espace Q est compact, il se recouvre par une famille finie $V_{q_1}, \ldots, V_{q_s}$ et il suffit de poser $U = \bigcap_{i=1}^{s} U_{q_i}$.

14. Soient X, Y, Z, Q des espaces topologiques, A une partie de X, B un fermé de Y et $f: X \times Q \to Z$, $g: Y \to X$ des applications continues telles que les ensembles $f(x \times Q)$, $x \in A$, se réduisent à un point et $g(B) \subset A$. Si Q est compact, pour toute application continue $\varphi: Y \setminus B \to Q$ l'application $h: Y \to Z$ définie par la formule

$$h(y) = \begin{cases} f(g(y), \varphi(y)) & si \quad y \in Y \setminus B, \\ f(g(y) \times Q) & si \quad Y \in B \end{cases}$$

est continue.

Démonstration. La continuité de h aux points de l'ensemble $Y \setminus B$ est évidente; vérifions-la au point $y \in B$. D'après le lemme *13*, pour chaque voisinage W du point $h(y)$ il existe un voisinage U du point $g(y)$ pour lequel $f(U \times Q) \subset W$. Il découle de cette dernière inclusion que $h(g^{-1}(U)) \subset W$; il ne reste qu'à remarquer que $g^{-1}(U)$ est un voisinage du point y.

Information

15. La définition du produit d'espaces topologiques s'étend évidemment au cas où le nombre de facteurs est infini; le produit d'espaces compacts est toujours compact. Pour les détails voir [3].

3. Espaces quotients

1. L'ensemble quotient $X/\mathfrak{f}$ d'un espace topologique X par une partition $\mathfrak{f}$ se munit d'une topologie naturelle: un ensemble est ouvert (resp. fermé) lorsque son image inverse par l'application $\mathrm{pr}: X \to X/\mathfrak{f}$ est ouverte (resp. fermée). Cette topologie naturelle s'appelle *topologie quotient* et l'ensemble $X/\mathfrak{f}$ muni de la topologie quotient est appelé *espace quotient de l'espace X par la partition* $\mathfrak{f}$.

Il est clair que l'application $\mathrm{pr}: X \to X/\mathfrak{f}$ est continue.

Dans le cas particulier où tous les éléments de la partition $\mathfrak{f}$, sauf l'élément unique A, sont des points, l'espace $X/\mathfrak{f}$ est appelé *espace quotient de l'espace X par A*; on le désigne par X/A.

2. Il découle de la définition de la topologie quotient que, quels que soient des espaces topologiques X, Y, leurs partitions $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$ et une application continue $f: X \to Y$ qui envoie les éléments de la partition $\mathfrak{f}$ dans des éléments de la partition $\mathfrak{t}$, l'application fact f: $X/\mathfrak{f} \to Y/\mathfrak{t}$ est continue. En effet, si U est un ouvert dans $Y/\mathfrak{t}$,

l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{pr}^{-1}(U))$ est ouvert dans X, d'où l'on tire, d'après l'égalité $f^{-1}(\mathrm{pr}^{-1}(U)) = \mathrm{pr}^{-1}((\mathrm{fact}\, f)^{-1}(U))$, que l'ensemble $(\mathrm{fact}\, f)^{-1}(U)$ est ouvert dans $X/\mathfrak{f}$.

Si les éléments d'une partition $\mathfrak{t}$ sont des points séparés, alors $Y/\mathfrak{t} = Y$, tandis que $\mathrm{pr}: Y \to Y/\mathfrak{t}$ est l'identité. Dans ce cas la correspondance $f \mapsto \mathrm{fact}\, f$ détermine une bijection entre les applications continues $X \to Y$ constantes sur les éléments de la partition $\mathfrak{f}$ et les applications continues $X/\mathfrak{f} \to Y$.

3. Il découle en particulier du précédent que la continuité d'une application $f: X \to Y$ implique celle de son quotient injectif $\mathrm{fact}\, f: X/\mathrm{zer}\,(f) \to Y$. La réciproque est également vraie. Chaque application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y peut être représentée comme la composée des applications $X \xrightarrow{\mathrm{pr}} X/\mathrm{zer}\,(f) \xrightarrow{\mathrm{fact}\, f} Y$ et donc la continuité de $\mathrm{fact}\, f$ implique celle de f.

4. Une application continue dont le quotient injectif est un homéomorphisme est dite *décomposable*. Définition équivalente : une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est décomposable si d'une part $f(X) = Y$ et d'autre part l'image inverse $f^{-1}(B)$ de l'ensemble B est ouverte si et seulement si B est ouvert. Une autre définition équivalente s'obtient en remplaçant dans ce dernier énoncé les ensembles ouverts par des fermés.

On conçoit aisément que la composée de deux applications décomposables est décomposable et que leur quotient injectif est un homéomorphisme. De même, si une application f est décomposable et la composée $g \circ f$ continue, l'application g est continue ; si une application f est continue et la composée $g \circ f$ décomposable, g est décomposable.

La classe la plus importante d'applications décomposables est celle des projections sur les espaces quotients. Une condition suffisante — pas trop fine — pour qu'une application $f: X \to Y$, $f(X) = Y$, soit décomposable est qu'elle soit ouverte (resp. fermée).

5. Le passage aux espaces quotients est transitif : si $\mathfrak{f}$ est une partition d'un espace X, et $\mathfrak{f}'$ une partition de l'espace $X/\mathfrak{f}$, alors l'espace quotient $(X/\mathfrak{f})/\mathfrak{f}'$ est canoniquement homéomorphe à $X/\mathfrak{t}$, où $\mathfrak{t}$ est la décomposition de l'espace X en images inverses des éléments de la partition $\mathfrak{f}'$ par la projection $X \to X/\mathfrak{f}$. On définit l'homéomorphisme canonique comme étant le quotient injectif de la projection composée $X \to X/\mathfrak{f} \to (X/\mathfrak{f})/\mathfrak{f}'$; le fait que celle-ci est effectivement un homéomorphisme découle du fait qu'elle est décomposable (voir *4*).

6. Si des ensembles A, B constituent un recouvrement fondamental d'un espace X, l'application

$$\mathrm{fact}\,[\mathrm{in}: A \to X]: A/A \cap B \to X/B$$

est un homéomorphisme.

Pour la démonstration, il suffit d'établir que l'ensemble $V = [\mathrm{pr}: X \to X/B]^{-1}$ (fact in (U)) est ouvert dans X lorsque U est un ouvert de l'espace quotient $A/A \cap B$. Mais ceci découle des égalités

$$V \cap A = [\mathrm{pr}: A \to A/A \cap B]^{-1}(U),$$

$$V \cap B = \begin{cases} B & \text{si } \mathrm{pr}(A \cap B) \in U, \\ \varnothing & \text{si } \mathrm{pr}(A \cap B) \notin U. \end{cases}$$

Propriétés des espaces quotients

7. Il est évident qu'un espace quotient $X/\mathfrak{f}$ vérifie l'axiome T_1 si et seulement si les éléments de la partition $\mathfrak{f}$ sont fermés ; il est un espace de Hausdorff si et seulement si deux éléments quelconques de la partition $\mathfrak{f}$ possèdent des voisinages disjoints saturés. Si dans cette dernière condition on remplace un de ces éléments de $\mathfrak{f}$ par un ensemble fermé saturé, on obtiendra une condition équivalente à l'axiome T_3 pour $X/\mathfrak{f}$; en remplaçant ces deux éléments de $\mathfrak{f}$ par des ensembles fermés saturés on obtient une condition équivalente à l'axiome T_4 pour $X/\mathfrak{f}$.

Il est également clair que $X/\mathfrak{f}$ possède une base dénombrable si et seulement si X contient une famille dénombrable d'ensembles ouverts saturés telle que chaque ouvert saturé se représente sous forme de réunion d'une certaine sous-famille de cette famille.

Il découle de 1.6.6 qu'un espace quotient d'un espace séparable est également séparable.

Il découle de 1.7.8 que l'espace quotient d'un espace compact est toujours compact.

Le cas des partitions fermées

8. Une partition $\mathfrak{f}$ d'un espace X est dite *fermée* si $\mathrm{pr}: X \to X/\mathfrak{f}$ est une application fermée. Condition équivalente : le saturé d'un ensemble fermé quelconque est fermé.

Il est clair qu'une partition dont un seul élément est un ensemble ayant plus d'un point est fermée lorsque cet ensemble est fermé.

9. L'espace quotient d'un T_1*-espace par une partition fermée est un espace du même type. L'espace quotient d'un espace normal par une partition fermée est normal.*

La première proposition est évidente et il suffit donc de démontrer que $X/\mathfrak{f}$ est un T_4-espace lorsque $\mathfrak{f}$ est une partition fermée d'un T_4-espace X. Soient F_1, F_2 des fermés disjoints saturés dans X. X étant normal, les ensembles F_1, F_2 possèdent des voisinages disjoints. Puisque la partition $\mathfrak{f}$ est fermée, les saturés des complémentaires de ces voisinages sont fermés et donc les complémentaires de ces saturés sont des voisinages disjoints saturés des ensembles F_1, F_2.

Le cas des partitions ouvertes

10. Une partition $\mathfrak{f}$ d'un espace X est dite *ouverte* si $\mathrm{pr}: X \to X/\mathfrak{f}$ est une application ouverte. Enoncé équivalent: les saturés des ouverts sont ouverts.

Si $\mathfrak{f}$ est une partition ouverte et A un ensemble saturé, le saturé de l'ensemble $\mathrm{Int}\, A$ est ouvert et coïncide par conséquent avec $\mathrm{Int}\, A$; en passant aux complémentaires, on voit que le saturé de l'ensemble $\mathrm{Cl}\, A$ coïncide avec $\mathrm{Cl}\, A$. Ainsi, dans le cas d'une partition ouverte, l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble saturé sont des ensembles saturés.

Il découle de 1.6.6 que l'espace quotient, par une partition ouverte, d'un espace qui vérifie le premier ou le second axiome de dénombrabilité vérifie le même axiome de dénombrabilité.

11. Si $\mathfrak{f}$ *et* $\mathfrak{t}$ *sont des partitions ouvertes d'espaces* X *et* Y, *l'espace* $(X/\mathfrak{f}) \times (Y/\mathfrak{t})$ *est canoniquement homéomorphe à l'espace quotient* $(X \times Y)/(\mathfrak{f} \times \mathfrak{t})$.

L'homéomorphisme canonique se définit comme le quotient injectif de l'application $\mathrm{pr} \times \mathrm{pr}: X \times Y \to (X/\mathfrak{f}) \times (Y/\mathfrak{t})$; le fait que ce quotient est effectivement un homéomorphisme découle du fait que l'application $\mathrm{pr} \times \mathrm{pr}$ est ouverte (voir 2.5).

4. Recollements

1. Nous appellerons *recollement* l'opération sur des espaces topologiques obtenue en composant les opérations de somme et de quotient. Plus exactement, si $\{X_\mu\}_{\mu \in M}$ est une famille d'espaces topologiques et $\mathfrak{f}$ une partition de l'espace $X = \sqcup X_\mu$, nous dirons que l'espace quotient $X/\mathfrak{f}$ s'obtient des espaces X_μ par recollement par $\mathfrak{f}$. L'application composée

$$X_\nu \xrightarrow{\mathrm{in}_\nu} X \xrightarrow{\mathrm{pr}} X/\mathfrak{f}$$

s'appelle *ν-ième immersion* ; elle sera désignée par imm_ν. Il est clair que les ensembles $\mathrm{imm}_\mu (X_\mu)$ constituent un recouvrement fondamental de l'espace $X/\mathfrak{f}$ et que l'application f de l'espace $X/\mathfrak{f}$ dans un espace topologique quelconque est continue si et seulement si toutes les compositions $f \circ \mathrm{imm}_\mu$ le sont.

Somme

2. Soit $\{X_\mu\}_{\mu \in M}$ une famille d'espaces topologiques. Supposons qu'on a fait correspondre à chaque couple $(\mu, \mu') \in M \times M$ un ensemble $A_{\mu\mu'} \subset X_\mu$ et une application bijective $\varphi_{\mu\mu'} : A_{\mu\mu'} \to$

$\to A_{\mu'\mu}$ telle que (i) $A_{\mu\mu} = X_\mu$ et $\varphi_{\mu\mu} = \mathrm{id}\, X_\mu$ pour chaque $\mu \in \mathrm{M}$; (ii) $\varphi_{\mu\mu'}(A_{\mu\mu'} \cap A_{\mu\mu''}) = A_{\mu'\mu} \cap A_{\mu'\mu''}$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A_{\mu\mu'} \cap A_{\mu\mu''} \arrow[rr, "ab\varphi_{\mu\mu'}"] \arrow[dr, "ab\varphi_{\mu\mu''}"'] & & A_{\mu'\mu} \cap A_{\mu'\mu''} \arrow[dl, "ab\varphi_{\mu'\mu''}"] \\
& A_{\mu''\mu} \cap A_{\mu''\mu'} &
\end{tikzcd}$$

est commutatif quels que soient μ, μ', $\mu'' \in \mathrm{M}$. Désignons par B_x pour $x \in \sqcup X_\mu$ le sous-ensemble de l'espace $\sqcup X_\mu$ constitué par les points $\mathrm{in}_\mu(\varphi_{\nu\mu}(x))$ pour lesquels $A_{\nu\mu} \ni x$. Les ensembles distincts B_x sont disjoints deux à deux et constituent une partition de l'espace $\sqcup X_\mu$. L'espace quotient correspondant s'appelle *somme des espaces X_μ pour les applications $\varphi_{\mu\mu'}$*.

Il est clair que cette construction est un cas particulier du recollement, à savoir le cas où toutes les immersions imm_μ sont injectives. On voit tout aussi facilement que tous les imm_μ sont des plongements si tous les $\varphi_{\mu\mu'}$ sont des homéomorphismes et en outre tous les $A_{\mu\mu'}$ sont ouverts ou tous les $A_{\mu\mu'}$ sont fermés.

Dans le cas général la somme de T_1-espaces est évidemment un espace du même type.

3. La construction de la somme s'applique souvent dans la situation où les espaces X_μ sont des parties d'un ensemble X et constituent son recouvrement, tandis que $A_{\mu\mu'}$ et $\varphi_{\mu\mu'}$ sont définis par les formules $A_{\mu\mu'} = X_\mu \cap X_{\mu'}$, $\varphi_{\mu\mu'} = \mathrm{id}$. Dans cette situation, les conditions *2* (i), *2* (ii) sont vérifiées automatiquement et la réunion des espaces X_μ s'identifie à X muni d'une topologie pour laquelle l'ensemble C est ouvert (resp. fermé) si et seulement si pour chaque $\mu \in \mathrm{M}$ l'intersection $C \cap X_\mu$ est ouverte (resp. fermée) dans X_μ.

Notons le cas particulier où la topologie dans les ensembles X_μ est induite par une certaine topologie donnée a priori dans X. Notre construction détermine dans ce cas une nouvelle topologie dans X. Il est clair que les ensembles ouverts (resp. fermés) pour l'ancienne topologie sont également ouverts (resp. fermés) pour la nouvelle. On voit également que si toutes les intersections $X_\mu \cap X_{\mu'}$ sont ouvertes dans les ensembles X_μ correspondants (munis de la topologie originale), alors la nouvelle topologie dans X induit dans chaque X_μ la même topologie; il en est de même, si toutes les intersections $X_\mu \cap X_{\mu'}$ sont fermées dans les X_μ correspondants.

Limites et filtrations

4. Soient X_0, X_1, ... des espaces topologiques et $\varphi_0 : X_0 \to X_1$, $\varphi_1 : X_1 \to X_2$, ... des plongements. Posons

$$A_{kk'} = \begin{cases} \varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_{k'}(X_{k'}) & \text{si } k' < k, \\ X_k & \text{si } k' \geqslant k; \end{cases}$$

$$\varphi_{kk'} = \begin{cases} \mathrm{ab}\,(\varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_{k'}) & \text{si } k' < k, \\ \mathrm{id}\, X_k & \text{si } k' = k, \\ [\mathrm{ab}\,(\varphi_{k'-1} \circ \ldots \circ \varphi_k)]^{-1} & \text{si } k' > k. \end{cases}$$

Il est évident que les conditions *2* (i) et *2* (ii) sont vérifiées, de sorte que la somme des espaces X_k est définie. Cette somme s'appelle *limite de la suite* $\{X_k, \varphi_k\}$ ou plus brièvement *limite de la suite* $\{X_k\}$; on la désigne par $\lim (X_k, \varphi_k)$ ou $\lim X_k$.

Une des propriétés spécifiques de la limite consiste en ce que toutes les applications $\mathrm{imm}_k : X_k \to \lim X_k$ sont des plongements. Démonstration : chaque ensemble fermé A d'un espace X_k est l'image inverse par l'application imm_k d'un ensemble fermé de l'espace $\lim X_k$, par exemple, l'image inverse de l'ensemble

$$\bigcup_{k'=k+1}^{\infty} \mathrm{imm}_{k'}\,(\mathrm{Cl}\, X_{k'}\,(\varphi_{k'-1} \circ \ldots \circ \varphi_k\,(A))).$$

Il est clair que si l'ensemble $\varphi_k\,(X_k)$ est ouvert (resp. fermé) dans X_{k+1} quel que soit k, tous les ensembles $\mathrm{imm}_k\,(X_k)$ sont ouverts (resp. fermés) dans $\lim (X_k, \varphi_k)$.

Soit $\{X'_k, \varphi'_k : X'_k \to X'_{k+1}\}$ une autre suite d'espaces topologiques et de plongements. Pour chaque k on donne une application continue $f_k : X_k \to X'_k$ telle que tous les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "\varphi_k"] & X'_k \arrow[d, "\varphi'_k"] \\ X_{k+1} \arrow[r, "f_{k+1}"] & X'_{k+1} \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. La formule $f\,(\mathrm{imm}_k\,(x)) = \mathrm{imm}_k\,(f_k\,(x))$ définit une application continue $f : \lim (X_k, \varphi_k) \to \lim (X'_k, \varphi'_k)$; voir 3.2. Cette application s'appelle *limite de la suite* f_1, f_2, ... ; on la note $\lim f_k$.

5. Si X_0, X_1, ... *sont des* T_1*-espaces, chaque sous-ensemble compact de l'espace* $\lim X_k$ *est contenu dans un des ensembles* $\mathrm{imm}_k\, X_k$.

Ceci découle de 1.7.6.

6. Si les espaces X_0, X_1, ... *sont normaux et, quel que soit* k, *l'ensemble* $\varphi_k\,(X_k)$ *est fermé dans* X_{k+1}, *l'espace* $\lim (X_k, \varphi_k)$ *est normal.*

Démonstration. Puisque nous savons déjà que $\lim(X_k, \varphi_k)$ est un T_1-espace (voir *2*), il suffit d'établir que deux sous-ensembles disjoints fermés A, B de cet espace possèdent une fonction d'Urysohn (voir 1.5.9). Pour l'établir on construira une suite de fonctions $f_k: \mathrm{imm}_k(X_k) \to I$ telles que f_k est une fonction d'Urysohn du couple $A \cap \mathrm{imm}_k(X_k)$, $B \cap \mathrm{imm}_k(X_k)$ et $f_{k+1}|_{\mathrm{imm}_k(X_k)} = f_k$.

En guise de f_0 nous pouvons prendre une fonction d'Urysohn quelconque du couple $A \cap \mathrm{imm}_0(X_0)$, $B \cap \mathrm{imm}_0(X_0)$. La fonction $f_{k+1}: \mathrm{imm}_{k+1}(X_{k+1}) \to I$ peut être construite d'après la fonction f_k comme le prolongement de la fonction $g_k: [\mathrm{imm}_k(X_k)] \cup [A \cap \mathrm{imm}_{k+1}(X_{k+1})] \cup [B \cap \mathrm{imm}_{k+1}(X_{k+1})] \to I$ définie par la formule

$$g_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{si } x \in \mathrm{imm}_k(X_k), \\ 0 & \text{si } x \in A \cap \mathrm{imm}_{k+1}(X_{k+1}), \\ 1 & \text{si } x \in B \cap \mathrm{imm}_{k+1}(X_{k+1}) \end{cases}$$

(voir 1.5.11). Le fait que les fonctions g_k sont continues découle de ce que les ensembles $\mathrm{imm}_k(X_k)$, $A \cap \mathrm{imm}_{k+1}(X_{k+1})$, $B \cap \mathrm{imm}_{k+1}(X_{k+1})$ sont fermés (voir 1.4.3), ce qui découle à son tour du fait que les ensembles $\varphi_k(X_k)$, $\varphi_{k+1}(X_{k+1})$, ... sont fermés.

7. Une suite X_0, X_1, ... de sous-ensembles d'un espace topologique X s'appelle *filtration* si, premièrement, $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ et, deuxièmement, les ensembles X_k constituent un recouvrement fondamental de l'espace X.

D'après la première condition, sont définies les inclusions in: $X_k \to X_{k+1}$ et la limite $\lim(X_k, \mathrm{in})$, tandis que la deuxième condition revient à demander que l'application $X \to \lim(X_k, \mathrm{in})$ qui coïncide sur X_k avec $\mathrm{imm}_k: X_k \to \lim(X_k, \mathrm{in})$ soit un homéomorphisme. Cet homéomorphisme canonique permet d'identifier $\lim(X_k, \mathrm{in})$ avec X.

Attachements

8. Soient X_1, X_2 des espaces topologiques, C une partie de X_1 et $\varphi: C \to X_2$ une application continue. Désignons par $\mathfrak{f}$ la partition de la somme $X_1 \sqcup X_2$ constituée, d'une part, par les points des ensembles $\mathrm{in}_1(X_1 \setminus C)$ et $\mathrm{in}_2(X_2 \setminus \varphi(C))$ et, d'autre part, par les ensembles $\mathrm{in}_1(\varphi^{-1}(x)) \cup \mathrm{in}_2(x)$ pour $x \in \varphi(C)$. L'espace quotient $(X_1 \sqcup X_2)/\mathfrak{f}$ est désigné par $X_2 \cup_\varphi X_1$; on dit qu'il est obtenu *en attachant l'espace X_1 à l'espace X_2 par l'application* φ.

Il est clair que cette construction est un cas particulier du recollement et que $\mathrm{imm}_2: X_2 \to X_2 \cup_\varphi X_1$ est un plongement.

Si X_2 est un point, alors $X_2 \cup_\varphi X_1$ est canoniquement homéomorphe à l'espace quotient X_1/C. L'homéomorphisme canonique $X_1/C \to X_2 \cup_\varphi X_1$ se définit comme fact $[\mathrm{imm}_1: X_1 \to X_2 \cup_\varphi X_1]$.

9. Si les espaces X_1, X_2 sont normaux et l'ensemble C est fermé, l'espace $X_2 \cup_\varphi X_1$ est normal.

Démonstration. Puisque nous savons déjà que $X_2 \cup_\varphi X_1$ est un T_1-espace (voir *2*), il suffit d'établir que deux quelconques sous-ensembles disjoints fermés A, B de l'espace $X_2 \cup_\varphi X_1$ possèdent une fonction d'Urysohn. Soit $f_2 : X_2 \to I$ la fonction d'Urysohn du couple $\mathrm{imm}_2^{-1}(A)$, $\mathrm{imm}_2^{-1}(B)$. Définissons la fonction $g : C \cup [\mathrm{imm}_1^{-1}(A)] \cup [\mathrm{imm}_1^{-1}(B)] \to I$ en posant

$$g(x) = \begin{cases} f_2(\varphi(x)) & \text{si } x \in C, \\ 0 & \text{si } x \in \mathrm{imm}_1^{-1}(A), \\ 1 & \text{si } x \in \mathrm{imm}_1^{-1}(B) \end{cases}$$

et prolongeons-la en une fonction continue $f_1 : X_1 \to I$ (voir 1.5.11). Il est clair que la fonction $X_2 \cup_\varphi X_1 \to I$ définie par la formule

$$y \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{si } y = \mathrm{imm}_1(x) \quad [x \in X_1], \\ f_2(x) & \text{si } y = \mathrm{imm}_2(x) \quad [x \in X_2] \end{cases}$$

est une fonction d'Urysohn du couple A, B.

5. Espaces projectifs

1. Dans ce sous-paragraphe nous envisageons les espaces projectifs réels, complexes, de quaternions et de Cayley. Ils peuvent servir d'exemples illustrant les définitions précédentes, mais ils sont importants par eux-mêmes.

Le corps des nombres complexes sera désigné par $\mathbf{C}$, le corps (non commutatif) des quaternions par $\mathbf{H}$, l'algèbre des nombres de Cayley par $\mathbf{Ca}$. Les espaces à n dimensions correspondants, i.e. les produits de n copies $\mathbf{C} \times \ldots \times \mathbf{C}$, $\mathbf{H} \times \ldots \times \mathbf{H}$, $\mathbf{Ca} \times \ldots \times \mathbf{Ca}$ seront désignés par $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{H}^n$, $\mathbf{Ca}^n$. Puisqu'un nombre complexe est un couple de nombres réels, un quaternion, un quadruplet et un nombre de Cayley un octet de nombres réels, on identifie naturellement $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{H}^n$, $\mathbf{Ca}^n$ avec $\mathbf{R}^{2n}$, $\mathbf{R}^{4n}$, $\mathbf{R}^{8n}$ et, en particulier, ces espaces possèdent une topologie et une structure d'espace métrique naturelle. Les opérations vectorielles dans $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{H}^n$, $\mathbf{Ca}^n$ (addition et multiplication à gauche et à droite par des scalaires) sont continues pour cette topologie.

2. L'espace projectif réel de dimension n est l'espace quotient de la sphère S^n par sa partition en couples de points diamétralement opposés. Notation : $\mathbf{R}P^n$. Cet espace peut être décrit d'une manière équivalente comme l'espace quotient de la boule D^n par la partition dont les éléments sont, d'une part, les points intérieurs de la boule et, d'autre part, les couples de points diamétralement opposés de sa frontière S^{n-1}. L'homéomorphisme canonique qui permet d'identifier ces espaces quotients est fact f, où f est l'applicaton de la boule

D^n dans S^n définie par la formule $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2})$.

Les points de l'espace $\mathsf{R}P^n$ se trouvent en bijection naturelle avec les droites de l'espace R^{n+1} qui passent par le point $0 = (0, \ldots, 0)$ (au couple de points x, $-x \in S^n$ correspond la droite qui passe par x et $-x$). L'ensemble de toutes ces droites, muni d'une distance angulaire (la distance entre deux droites est l'angle qu'elles forment, inférieur ou égal à $\pi/2$), est un espace métrique ; il est clair que l'application naturelle mentionnée de l'espace $\mathsf{R}P^n$ sur cet espace est un homéomorphisme. Ceci nous donne une troisième description de l'espace $\mathsf{R}P^n$. La quatrième, basée sur la notion de coordonnées, s'obtient en remarquant qu'une droite passant par l'origine est déterminée par l'un quelconque de ces points (autre que l'origine), et que les coordonnées de deux points (sauf l'origine) de cette droite sont proportionnelles. Ceci permet d'interpréter les points de l'espace $\mathsf{R}P^n$ comme étant des classes de suites $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ non nulles réelles proportionnelles ; un point déterminé par la suite $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ sera désigné par $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ et les nombres $x_1, \ldots, x_{n+1}$ s'appellent *coordonnées homogènes* de ce point. La topologie de l'espace $\mathsf{R}P^n$ se décrit en termes de coordonnées homogènes d'une manière évidente.

3. Toutes les descriptions de l'espace $\mathsf{R}P^n$ indiquées ci-dessus peuvent être répétées pour le cas des nombres complexes et nous amènent à quatre descriptions équivalentes de l'*espace projectif complexe* $\mathsf{C}P^n$ *de dimension n*. Première description : $\mathsf{C}P^n$ est l'espace quotient de la sphère unité S^{2n+1} de l'espace C^{n+1} par la partition de cette dernière en cercles, obtenus par intersection de cette sphère avec les droites (complexes) de l'espace C^{n+1} qui passent par le point 0. Deuxième description : $\mathsf{C}P^n$ est l'espace quotient de la boule unité D^{2n} de l'espace C^n par la partition dont les éléments sont, d'une part, les points intérieurs de la boule et, d'autre part, les cercles obtenus par intersection de sa frontière S^{2n-1} avec les droites de l'espace C^n qui passent par le point 0 ; l'homéomorphisme canonique permettant d'identifier cet espace quotient avec le précédent est fact f, où f est l'application de la boule D^{2n} dans S^{2n+1} définie par la formule

$$(x_1, \ldots, x_{2n}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{2n}, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{2n}^2}, 0).$$

Troisième description : $\mathsf{C}P^n$ est l'ensemble des droites de l'espace C^{n+1} qui passent par 0, avec la topologie de la distance angulaire. Quatrième description : $\mathsf{C}P^n$ est l'espace des classes de suites complexes non nulles proportionnelles (au sens complexe) $(x_1, \ldots, x_{n+1})$.

La notation $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ introduite dans *2* peut être appliquée au cas complexe ; les nombres $x_1, \ldots, x_{n+1}$ s'appellent, comme dans le cas réel, *coordonnées homogènes du point* $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$.

4. Le corps des quaternions n'étant pas commutatif, il faut distinguer dans l'espace H^n les droites à gauche et les droites à droite. Une fois la distinction faite, tout ce qui a été dit dans *3* peut être automatiquement répété pour le cas des quaternions, et nous obtiendrons quatre descriptions équivalentes de l'*espace projectif des quaternions* $\mathsf{H}P^n$ (*à gauche ou à droite*) *de dimension n*. Puisque l'anti-automorphisme du groupe multiplicatif du corps H défini par la formule $x \mapsto x^{-1}$ établit une bijection entre les droites à gauche et les droites à droite, l'espace $\mathsf{H}P^n$ à droite est canoniquement homéomorphe à l'espace correspondant à gauche.

Par la suite nous allons toujours envisager H^n comme un espace vectoriel à gauche, dont $\mathsf{H}P^n$ sera toujours l'espace projectif à gauche.

5. Le fait que l'algèbre de Cayley n'est pas associative ne permet pas de définir d'une façon satisfaisante les droites dans l'espace Ca^n lorsque $n > 2$. Dans le plan de Cayley Ca^2, la droite qui passe par l'origine (0, 0) peut être définie comme l'ensemble $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = cx_1\}$ pour $c \in \mathsf{Ca}$ et, en outre, il existe une droite verticale $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0\}$. Il est clair que ces droites sont des sous-espaces de dimension huit lorsque Ca^2 est identifié à R^{16} et que chaque point du plan Ca^2, différent de (0, 0), appartient précisément à l'une d'elles. Ces droites coupent la sphère S^{15} en des sphères de dimension sept, et nous pouvons définir la *droite projective de Cayley* $\mathsf{Ca}P^1$ comme l'espace quotient de la sphère S^{15} par cette partition en sphères de dimension sept. Trois autres descriptions de cette droite projective sont identiques, à des modifications évidentes près, à ce qui a été dit dans *2*, *3*, *4*. Quant au *plan projectif de Cayley* $\mathsf{Ca}P^2$ il est possible de le définir comme l'espace quotient de la boule D^{16} par la partition dont les éléments sont les points intérieurs de cette boule et les sphères de dimension sept que nous venons de décrire. Des descriptions du plan $\mathsf{Ca}P^2$ dans le sens de *2*, *3*, *4* ne conviennent pas. On ne peut définir les espaces projectifs de Cayley pour les dimensions supérieures.

6. Les espaces $\mathsf{R}P^1$, $\mathsf{C}P^1$, $\mathsf{H}P^1$, $\mathsf{Ca}P^1$ sont canoniquement homéomorphes aux sphères S^1, S^2, S^4, S^8. L'homéomorphisme $\mathsf{R}P^1 \to S^1$ applique la droite $x_1 = 0$ dans ort_1, et la droite $x_2 = cx_1$ dans le point de la sphère « trouée » $S^1 \setminus \mathrm{ort}_1$ correspondant au nombre c par l'homéomorphisme $\mathsf{R}^1 \to S^1 \setminus \mathrm{ort}_1$ décrit dans 1.4.8. Les homéomorphismes $\mathsf{C}P^1 \to S^2$, $\mathsf{H}P^1 \to S^4$, $\mathsf{Ca}P^1 \to S^8$ se définissent de la même manière en remplaçant l'homéomorphisme $\mathsf{R}^1 \to S^1 \setminus \mathrm{ort}_1$ par les homéomorphismes $\mathsf{C}^1 = \mathsf{R}^2 \to S^2 \setminus \mathrm{ort}_1$, $\mathsf{H}^1 = \mathsf{R}^4 \to S^4 \setminus \mathrm{ort}_1$, $\mathsf{Ca}^1 = \mathsf{R}^8 \to S^8 \setminus \mathrm{ort}_1$.

7. Le plongement canonique de l'espace R^k dans R^{k+1} qui applique le point $(x_1, \ldots, x_k)$ dans le point $(x_1, \ldots, x_k, 0)$ permet d'identifier R^k avec le sous-espace $x_{k+1} = 0$ de l'espace R^{k+1} et peut ainsi être envisagé comme une inclusion. Il induit les inclusions $D^k \to D^{k+1}$, $S^{k-1} \to S^k$, $\mathsf{R}P^{k-1} \to \mathsf{R}P^k$, et de la même

manière les inclusions $\mathsf{C}^k \to \mathsf{C}^{k+1}$, $\mathsf{H}^k \to \mathsf{H}^{k+1}$ induisent les inclusions $\mathsf{C}P^{k-1} \to \mathsf{C}P^k$, $\mathsf{H}P^{k-1} \to \mathsf{H}P^k$.

Posons

$$\mathsf{R}^\infty = \lim \mathsf{R}^k, \quad \mathsf{C}^\infty = \lim \mathsf{C}^k, \quad \mathsf{H}^\infty = \lim \mathsf{H}^k,$$
$$D^\infty = \lim D^k, \quad S^\infty = \lim S^k,$$
$$\mathsf{R}P^\infty = \lim \mathsf{R}P^k, \quad \mathsf{C}P^\infty = \lim \mathsf{C}P^k, \quad \mathsf{H}P^\infty = \lim \mathsf{H}P^k.$$

Les points des espaces R^∞, C^∞ et H^∞ peuvent être naturellement identifiés avec les suites finies $\{x_k\}_1^\infty$ de nombres réels, complexes et de quaternions. La sphère S^∞ est contenue dans la boule D^∞ et celle-ci dans l'espace R^∞. Les espaces projectifs $\mathsf{R}P^\infty$, $\mathsf{C}P^\infty$, $\mathsf{H}P^\infty$ s'obtiennent de la sphère S^∞ et de la boule D^∞ en passant aux espaces quotients, qui sont les limites des quotients décrits dans *2*, *3*, *4*.

8. Les descriptions des espaces $\mathsf{C}P^n$, $\mathsf{H}P^n$ et $\mathsf{Ca}P^1$ sous forme d'espaces quotients de sphères définissent des projections $S^{2n+1} \to \mathsf{C}P^n$, $S^{4n+3} \to \mathsf{H}P^n$ et $S^{15} \to \mathsf{Ca}P^1$ qui jouent un rôle spécial. On les appelle *applications de Hopf*. Les plus intéressantes sont les applications $S^3 \to \mathsf{C}P^1 = S^2$, $S^7 \to \mathsf{H}P^1 = S^4$, $S^{15} \to \mathsf{Ca}P^1 = S^8$.

6. Constructions plus spéciales

1. Soit X un espace topologique. L'espace quotient $(X \times I)/(X \times 0)$ s'appelle *cône sur* X ; on le désigne par cône X. Le point pr $(X \times 0)$ s'appelle *sommet* du cône, l'ensemble pr $(X \times 1)$ est la *base* du cône et chacun des ensembles pr $(x \times I)$ pour $x \in X$ est la *génératrice* du cône. La base est liée à X par un homéomorphisme canonique et en général on l'identifie avec X. Les génératrices sont liées par des homéomorphismes canoniques avec I.

A chaque application f d'un espace X dans un autre espace topologique Y on peut faire correspondre l'application fact $(f \times \mathrm{id}\, I)$: cône $X \to$ cône Y qui est continue lorsque f l'est. On la désigne par cône f.

2. L'espace quotient du produit $X \times I$ par la partition dont les éléments sont les ensembles $X \times 0$ et $X \times 1$ ainsi que les points de l'ensemble $(X \times I) \setminus [(X \times 0) \cup (X \times 1)]$ est appelé *suspension sur* X ; on le désigne par su X. Les points pr $(X \times 0)$, pr $(X \times 1)$ s'appellent *sommets* de la suspension, l'ensemble pr $(X \times (1/2))$ est sa *base*, l'ensemble pr $(x \times I)$ (pour $x \in X$), sa *génératrice*. La base est liée par un homéomorphisme canonique évident avec X et chacune des génératrices avec I.

A chaque application $f: X \to Y$ correspond l'application fact$(f \times \mathrm{id}\, I)$: su $X \to$ su Y continue lorsque f l'est. On la désigne par su f.

Remarquons que la suspension su X peut être décrite d'une manière équivalente comme étant cône X/X.

3. Soient X_1, X_2 des espaces topologiques. L'espace quotient du produit $X_1 \times X_2 \times I$ par la partition dont les éléments sont les ensembles $x_1 \times X_2 \times 0$ (pour $x_1 \in X_1$) et $X_1 \times x_2 \times 1$ (pour $x_2 \in X_2$) ainsi que les points de l'ensemble $(X_1 \times X_2 \times I) \setminus [(X_1 \times X_2 \times 0) \cup (X_1 \times X_2 \times 1)]$, s'appelle *join* des espaces X_1, X_2; on le désigne par $X_1 * X_2$. Les ensembles pr $(X_1 \times X_2 \times 0)$, pr $(X_1 \times X_2 \times 1)$ s'appellent *bases* du join, tandis que les ensembles pr$(x_1 \times x_2 \times I)$, pour $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, sont les *génératrices* du join. Les bases sont liées avec X_1, X_2 par des homéomorphismes canoniques évidents et sont généralement identifiées avec ceux-ci. Les génératrices sont canoniquement homéomorphes à I d'une manière évidente.

Chaque couple d'applications $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ engendre l'application fact $(f_1 \times f_2 \times \mathrm{id}\ I) : X_1 * X_2 \to Y_1 * Y_2$ qui est continue lorsque f_1 et f_2 le sont. On la désigne par $f_1 * f_2$.

L'opération $*$ est commutative : on a un homéomorphisme canonique évident $X_1 * X_2 \to X_2 * X_1$.

Remarquons que le join $X_1 * X_2$ peut être défini de manière équivalente comme $(X_1 \sqcup X_2) \cup_\varphi (X_1 \times X_2 \times I)$, où φ est l'application du produit $X_1 \times X_2 \times (0 \cup 1)$ dans $X_1 \sqcup X_2$ pour $\varphi(x_1, x_2, 0) = \mathrm{in}_1(x_1)$, $\varphi(x_1, x_2, 1) = \mathrm{in}_2(x_2)$. Il est clair également que l'espace quotient du join $X_1 * X_2$ par sa partition dont les éléments sont les deux bases X_1, X_2 et les points du complémentaire $(X_1 * X_2) \setminus (X_1 \cup X_2)$ coïncide avec la suspension su $(X_1 \times X_2)$.

4. Le join itéré $(\ldots((X_1 * X_2) * X_3) \ldots) * X_n$ peut être canoniquement plongé dans le produit cône $X_1 \times \ldots \times$ cône X_n. Ce plongement est désigné par jc ou par $\mathrm{jc}_{X_1, \ldots, X_n}$ si l'on veut préciser les espaces concernés; on le définit par récurrence: pour $n = 1$ il applique $x_1 \in X_1$ dans pr $(x_1, 1) \in$ cône X_1; pour des entiers n plus grands, on l'obtient par la formule

$$\mathrm{jc}_{X_1, \ldots, X_n}(\mathrm{pr}\,(x, x_n, t)) = ((1-t)\,\mathrm{jc}_{X_1, \ldots, X_{n-1}}(x), \mathrm{pr}\,(x_n, t)),$$

où $x \in (\ldots((X_1 * X_2) * X_3) \ldots) * X_{n-1}$, $x_n \in X_n$ et $t \in I$, tandis que le produit d'un point de l'espace cône $X_1 \times \ldots \times$ cône X_{n-1} par $1 - t$ se définit par la règle $(1-t)$ (pr $(x_1, t_1), \ldots,$ pr $(x_{n-1}, t_{n-1})) =$ (pr $(x_1, (1-t)\,t_1), \ldots,$ pr $(x_{n-1}, (1-t)\,t_{n-1})$).

L'image du plongement $\mathrm{jc}_{X_1, \ldots, X_n}$ est évidemment l'ensemble $\{(\mathrm{pr}\,(x_1, t_1), \ldots, \mathrm{pr}\,(x_n, t_n)) \in$ cône $X_1 \times \ldots \times$ cône $X_n \mid t_1 + \ldots + t_n = 1\}$, ce qui permet d'identifier le join itéré $(\ldots((X_1 * X_2) * X_3) \ldots) * X_n$ avec cet ensemble.

5. L'opération $*$ est associative au sens usuel : le join $(X_1 * X_2) * X_3$ est canoniquement homéomorphe à $X_1 * (X_2 * X_3)$. L'homéomorphisme $X_1 * (X_2 * X_3) \to (X_1 * X_2) * X_3$ se définit comme la composée de l'homéomorphisme canonique $X_1 * (X_2 * X_3) \to (X_2 * X_3) *$

$* X_1$ et de l'abréviation correspondante de l'homéomorphisme canonique cône $X_2 \times$ cône $X_3 \times$ cône $X_1 \to$ cône $X_1 \times$ cône $X_2 \times$ cône X_3.

En vertu de l'associativité de l'opération $*$ pour des espaces topologiques quelconques $X_1, \ldots, X_n$, on peut définir le join itéré $X_1 * \ldots * X_n$.

6. Le produit cône $X_1 \times \ldots \times$ cône X_n *est canoniquement homéomorphe à* cône $(X_1 * \ldots * X_n)$.

L'homéomorphisme canonique cône $(X_1 * \ldots * X_n) \to$ cône $X_1 \times \ldots$ $\ldots \times$ cône X_n est déterminé par la formule

$$\mathrm{pr}\,(\mathrm{jc}^{-1}_{X_1,\ldots,X_n}(\mathrm{pr}\,(x_1, t_1), \ldots, \mathrm{pr}\,(x_n, t_n)), t) \mapsto$$

$$\mapsto (\mathrm{pr}\,(x_1, tt_1/\max(t_1, \ldots, t_n)), \ldots, \mathrm{pr}\,(x_n, tt_n/\max(t_1, \ldots, t_n))).$$

7. Les espaces cône S^m, su S^m *sont canoniquement homéomorphes à* D^{m+1}, S^{m+1}.

Les homéomorphismes canoniques cône $S^m \to D^{m+1}$, su $S^m \to S^{m+1}$ sont déterminés par les formules

$$\mathrm{pr}\,((x_1, \ldots, x_{m+1}), t) \mapsto (tx_1, \ldots, tx_{m+1}),$$

$$\mathrm{pr}\,((x_1, \ldots, x_{m+1}), t) \mapsto (x_1 \sin \pi t, \ldots, x_{m+1} \sin \pi t, \cos \pi t).$$

8. Il existe des homéomorphismes canoniques du join $X * D^0$ sur le cône cône X, *du join $X * S^0$ sur la suspension* su X, *du join $X * S^k$ sur la suspension itérée* $\mathrm{su}^{k+1} X$; *en particulier, le join $S^{m_1} * S^{m_2}$ est canoniquement homéomorphe à $S^{m_1+m_2+1}$.*

L'homéomorphisme canonique $X * D^0 \to$ cône X est donné par la formule $\mathrm{pr}\,(x, 0, t) \mapsto \mathrm{pr}\,(x, t)$, l'homéomorpisme canonique $X * S^0 \to$ su X par la formule $\mathrm{pr}\,(x, 1, t) \mapsto \mathrm{pr}\,(x, (1+t)/2)$, $\mathrm{pr}\,(x, -1, t) \mapsto \mathrm{pr}\,(x, (1-t)/2)$. L'homéomorphisme canonique $X * S^k \to \mathrm{su}^{k+1} X$ se définit comme la composée des applications

$$X * S^k \to \mathrm{su}\, X * S^{k-1} \to \ldots \to \mathrm{su}^k X * S^0 \to \mathrm{su}^{k+1} X,$$

dans laquelle la dernière flèche désigne l'homéomorphisme canonique, tandis que la r-ième flèche pour $r \leqslant k$ désigne l'homéomorphisme canonique composé

$$\mathrm{su}^{r-1} X * S^{k-r+1} \to \mathrm{su}^{r-1} X * \mathrm{su}\, S^{k-r} \to$$

$$\to \mathrm{su}^{r-1} X * S^{k-r} * S^0 \to \mathrm{su}^{r-1} X * S^0 * S^{k-r} \to \mathrm{su}^r X * S^{k-r}.$$

9. En prenant des combinaisons appropriées des homéomorphismes canoniques construits dans *6* à *8*, nous obtenons les homéomorphismes composés suivants:

$$S^{m_1} * \ldots * S^{m_n} \to S^{m_1} * \ldots * S^{m_{n-2}} * S^{m_{n-1}+m_n+1} \to \ldots$$

$$\to S^{m_1} * S^{m_2+\ldots+m_n+n-2} \to S^{m_1+\ldots+m_n+n-1}$$

$$D^{m_1} \times \ldots \times D^{m_n} \to \text{cône}\, S^{m_1-1} \times \ldots \times \text{cône}\, S^{m_n-1} \to$$

$$\to \text{cône}\,(S^{m_1-1} * \ldots * S^{m_n-1}) \to \text{cône}\, S^{m_1+\ldots+m_n-1} \to D^{m_1+\ldots+m_n},$$

$$D^{m_1} * \ldots * D^{m_n} \to \text{cône}\, S^{m_1-1} * \ldots * \text{cône}\, S^{m_n-1} \to$$
$$\to S^{m_1-1} * D^0 * \ldots * S^{m_n-1} * D^0 \to$$
$$\to \text{cône}\,(S^{m_1-1} * D^0 * \ldots * S^{m_{n-1}-1} * D^0 * S^{m_n-1}) \to$$
$$\to \text{cône}\, S^{m_1-1} \times \text{cône}\, D^0 \times \ldots \times \text{cône}\, S^{m_{n-1}-1} \times \text{cône}\, D^0 \times \text{cône}\, S^{m_n-1} \to$$
$$\to D^{m_1} \times I \times \ldots \times D^{m_{n-1}} \times I \times D^{m_n} \to$$
$$\to D^{m_1} \times D^1 \times \ldots \times D^{m_{n-1}} \times D^1 \times D^{m_n} \to D^{m_1+\ldots+m_n+n-1}.$$

Ainsi le join $S^{m_1} * \ldots * S^{m_n}$ est canoniquement homéomorphe à $S^{m_1+\ldots+m_n+n-1}$, le produit $D^{m_1} \times \ldots \times D^{m_n}$ est canoniquement homéomorphe à $D^{m_1+\ldots+m_n}$ et le join $D^{m_1} * \ldots * D^{m_n}$ est canoniquement homéomorphe à $D^{m_1+\ldots+m_n+n-1}$.

Cylindre et cône d'une application

10. Soit $f: X_1 \to X_2$ une application continue. Le résultat de l'attachement du produit $X_1 \times I$ à X_2, à l'aide de l'application $X_1 \times 1 \to X_2$ définie par la formule $(x, 1) \mapsto f(x)$, s'appelle *cylindre de l'application* f; on le désigne par Cyl f. Les ensembles $\text{imm}_1 (X_1 \times 0)$ et $\text{imm}_2 (X_2)$ sont appelés *bases supérieure* et *inférieure du cylindre* Cyl f tandis que les ensembles $\text{imm}_1 (x \times I)$ pour $x \in X_1$ sont ses *génératrices*. Les bases sont liées à X_1, X_2 par des homéomorphismes canoniques évidents, on les identifie donc en général avec X_1, X_2, tandis que les génératrices sont liées par des homéomorphismes canoniques évidents avec I. En outre, il existe une rétraction canonique $\text{rt}\, f: \text{Cyl}\, f \to X_2$ définie sur $\text{imm}_1 (X_1 \times I)$ par la formule

$$\text{rt}\, f\, (\text{imm}_1 (x, t)) = \text{imm}_1 (x, 1) \qquad [= f(x)],$$

et il est clair que la composée des applications $X_1 \xrightarrow{\text{in}} \text{Cyl}\, f \xrightarrow{\text{rt}\, f} X_2$ coïncide avec f.

Lorsque $X_2 = X_1$ et $f = \text{id}\, X_1$, l'espace Cyl f est canoniquement homéomorphe au cylindre $X_1 \times I$ sur X_1.

11. On appelle *cône d'une application continue* $f: X_1 \to X_2$ l'espace $X_2 \cup_f \text{cône}\, X_1$. Notation : Cône f (qu'il ne faut pas confondre avec cône dans I). Définition équivalente : Cône $f = \text{Cyl}\, f/X_1$.

7. Espaces d'applications continues

1. L'ensemble de toutes les applications continues d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est désigné par $\mathscr{C}(X, Y)$. L'ensemble des applications $\varphi \in \mathscr{C}(X, Y)$, qui vérifient les conditions $\varphi(A_1) \subset B_1, \ldots, \varphi(A_n) \subset B_n$, où les $A_1, \ldots, A_n$ sont des

sous-ensembles donnés de X et les $B_1, \ldots, B_n$ des sous-ensembles donnés de Y, est désigné par $\mathscr{C}(X, A_1, \ldots, A_n; Y, B_1, \ldots, B_n)$. On peut l'interpréter comme l'ensemble de toutes les applications continues $(X, A_1, \ldots, A_n) \to (Y, B_1, \ldots, B_n)$.

Nous allons munir l'ensemble $\mathscr{C}(X, Y)$ de la *topologie compacte ouverte*: c'est ainsi que l'on appelle la topologie dont la prébase est constituée par les ensembles de la forme $\mathscr{C}(X, A; Y, B)$, où A est compact et B ouvert. De même que $\mathscr{C}(X, Y)$, tous les ensembles $\mathscr{C}(X, A_1, \ldots, A_n; Y, B_1, \ldots, B_n)$ deviennent des espaces topologiques.

Si Y est un point, $\mathscr{C}(X, Y)$ est également un point. Si X est discret et se compose des points $x_1, \ldots, x_n$, $\mathscr{C}(X, Y)$ est canoniquement homéomorphe au produit de n facteurs $Y \times \ldots \times Y$; l'homéomorphisme canonique est défini par la formule $\varphi \mapsto (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$.

A chaque couple d'applications continues $f: X' \to X$, $g: Y \to Y'$ correspond l'application $\mathscr{C}(X, Y) \to \mathscr{C}(X', Y')$ définie par la formule $\varphi \mapsto g \circ \varphi \circ f$. Il est clair que cette application est continue; on la désigne par $\mathscr{C}(f, g)$.

2. Si Y est un espace de Hausdorff, l'espace $\mathscr{C}(X, Y)$ l'est aussi.

En effet, si $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(X, Y)$, $\varphi \neq \psi$, il existe un $x \in X$ tel que $\varphi(x) \neq \psi(x)$ et l'on voit que si U, V sont des voisinages disjoints des points $\varphi(x)$, $\psi(x)$, alors $\mathscr{C}(X, x; Y, U)$, $\mathscr{C}(X, x; Y, V)$ sont des voisinages disjoints des points φ, ψ.

3. Si X est un espace compact et Y métrisable, l'espace $\mathscr{C}(X, Y)$ est métrisable. Si Y est muni d'une distance, l'espace $\mathscr{C}(X, Y)$ devient espace métrique à l'aide de la formule $\operatorname{dist}(\varphi, \psi) = \sup_{x \in X} \operatorname{dist}(\varphi(x), \psi(x))$.

Démonstration. Si $\varphi \in \mathscr{C}(X, Y)$, l'ensemble $\varphi(X)$ se recouvre par un nombre fini de boules $U_1, \ldots, U_s$ d'un rayon ε aussi petit que l'on veut (voir 1.7.11) et donc $W = \bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{C}(X, \varphi^{-1}(U_i); Y, U_i)$ est un voisinage du point φ contenu dans une boule de rayon 2ε et de centre φ. Ainsi, chaque boule contient un certain voisinage de son centre.

D'autre part, si A est un sous-ensemble compact de X et B un sous-ensemble ouvert de Y et en outre $\varphi(A) \subset B$, alors l'ensemble $\mathscr{C}(X, A; Y, B)$ contient une boule de rayon $\operatorname{Dist}(\varphi(A), Y \setminus B)$ de centre φ (voir 1.7.15). Ainsi chaque voisinage du point φ choisi dans la prébase indiquée dans *1* contient une certaine boule de centre φ.

4. Pour des espaces topologiques quelconques $X, Y_1, \ldots, Y_n$ l'espace $\mathscr{C}(X, Y_1 \times \ldots \times Y_n)$ est canoniquement homéomorphe à $\mathscr{C}(X, Y_1) \times \ldots \times \mathscr{C}(X, Y_n)$.

L'homéomorphisme canonique $\mathscr{C}(X, Y_1 \times \ldots \times Y_n) \to \mathscr{C}(X, Y_1) \times \ldots \times \mathscr{C}(X, Y_n)$ fait correspondre à chaque point φ le point $(\mathrm{pr}_1 \circ \varphi, \ldots, \mathrm{pr}_n \circ \varphi)$ (cf. 2.4).

5. *Soit* $\mathfrak{f}$ *une partition fermée d'un espace de Hausdorff compact* X ; $\mathscr{C}$ (pr, id Y) : $\mathscr{C}(X/\mathfrak{f}, Y) \to \mathscr{C}(X, Y)$ *est un plongement, quel que soit l'espace topologique* Y.

Il suffit de démontrer que si A est un sous-ensemble compact de l'espace $X/\mathfrak{f}$ et B un sous-ensemble ouvert de Y, alors l'ensemble $\mathscr{C}$ (pr, id Y) $[\mathscr{C}(X/\mathfrak{f}, A ; Y, B)]$ est ouvert dans $\mathscr{C}$ (pr, id Y) $\times$ $\times [\mathscr{C}(X/\mathfrak{f}, Y)]$. Puisque l'espace $X/\mathfrak{f}$ est un espace de Hausdorff (voir 3.9), l'ensemble A est fermé, de même que l'ensemble $\mathrm{pr}^{-1}(A)$, qui est par conséquent compact. Ainsi l'ensemble $\mathscr{C}(X, \mathrm{pr}^{-1}(A) ; Y, B)$ est ouvert dans $\mathscr{C}(X, Y)$, et il ne reste qu'à montrer que $\mathscr{C}$ (pr, id Y) $[\mathscr{C}(X/\mathfrak{f}, A ; Y, B)] = \mathscr{C}(X, \mathrm{pr}^{-1}(A) ; Y, B) \cap \mathscr{C}$ (pr, id Y) $[\mathscr{C}(X/\mathfrak{f}, Y)]$.

Les applications $X \times Y \to Z$ et $X \to \mathscr{C}(Y, Z)$

6. *Soient* X, Y, Z *des espaces topologiques. Si une application* φ : $X \times Y \to Z$ *est continue, la formule* $[\check{\varphi}(x)](y) = \varphi(x, y)$ *définit une application continue* $\check{\varphi} : X \to \mathscr{C}(Y, Z)$. *Si une application* ψ : $X \to \mathscr{C}(Y, Z)$ *est continue et* Y *est un espace de Hausdorff localement compact, la formule* $\hat{\psi}(x, y) = [\psi(x)](y)$ *définit une application continue* $\hat{\psi} : X \times Y \to Z$.

Pour démontrer la première assertion, il suffit de construire, pour chaque point donné $x_0 \in X$, chaque ensemble compact donné $B \subset Y$ et chaque ensemble ouvert donné $C \subset Z$, un voisinage U du point x_0 tel que $\check{\varphi}(U) \subset \mathscr{C}(Y, B ; Z, C)$. Fixons pour chaque point $y \in B$ des voisinages U_y, V_y des points x_0, y tels que $\varphi(U_y \times V_y) \subset$ $\subset C$, et choisissons dans la famille $\{V_y\}_{y \in B}$ un recouvrement fini $V_{y_1}, \ldots, V_{y_s}$ de l'ensemble B. Il est clair que $U = \bigcap_{i=1}^{s} U_{y_i}$ est un voisinage du point x_0 et $\varphi(U \times B) \subset \bigcup_{i=1}^{s} \varphi(U_{y_i} \times V_{y_i}) \subset C$; il ne reste qu'à remarquer que l'inclusion $\varphi(U \times B) \subset C$ est équivalente à l'inclusion $\check{\varphi}(U) \subset \mathscr{C}(Y, B ; Z, C)$.

Pour démontrer la deuxième assertion, trouvons pour le point donné $(x_0, y_0) \in X \times Y$ et le voisinage donné W du point $\hat{\psi}(x_0, y_0)$ un voisinage V du point y_0 à adhérence compacte Cl V contenue dans $[\psi(x_0)]^{-1}(W)$ (voir 1.7.22), et choisissons ensuite un voisinage U du point x_0 de sorte que $\psi(U) \subset \mathscr{C}(Y, \mathrm{Cl}\, V ; Z, W)$. Il est clair que $U \times V$ est un voisinage du point (x_0, y_0) et que l'on a $\hat{\psi}(U \times$ $\times V) \subset W$.

7. *Une application* $\mathscr{C}(X \times Y, Z) \to \mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y, Z))$ *définie par la formule* $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ (voir 6) *est continue quels que soient les espaces topologiques* X, Y, Z. *Si* X *est un espace de Hausdorff et* Y *un espace de Hausdorff localement compact, cette application est un homéomorphisme pour lequel l'homéomorphisme inverse se définit par la formule* $\psi \mapsto \hat{\psi}$.

La continuité de l'application $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ découle du fait que l'image inverse de l'ensemble $\mathscr{C}(X, A; \mathscr{C}(Y, Z), \mathscr{C}(Y, B; Z, C))$ par cette application coïncide avec $\mathscr{C}(X \times Y, A \times B; Z, C)$. Dans l'hypothèse que X est un espace de Hausdorff et Y un espace de Hausdorff localement compact trouvons, pour un point donné $\psi_0 \in \mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y, Z))$, un compact donné Q de l'espace $X \times Y$, un voisinage donné W de l'ensemble $\hat{\psi}_0(Q)$ et un point donné $q \in Q$, un voisinage $U_q \times V_q$ du point q tel que $\hat{\psi}_0(U_q \times \mathrm{Cl}\, V_q) \subset W$. L'ensemble Q étant compact, ses images $\mathrm{pr}_1(Q)$, $\mathrm{pr}_2(Q)$ sont compactes dans X, Y (voir 1.7.8) et puisqu'elles sont des espaces de Hausdorff, de même que X, Y, elles sont normales (voir 1.7.5). Par conséquent, les ensembles $\mathrm{pr}_1(Q)$, $\mathrm{pr}_2(Q)$ contiennent des sous-ensembles ouverts U'_q, V'_q tels que

$$\mathrm{pr}_1(q) \in U'_q,\ \mathrm{Cl}_{\mathrm{pr}_1(Q)} U'_q \subset U_q\,;\ \mathrm{pr}_2(q) \in V'_q,\ \mathrm{Cl}_{\mathrm{pr}_2(Q)} V'_q \subset V_q,$$

et il est clair que les intersections $(U'_q \times V'_q) \cap Q$ sont ouvertes dans Q. Puisque Q est compact, on peut le recouvrir par une famille finie d'intersections de ce type, i.e. il admet un recouvrement de la forme $U'_{q_1} \times V'_{q_1}, \ldots, U'_{q_s} \times V'_{q_s}$, et nous posons

$$T = \bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{C}(X, \mathrm{Cl}_{\mathrm{pr}_1(Q)} U'_{q_i}; \mathscr{C}(Y, Z), \mathscr{C}(Y, \mathrm{Cl}_{\mathrm{pr}_2(Q)} V_{q_i}; Z, W).$$

Il est clair que T est un voisinage du point ψ_0 et que l'image de ce voisinage par l'application $\psi \mapsto \hat{\psi}$ est contenue dans $\mathscr{C}(X \times Y, Q; Z, W)$. Ainsi l'application $\psi \mapsto \hat{\psi}$ est continue ; le fait que les applications $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ et $\psi \mapsto \hat{\psi}$ sont inverses l'une de l'autre est évident.

Une application inattendue

8. Soit $f: X \to X'$ une application décomposable. Si Y est un espace de Hausdorff localement compact, l'application $f \times \mathrm{id}\, Y: X \times Y \to X' \times Y$ est décomposable.

Pour la démonstration, on peut supposer que $X' = X/\mathrm{zer}\,(f)$, tandis que f est la projection $X \to X/\mathrm{zer}\,(f)$. Considérons la projection $\mathrm{pr}: X \times Y \to (X \times Y)/(\mathrm{zer}\,(f) \times \mathrm{zer}\,(\mathrm{id}\, Y))$. L'application $\mathrm{pr}^\vee: X \to \mathscr{C}(Y, (X \times Y)/(\mathrm{zer}\,(f) \times \mathrm{zer}\,(\mathrm{id}\, Y)))$ étant constante sur les éléments de la partition $\mathrm{zer}\,(f)$, on obtient des applications continues

$$\mathrm{fact}\ \mathrm{pr}^\vee: X' \to \mathscr{C}(Y, (X \times Y)/(\mathrm{zer}\,(f) \times \mathrm{zer}\,(\mathrm{id}\, Y)))$$

et

$$(\mathrm{fact}\ \mathrm{pr}^\vee)^\wedge: X' \times Y \to (X \times Y)/(\mathrm{zer}\,(f) \times \mathrm{zer}\,(\mathrm{id}\, Y)).$$

Il est clair que cette dernière application est inverse du quotient injectif de l'application $f \times \mathrm{id}: X \times Y \to X' \times Y$.

Ainsi, le quotient injectif de l'application $f \times \mathrm{id}$ est un homéomorphisme.

9. Soient $f: X \to X'$ et $g: Y \to Y'$ des applications décomposables. Si X' et Y sont des espaces de Hausdorff localement compacts, l'application $f \times g: X \times Y \to X' \times Y'$ est décomposable.

En effet, $f \times g$ se présente comme la composée des applications

$$X \times Y \xrightarrow{f \times \mathrm{id}} X' \times Y \xrightarrow{\mathrm{id} \times g} X' \times Y'$$

et l'on sait que la composée de deux applications décomposables est décomposable.

8. Le cas des espaces pointés

1. Nous aurons besoin dans la suite d'espaces topologiques munis d'une structure supplémentaire très simple: d'un point de base (il s'agit donc de couples topologiques (X, x_0), où x_0 est un point; ils seront appelés *espaces pointés* ou *espaces à point de base*). Pour de tels espaces, les constructions décrites dans les sous-paragraphes précédents doivent être modifiées. Pour certaines constructions il s'agit de munir l'espace obtenu par un point de base: par exemple, l'espace quotient d'un espace à point de base x_0 possède un point de base naturel pr (x_0); le produit d'espaces à points de base $x_1, \ldots, x_n$ possède un point de base naturel $(x_1, \ldots, x_n)$, tandis que l'espace des applications continues d'un espace X dans un espace Y à point de base y_0 et tous ses sous-espaces qui contiennent l'application constante const: $X \to Y$ à valeur y_0 possèdent le point de base naturel const. D'autres constructions, par exemple la somme, la suspension et le join, nécessitent des modifications sérieuses.

Ces modifications sont décrites dans ce qui suit. En passant, nous introduisons une nouvelle construction: *le produit tensoriel d'espaces pointés.* A chaque fois, on obtient à partir d'un espace pointé des espaces pointés, et de leurs applications qui envoient le point de base dans le point de base, des applications envoyant le point de base dans le point de base. Remarquons que les applications fact f, $\mathscr{C}$ (f, g) et $f_1 \times \ldots \times f_n$ envoient le point de base dans le point de base, à condition que les applications simples possédaient cette propriété.

En guise de notation générale pour le point de base nous nous servirons du symbole bp.

Bouquets et produits tensoriels

2. La construction ci-dessous joue le rôle de la somme dans le cas des espaces pointés.

Soit $\{X_\mu\}_{\mu \in M}$ une famille d'espaces topologiques à points de base x_μ. L'espace quotient de la somme $\bigsqcup_{\mu \in M} X_\mu$ par le sous-ensemble constitué des points $\mathrm{in}_\mu(x_\mu)$ est appelé *bouquet des espaces* X_μ; on le désigne par $\bigvee_{\mu \in M} (X_\mu, x_\mu)$. Si l'ensemble M se compose

des nombres 1, ..., n, on écrit également $(X_1, x_1) \vee \ldots \vee (X_n, x_n)$. Le point $\mathrm{pr} \circ \mathrm{in}_\nu (x_\nu) \in \bigvee (X_\mu, x_\mu)$ ne dépend pas de ν; on l'appelle *centre du bouquet* $\bigvee (X_\mu, x_\mu)$ et on le choisit pour point de base.

Il est évident que le bouquet $\bigvee (X_\mu, x_\mu)$ est la somme des espaces X_μ dans le sens de 4.2, de sorte que nous avons les inclusions $\mathrm{imm}_\nu : X_\nu \to \bigvee (X_\mu, x_\mu)$. Le bouquet possède des applications spécifiques $\mathrm{pr}_\nu : \bigvee (X_\mu, x_\mu) \to X_\nu$, définies par la formule

$$\mathrm{pr}_\nu (\mathrm{imm}_{\nu'} (x)) = \begin{cases} x_\nu & \text{si } \nu' \neq \nu, \\ x & \text{si } \nu' = \nu. \end{cases}$$

Il est clair que $\mathrm{pr}_\nu \circ \mathrm{imm}_\nu = \mathrm{id}\, X_\nu$ et que $\mathrm{pr}_\nu \circ \mathrm{imm}_{\nu'} = \mathrm{const}$ lorsque $\nu' \neq \nu$.

Si M est l'ensemble des indices de la famille d'espaces Y_μ à points de base y_μ et de la famille d'applications continues $f_\mu : X_\mu \to Y_\mu$ telles que $f_\mu (x_\mu) = y_\mu$, on obtient une application continue $\mathrm{fact}\,(\sqcup f_\mu) : \bigvee (X_\mu, x_\mu) \to \bigvee (Y_\mu, y_\mu)$ qui sera notée $\bigvee f_\mu$.

3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des espaces à points de base $x_1, \ldots, x_n$. Les formules

$$x \mapsto (x, x_2, \ldots, x_n) \quad [x \in X_1], \ldots, x \mapsto$$
$$\mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, x)\ [x \in X_n$$

déterminent les plongements canoniques

$$X_1 \to X_1 \times \ldots \times X_n, \ldots, X_n \to X_1 \times \ldots \times X_n$$

désignés par $\mathrm{in}_1, \ldots, \mathrm{in}_n$, tandis que la formule

$$x \mapsto (\mathrm{pr}_1 (x), \ldots, \mathrm{pr}_n (x))$$

détermine le plongement canonique

$$(X_1, x_1) \vee \ldots \vee (X_n, x_n) \to X_1 \times \ldots \times X_n.$$

Ce dernier permet d'envisager le bouquet $(X_1, x_1) \vee \ldots \vee (X_n, x_n)$ comme un sous-ensemble du produit $X_1 \times \ldots \times X_n$; il est clair que le plongement $\mathrm{in}_i : X_i \times \ldots \times X_n$ est la composition du plongement

$$\mathrm{imm}_i : X_i \to (X_1, x_1) \vee \ldots \vee (X_n, x_n)$$

et de l'inclusion

$$(X_1, x_1) \vee \ldots \vee (X_n, x_n) \to X_1 \times \ldots \times X_n,$$

tandis que la projection $\mathrm{pr}_i : (X_1, x_1) \vee \ldots \vee (X_n, x_n) \to X_i$ est la restriction de la projection $\mathrm{pr}_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$.

L'espace quotient $(X_1 \times \ldots \times X_n)/[(X_1, x_1) \vee \ldots \vee (X_n, x_n)]$ s'appelle *produit tensoriel des espaces* $X_1, \ldots, X_n$; on le désigne

par $(X_1, x_1) \otimes \ldots \otimes (X_n, x_n)$. Le point

$$\mathrm{pr}\,[(X_1, x_1) \vee \ldots \vee (X_n, x_n)] \in (X_1, x_1) \otimes \ldots \otimes (X_n, x_n)$$

s'appelle *centre du produit tensoriel* $(X_1, x_1) \otimes \ldots \otimes (X_n, x_n)$; on le prend en guise de point de base.

Le produit tensoriel d'espaces est commutatif et associatif: on a les homéomorphismes canoniques évidents

$$(X_1, x_1) \otimes (X_2, x_2) \to (X_2, x_2) \otimes (X_1, x_1)$$

et

$$(X_1, x_1) \otimes [(X_2, x_2) \otimes (X_3, x_3), \mathrm{bp}] \to$$
$$\to [(X_1, x_1) \otimes (X_2, x_2), \mathrm{bp}] \otimes (X_3, x_3);$$

on a de même

$$[(X_1, x_1) \otimes \ldots \otimes (X_{n-1}, x_{n-1}), \mathrm{bp}] \otimes (X_n, x_n) =$$
$$= (X_1, x_1) \otimes \ldots \otimes (X_n, x_n).$$

Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des espaces topologiques pointés et $f_1 : X_1 \to Y_1, \ldots, f_n : X_n \to Y_n$ des applications continues qui appliquent des points de base dans des points de base; il existe une application continue

$$\mathrm{fact}\,(f_1 \times \ldots \times f_n) : (X_1, x_1) \otimes \ldots \otimes (X_n, x_n) \to$$
$$\to (Y_1, y_1) \otimes \ldots \otimes (Y_n, y_n).$$

Elle sera désignée par $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$.

Cônes, suspensions, joins

4. Un *cône sur un espace X à point de base x_0* se définit comme l'espace quotient du cône usuel cône X par la génératrice pr $(x_0 \times I)$. Notation: cône (X, x_0). L'image de la génératrice par la projection cône $X \to$ cône(X, x_0) s'appelle *sommet du cône* cône(X, x_0); on la prend pour point de base. L'image de la base du cône cône X par la projection cône $X \to$ cône (X, x_0) s'appelle *base du cône* cône (X, x_0); cette projection, restreinte à la première base, est un homéomorphisme sur la deuxième et, puisque la première base a été identifiée à X, ceci permet d'identifier X également à la deuxième base.

Si Y est un espace à point de base y_0 et $f : X \to Y$ une application continue envoyant x_0 dans y_0, on obtient l'application continue fact cône f: cône $(X, x_0) \to$ cône (Y, y_0) que l'on désigne souvent par cône f.

D'une manière équivalente, le cône cône (X, x_0) peut être décrit comme espace quotient du cylindre $X \times I$ par $(X \times 0) \cup (x_0 \times I)$, i.e. comme $(X, x_0) \otimes (I, 0)$.

5. La *suspension sur un espace X à point de base x_0* se définit comme l'espace quotient de la suspension usuelle su X par la génératrice pr $(x_0 \times I)$. Notation : su (X, x_0). L'image par la projection su $X \to$ su (X, x_0) de la génératrice s'appelle *sommet de la suspension* su (X, x_0) ; on la prend pour point de base.

Si Y est un espace à point de base y_0 et $f : X \to Y$ une application envoyant x_0 dans y_0, on obtient l'application continue fact su f : su $(X, x_0) \to$ su (Y, y_0) qui est également désignée par su f.

D'une manière équivalente, la suspension su (X, x_0) peut être décrite comme l'espace quotient du cylindre $X \times I$ par $(X \times \times (0 \cup 1)) \cup (x_0 \times I)$, i.e. comme $(X, x_0) \otimes (I/(0 \cup 1), \text{bp}) = (X, x_0) \otimes (S^1, \text{ort}_1)$. Autre description équivalente : su $(X, x_0) =$ cône $(X, x_0)/X$.

6. Le *join des espaces X_1, X_2 à points de base x_1, x_2* se définit comme l'espace quotient du join usuel $X_1 * X_2$ par la génératrice pr $(x_1 \times x_2 \times I)$. Notation : $(X_1, x_1) * (X_2, x_2)$. L'image de la génératrice par la projection $X_1 * X_2 \to (X_1, x_1) * (X_2, x_2)$ est appelée *centre du join* $(X_1, x_1) * (X_2, x_2)$; on la prend pour point de base.

Si Y_1, Y_2 sont des espaces à points de base y_1, y_2 et $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$ des applications continues qui envoient x_1, x_2 dans y_1, y_2, on peut envisager l'application continue

$$\text{fact}\,(f_1 * f_2) : (X_1, x_1) * (X_2, x_2) \to (Y_1, y_1) * (Y_2, y_2)$$

désignée simplement par $f_1 * f_2$.

7. *Pour des espaces quelconques X_1, X_2, à points de base x_1, x_2, le bouquet* (su (X_1, x_1), bp) $\vee$ (su (X_2, x_2), bp) *est canoniquement homéomorphe à* su $((X_1, x_1) \vee (X_2, x_2)$, bp).

L'homéomorphisme canonique

$$\text{su}\,((X_1, x_1) \vee (X_2, x_2), \text{bp}) \to (\text{su}\,(X_1, x_1), \text{bp}) \vee (\text{su}\,(X_2, x_2), \text{bp})$$

se définit par la formule

$$\text{pr}\,(\text{imm}_i\,(x), t) \mapsto \text{imm}_i\,(\text{pr}\,(x, t))\ [x \in X_i ;\ i = 1, 2].$$

8. *Les espaces* cône (S^m, ort_1), su (S^m, ort_1), $(S^m, \text{ort}_1) * (S^n, \text{ort}_1)$ *sont canoniquement homéomorphes à D^{m+1}, S^{m+1}, S^{m+n+1}.*

L'homéomorphisme canonique cône $(S^m, \text{ort}_1) \to D^{m+1}$ se définit par la formule

$$\text{pr}\,((x_1, \ldots, x_{m+1}), t) \mapsto (tx_1 + (1 - t), tx_2, \ldots, tx_{m+1}).$$

L'homéomorphisme canonique su $(S^m, \text{ort}_1) \to S^{m+1}$ applique la génératrice qui passe par le point $x \in S^m$ sur le cercle dans S^{m+1} de centre $(\text{ort}_1 + x)/2$ (qui se réduit au point ort_1 lorsque $x = \text{ort}_1$) ; lorsque t varie de 0 à 1, l'image du point pr (x, t) se déplace unifor-

mément le long du cercle considéré en partant du point ort_1 et en passant d'abord par le demi-espace $x_{m+1} \leqslant 0$ (voir fig. 1).

L'homéomorphisme canonique $(S^m, \mathrm{ort}_1) * (S^n, \mathrm{ort}_1) \to S^{m+n+1}$ est défini sur les bases S^m, S^n par les formules

$$(x_1, \ldots, x_{m+1}) \mapsto$$
$$\mapsto \left(\frac{3x_1+1}{4}, \frac{x_2\sqrt{3}}{2}, \ldots, \frac{x_{m+1}\sqrt{3}}{2}, 0, \ldots, 0, \frac{\sqrt{3}(1-x_1)}{4}\right),$$
$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto$$
$$\mapsto \left(\frac{3x_1+1}{4}, 0, \ldots, 0, \frac{x_2\sqrt{3}}{2}, \ldots, \frac{x_{n+1}\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}(x_1-1)}{4}\right),$$

tandis que la génératrice qui joint les points $x \in S^m$, $x' \in S^n$ est appliquée linéairement (relativement aux longueurs) sur l'arc du grand cercle qui joint les images de ces points (voir fig. 2).

9. Puisque cône $(S^m, \mathrm{ort}_1) = (S^m, \mathrm{ort}_1) \otimes (I, 0)$ (voir *4*) et su $(S^m, \mathrm{ort}_1) = (S^m, \mathrm{ort}_1) \otimes (S^1, \mathrm{ort}_1)$ (voir *5*), les homéomorphismes

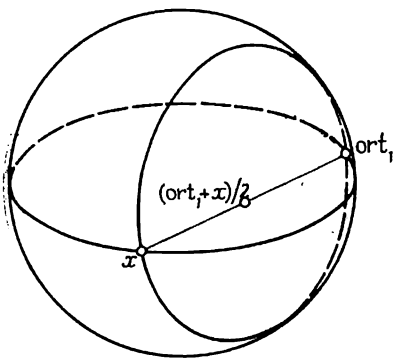


Fig. 1 ($m = 2$)

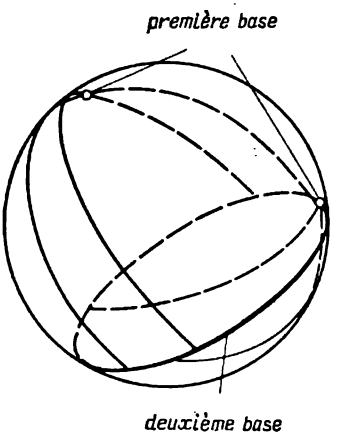


Fig. 2 ($m = 0$, $n = 1$)

cône $(S^m, \mathrm{ort}_1) \to D^{m+1}$ et su $(S^m, \mathrm{ort}_1) \to S^{m+1}$, définis dans *8*, nous amènent pour $n \geqslant 1$ aux homéomorphismes canoniques

$$S^n = \underbrace{(S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes \ldots \otimes (S^1, \mathrm{ort}_1)}_{n \text{ fois}},$$

$$D^n = \underbrace{(S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes \ldots \otimes (S^1, \mathrm{ort}_1)}_{n-1 \text{ fois}} \otimes (I, 0)$$

qui permettent de définir les applications

$$\mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{pr}: D^n = (S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes \ldots \otimes (S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes$$
$$\otimes (I, 0) \to (S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes \ldots \otimes (S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes (I/(0 \cup 1), \mathrm{bp}) = S^n,$$
$$(\mathrm{pr} \otimes \ldots \otimes \mathrm{pr} \otimes \mathrm{id}\, I) \circ \mathrm{pr}: I^n = I \times \ldots \times I \to$$
$$\to (I/(0 \cup 1), \mathrm{bp}) \otimes \ldots \otimes (I/(0 \cup 1), \mathrm{bp}) \otimes (I, 0) = D^n.$$

Ces applications seront désignées par DS et ID. Il est clair que DS, restreinte à $\mathrm{Int}\, D^n$, est un homéomorphisme de $\mathrm{Int}\, D^n$ sur $S^n \setminus \mathrm{ort}_1$ qui applique $\mathrm{Fr}\, D^n$ dans ort_1, tandis que ID applique $\mathrm{Int}\, I^n$ sur $\mathrm{Int}\, D^n$ et $\mathrm{Int}\, I^{n-1}$ sur $S^{n-1} \setminus \mathrm{ort}_1$, envoyant $\mathrm{Fr}\, I^n \setminus \mathrm{Int}\, I^{n-1}$ dans ort_1.

L'application DS étant fermée (voir 1.7.9), son quotient injectif fact $DS: D^n/S^{n-1} \to S^n$ est un homéomorphisme. Ainsi *pour $n \geqslant 1$ l'espace quotient D^n/S^{n-1} est canoniquement homéomorphe à S^n.*

Les applications $(X, x_0) \otimes (Y, y_0) \to Z$ et $X \to \mathscr{C}(Y, y_0; Z, z_0)$

10. Soient X, Y, Z des espaces topologiques à points de base x_0, y_0, z_0. Si une application $\varphi: (X, x_0) \otimes (Y, y_0) \to Z$ est continue et envoie le point de base dans le point de base, alors la formule $[\varphi^\smile(x)](y) = \varphi(\mathrm{pr}(x, y))$ définit une application continue $\varphi^\smile: X \to \mathscr{C}(Y, y_0; Z, z_0)$ qui applique le point de base dans le point de base. Si une application $\psi: X \to \mathscr{C}(Y, y_0; Z, z_0)$ est continue et applique le point de base dans le point de base, et Y est un espace de Hausdorff localement compact, la formule $\psi^\frown(\mathrm{pr}(x, y)) = [\psi(x)](y)$ définit une application continue $\psi^\frown: (X, x_0) \otimes (Y, y_0) \to Z$ qui envoie le point de base dans le point de base.

En effet,

$$\varphi^\smile = \mathrm{ab}\,[(\varphi \circ \mathrm{pr}: X \times Y \to Z)^\vee],$$
$$\psi \circ (\mathrm{pr}: X \times Y \to (X, x_0) \otimes (Y, y_0)) =$$
$$= [\psi \circ (\mathrm{in}: \mathscr{C}(Y, y_0; Z, z_0) \to \mathscr{C}(Y, Z))]^\wedge$$

(voir 7.6).

11. Une application $\mathscr{C}((X, x_0) \otimes (Y, y_0), \mathrm{bp}; Z, z_0) \to \mathscr{C}(X, x_0; \mathscr{C}(Y, y_0; Z, z_0), \mathrm{const})$ définie par la formule $\varphi \mapsto \varphi^\smile$ (voir 10) est continue pour des espaces topologiques quelconques X, Y, Z à points de base x_0, y_0, z_0. Si X, Y sont des espaces de Hausdorff compacts, cette application est un homéomorphisme, et l'homéomorphisme inverse est défini par la formule $\psi \mapsto \psi^\frown$.

La continuité de l'application $\varphi \mapsto \varphi^\smile$ découle du fait que l'image inverse par cette application de l'ensemble

$$\mathscr{C}(X, A, x_0; \mathscr{C}(Y, y_0; Z, z_0), \mathscr{C}(Y, B, y_0; Z, C, z_0), \mathrm{const})$$

coïncide avec

$$\mathscr{C}((X, x_0) \otimes (Y, y_0), \mathrm{pr}(A \times B), \mathrm{bp}; Z, C, z_0).$$

Supposons que les espaces X, Y sont compacts et sont des espaces de Hausdorff; considérons l'application

$$\mathscr{C}(\mathrm{pr}, \mathrm{id}\, Z) : \mathscr{C}((X, x_0) \otimes (Y, y_0), Z) \to \mathscr{C}(X \times Y, Z).$$

D'après 7.5, cette application est un plongement, d'où l'on tire que l'application $\psi \mapsto \psi^\frown$ est continue, en utilisant le fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(X, x_0; \mathscr{C}(Y, y_0; Z, z_0), \mathrm{const}) & \to & \mathscr{C}((X, x_0) \otimes (Y, y_0), \mathrm{bp}; Z, z_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y, Z)) & \to & \mathscr{C}(X \times Y, Z) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales désignent les applications $\psi \mapsto \psi^\frown$, $\psi \mapsto \psi^\wedge$ tandis que les flèches verticales sont les composées

$$\mathscr{C}(X, x_0; \mathscr{C}(Y, y_0; Z, z_0), \mathrm{const}) \xrightarrow{\mathrm{in}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{in}} \mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y, y_0; Z, z_0)) \xrightarrow{\mathscr{C}(\mathrm{id}\, X, \mathrm{in})} \mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y, Z)),$$

$$\mathscr{C}((X, x_0) \otimes (Y, y_0), \mathrm{bp}; Z, z_0) \xrightarrow{\mathrm{in}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{in}} \mathscr{C}((X, x_0) \otimes (Y, y_0), Z) \xrightarrow{\mathscr{C}(\mathrm{pr}, \mathrm{id}\, Z)} \mathscr{C}(X \times Y, Z)$$

est commutatif. Le fait que les applications $\varphi \mapsto \varphi^\smile$ et $\psi \mapsto \psi^\frown$ sont inverses l'une de l'autre est évident.

9. Exercices

1. Démontrer que, quels que soient X, espace topologique, et Y, espace topologique compact, l'application $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ est fermée.

2. Démontrer que le sous-ensemble de la sphère S^n défini dans les coordonnées standards de l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$ par l'inégalité $x_1^2 + \ldots + x_k^2 \leqslant x_{k+1}^2 + \ldots + x_{n+1}^2$ est homéomorphe à $D^k \times S^{n-k}$.

3. Supposons que M, X_μ et $\varphi_{\mu\mu'}$ ont la même signification que dans 4.2, et soit X la somme des espaces X_μ, définie par les homéomorphismes $\varphi_{\mu\mu'}$. Démontrer que les applications $\mathrm{imm}_\mu : X_\mu \to X$ sont des plongements topologiques lorsque M se compose de deux éléments et peuvent ne pas l'être lorsque M est constitué par trois éléments.

4. Démontrer que pour $n \geqslant 1$ les espaces $\mathscr{C}(I, 0, 1; S^n, \mathrm{ort}_1, \mathrm{ort}_2)$ et $\mathscr{C}(I, 0, 1; S^n, \mathrm{ort}_1, \mathrm{ort}_1)$ sont homéomorphes.

5. Soit T l'ensemble de toutes les suites réelles $\{x_i\}_1^\infty$; munissons-le d'une topologie en considérant la prébase constituée de tous les ensembles de la forme $\{\{x_i\}_1^\infty | a < x_s < b\}$; soit S l'espace quotient de l'espace $T \setminus 0$ (où $0 = \{x_i = 0\}_1^\infty$) par sa partition en

demi-droites, i.e. en ensembles de la forme $\{\{tx_i^0\}_1^\infty \mid 0 < t < \infty\}$ pour $\{x_i^0\}_1^\infty \in T \setminus 0$. Démontrer que T est métrisable et S est régulier, mais présente la particularité que toute fonction continue $S \to \mathsf{R}$ est constante.

§ 3. HOMOTOPIES

1. Définitions générales

1. Nous dirons qu'une application $f': X \to Y$ est *homotope* à l'application continue $f: X \to Y$ lorsqu'il existe une application continue $F: X \times I \to Y$ telle que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = f'(x)$ pour $x \in X$. Toute application F du type indiqué est appelée *homotopie* entre f et f'. On dit également que F est une *homotopie de l'application* f.

L'homotopie $F: X \times I \to Y$ est souvent interprétée comme une famille d'applications continues $f_t: X \to Y$, liées à F par la relation $f_t(x) = F(x, t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 1]$. Conformément à 2.7.6, la continuité de F implique celle de la famille lorsqu'on l'envisage comme une application de l'intervalle fermé I dans $\mathscr{C}(X, Y)$; lorsque X est un espace de Hausdorff localement compact, la continuité de cette famille est équivalente à la continuité de l'application F.

Il est clair que l'homotopie *constante* F, définie à partir d'une application continue $f: X \to Y$ par la formule $F(x, t) = f(x)$, est une homotopie entre f et f; d'autre part, si l'homotopie F est une homotopie entre f et f', l'homotopie *inverse* F', définie par la formule $F'(x, t) = F(x, 1 - t)$, est une homotopie entre f' et f; enfin, si F est une homotopie entre f et f' et F' est une homotopie entre f' et f'', alors leur *produit* F'', défini par la formule

$$F''(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{pour } t \leqslant 1/2, \\ F'(x, 2t - 1) & \text{pour } t \geqslant 1/2, \end{cases}$$

est une homotopie entre f et f''. Ainsi, *la relation d'homotopie est une équivalence.* Les classes d'équivalence correspondantes dans l'ensemble $\mathscr{C}(X, Y)$ sont appelées *classes d'homotopie.* L'ensemble de toutes ces classes est désigné par $\pi(X, Y)$.

2. L'homotopie *linéaire* est un exemple d'homotopie. Soient f et f' des applications continues d'un espace X dans un sous-espace Y de l'espace R^n. Si pour tout point $x \in X$ le segment qui joint $f(x)$ à $f'(x)$ est entièrement contenu dans Y, alors la formule $F(x, t) = (1 - t) f(x) + tf'(x)$ définit une homotopie entre f et f'. Cette homotopie est appelée linéaire.

Il est évident que deux applications quelconques d'un espace arbitraire dans R^n ou D^n sont linéairement homotopes.

3. Si deux applications $f, f': X \to Y$ sont homotopes, les applications $g \circ f \circ h$, $g \circ f' \circ h: X' \to Y'$ sont homotopes, quelles que soient les applications continues $g: Y \to Y'$, $h: X' \to X$.

En effet, si $F: X \times I \to Y$ est une homotopie entre f et f', alors $g \circ F \circ (h \times \mathrm{id}\, I)$ est une homotopie entre $g \circ f \circ h$ et $g \circ f' \circ h$.

4. Il découle de *3* qu'une application $\mathscr{C}(f, g): \mathscr{C}(X, Y) \to \mathscr{C}(X', Y')$, induite par des applications continues $f: X' \to X$, $g: Y \to Y'$, fait correspondre entre elles des classes d'homotopie. L'application fact $\mathscr{C}(f, g): \pi(X, Y) \to \pi(X', Y')$ correspondante est désignée par $\pi(f, g)$. Il découle de *3* qu'elle est déterminée par les classes d'homotopie des applications f, g.

Homotopies liées

5. Soit A un sous-ensemble d'un espace X. L'homotopie $F: X \times I \to Y$ est dite *liée* ou *fixe sur* A ou, plus brièvement, *A-homotopie* si $F(x, t) = F(x, 0)$ pour $x \in A$, $t \in I$. Deux applications entre lesquelles il existe une A-homotopie sont dites *A-homotopes*. Il est évident que des applications A-homotopes coïncident sur A.

De même que l'homotopie usuelle une A-homotopie est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence correspondantes (dans l'ensemble des applications continues $X \to Y$ qui coïncident sur A avec l'application donnée $f: A \to Y$) sont appelées *classes de A-homotopies* ou, plus précisément, *classes d'homotopies des prolongements continus à X de l'application f*. L'ensemble de toutes ces classes est désigné par $\pi(X, A; f)$.

Notons que l'homotopie linéaire entre f et g (voir *2*) est liée sur un ensemble où f et g coïncident.

Si l'on veut souligner que telle ou telle homotopie n'est pas liée, on dit qu'elle est *libre*.

Equivalence homotopique des espaces

6. Une application continue $g: Y \to X$ est dite *homotopiquement inverse* d'une application continue $f: X \to Y$ si la composée $g \circ f$ est homotope à l'identité $\mathrm{id}\, X$, et la composée $f \circ g$ est homotope à l'identité $\mathrm{id}\, Y$. Une application continue qui possède une application homotopiquement inverse est appelée *équivalence homotopique*. Lorsqu'il existe une équivalence homotopique $X \to Y$, on dit que l'espace Y est *homotopiquement équivalent* à l'espace X.

Il est clair que l'identité est une équivalence homotopique, qu'une application homotopiquement inverse d'une équivalence homotopique est une équivalence homotopique et que la composée de deux équivalences homotopiques en est une. Par conséquent, l'équivalence homotopique est bien une relation d'équivalence entre espaces topologiques. Les classes d'équivalence correspondantes sont appelées *types d'homotopie*.

Il est évident qu'un homéomorphisme est une équivalence homotopique.

7. Si l'une des applications $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *et leur composée* $g \circ f: X \to Z$ *sont des équivalences homotopiques, l'autre en est également une.*

En effet, si h est une application homotopiquement inverse de $g \circ f$, du fait que f est une équivalence homotopique il découle que l'application $f \circ h$ est homotopiquement inverse de g. D'autre part, le fait que g est une équivalence homotopique implique que l'application $h \circ g$ est homotopiquement inverse de f.

8. Un ensemble $\pi(X, Y)$ *est homotopiquement invariant: si* $g: Y \to Y'$ *et* $f: X' \to X$ *sont des équivalences homotopiques, alors* $\pi(f, g): \pi(X, Y) \to \pi(X', Y')$ *est une application bijective.*

En effet, si f' est une application homotopiquement inverse de f, et g' est une application homotopiquement inverse de g, alors l'application $\pi(f', g')$ est inverse de $\pi(f, g)$.

Espaces contractiles

9. Un espace X est dit *contractile* lorsque l'identité id X est homotope à l'application constante.

En guise d'exemple d'espaces contractiles citons les espaces euclidiens $\mathbf{R}^n$ et les boules D^n (voir *2*).

10. Un espace est contractile si, et seulement si, il est homotopiquement équivalent à un point.

D é m o n s t r a t i o n. Si une application id X est homotope à une application φ, alors l'application $f: D^0 \to X$ qui prend la valeur $\varphi(X)$ et l'application $g: X \to D^0$ sont homotopiquement inverses l'une de l'autre puisque $f \circ g = \varphi$ et $g \circ f = \mathrm{id}\, D^0$.

Si $f: D^0 \to X$ et $g: X \to D^0$ sont des applications homotopiquement inverses entre elles, alors l'application id X est homotope à l'application constante $f \circ g$.

11. Si un espace X est contractile, alors deux applications continues quelconques d'un espace topologique dans X sont homotopes. En particulier, l'application id X *est homotope dans ce cas à toute application constante* $X \to X$.

La proposition découle de *10* et de *8*.

Rétractions de déformation

12. Une rétraction ρ d'un espace topologique X sur son sous-espace A (voir 1.4.10) est appelée *rétraction de déformation* (*de déformation stricte*) si la composée des applications $X \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\mathrm{in}} X$ est homotope à id X (A-homotope à id X). Si l'espace X admet une rétraction de déformation sur A, on dit que A est son *rétracte de*

déformation. Si l'espace X admet une rétraction de déformation stricte sur A, on dit que A est son *rétracte de déformation stricte.*

Il est clair que si $\rho : X \to A$ est une rétraction de déformation, alors ρ et l'inclusion $A \to X$ sont des équivalences homotopiques homotopiquement inverses l'une de l'autre. Il est également clair qu'un espace admettant une rétraction de déformation sur l'un de ses points est contractile et que chaque point d'un espace contractile est son rétracte de déformation.

Homotopies relatives

13. Soient X un espace muni d'une suite de sous-ensembles $A_1, \ldots, A_n$, et Y un espace muni d'une suite de sous-ensembles $B_1, \ldots, B_n$. L'application $F: (X \times I, A_1 \times I, \ldots, A_n \times I) \to (Y, B_1, \ldots, B_n)$ est appelée homotopie entre deux applications continues $f, f' : (X, A_1, \ldots, A_n) \to (Y, B_1, \ldots, B_n)$ si abs F est une homotopie entre les applications abs f, abs f'. Il est évident que dans ce cas ab abs $F: A_i \times I \to B_i$ est une homotopie entre les applications ab abs f, ab abs $f' : A_i \to B_i$. Il est également clair que l'homotopie définie par les homotopies $(X \times I, A_1 \times I, \ldots, A_n \times I) \to (Y, B_1, \ldots, B_n)$ est une équivalence homotopique. L'ensemble des classes d'homotopie correspondantes dans l'ensemble $\mathscr{C}(X, A_1, \ldots, A_n ; Y, B_1, \ldots, B_n)$ est désigné par $\pi(X, A_1, \ldots, A_n ; Y, B_1, \ldots, B_n)$. La définition de l'application $\pi(f, g)$ donnée dans *4* se généralise au cas considéré d'une manière appropriée.

Une application continue $g: (Y, B_1, \ldots, B_n) \to (X, A_1, \ldots, A_n)$ est dite homotopiquement inverse d'une application continue $f: (X, A_1, \ldots, A_n) \to (Y, B_1, \ldots, B_n)$ si la composée $g \circ f$ est homotope à rel id X et la composée $f \circ g$ est homotope à rel id Y. Une application continue qui possède une application homotopiquement inverse est appelée équivalence homotopique. Des suites $(X, A_1, \ldots, A_n)$, $(Y, B_1, \ldots, B_n)$ pour lesquelles il existe une équivalence homotopique sont dites homotopiquement équivalentes. Les propositions *7* et *8* se transposent mot à mot au cas relatif.

14. Ce qui a été dit dans *13* comprend en particulier le cas où X et Y sont des espaces pointés (dans ce cas A_1, B_1 sont des points, $n = 1$ et les homotopies définies dans *13* coïncident avec les homotopies liées au point A_1). En outre, on peut étendre au cas des espaces à points de base la définition de la contractilité donnée dans *9* (toute homotopie entre id X et une application constante doit être liée au point de base), les deux théorèmes *10*, *11* ainsi que les définitions de la rétraction de déformation et du rétracte de déformation données dans *12* (il faut prendre un même point de base dans X et A et exiger que l'homotopie entre la composée des applications $X \xrightarrow{\rho}$

$\xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\text{in}} X$ et id X soit liée en ce point). En ce qui concerne la notion de rétraction de déformation stricte, l'introduction de points de base n'y change rien.

2. Chemins

1. On appelle *chemin* dans un espace topologique X toute application continue du segment I dans X. Les points $s(0)$ et $s(1)$ sont appelés *origine* et *extrémité* du chemin s. Si $s(0) = s(1)$, le chemin s est dit *fermé*. Les chemins fermés sont également appelés *lacets*.

Un chemin défini d'après le chemin s par la formule $t \mapsto s(1-t)$ est dit *inverse* du chemin s; on le désigne par s^{-1}. Le chemin défini d'après les chemins s_1, s_2, dans le cas $s_1(1) = s_2(0)$, par la formule

$$t \mapsto \begin{cases} s_1(2t) & \text{si } t \leqslant 1/2, \\ s_2(2t-1) & \text{si } t \geqslant 1/2, \end{cases}$$

est appelé *produit* des chemins s_1, s_2; on le désigne par $s_1 s_2$. Il est clair que $(s^{-1})^{-1} = s$ et $(s_1 s_2)^{-1} = s_2^{-1} s_1^{-1}$.

2. Puisque $I = D^0 \times I$, un chemin dans X peut être envisagé comme une homotopie de l'application $D^0 \to X$; dans cette interprétation, le chemin inverse devient l'homotopie inverse, tandis que le produit des chemins devient le produit d'homotopies.

D'autre part, une homotopie entre deux applications continues $f, f' : X \to Y$ détermine un chemin dans $\mathscr{C}(X, Y)$ qui joint f à f' (voir 2.7.6); dans ce cas, une homotopie inverse correspond toujours à un chemin inverse, et le produit d'homotopies au produit des chemins. Si X est un espace de Hausdorff localement compact, une homotopie entre les applications continues $f, f' : X \to Y$ peut même être définie comme un chemin dans $\mathscr{C}(X, Y)$ qui joint f à f'.

3. Etant une application continue, un chemin peut lui-même subir des homotopies. Malheureusement, la terminologie généralement admise qui se rapporte à ces homotopies s'accorde plutôt mal avec les définitions (elles aussi généralement admises) du sous-paragraphe 1. A savoir, lorsqu'il s'agit de chemins, les expressions *homotopie* et *équivalence homotopique* signifient toujours une $(0 \cup 1)$-homotopie (i.e. une homotopie liée aux extrémités du segment I) et une $(0 \cup 1)$-équivalence homotopique. En outre, s'il s'agit de lacets, *homotopie libre* signifie toujours une homotopie libre (dans le sens usuel) où un lacet reste un lacet (i.e. une application continue $F : I \times I \to X$ telle que $F(0, t) = F(1, t)$ pour chaque $t \in I$).

3. Connexité et k-connexité

1. Les propriétés des espaces topologiques étudiées dans ce sous-paragraphe sont des variantes plus faibles de la contractilité envisagée dans le cas absolu, et de la rétraction de déformation dans le cas relatif.

Connexité

2. Un espace topologique est dit *connexe* si deux quelconques de ses points peuvent être joints par un chemin. Enoncé équivalent : un espace X est connexe si l'ensemble $\pi(D^0, X)$ contient au plus un élément ; voir 2.2.

Puisque l'ensemble $\pi(D^0, X)$ est homotopiquement invariant (voir 1.8), sa connexité est une propriété homotopiquement invariante. En particulier, les espaces contractiles sont connexes. Par exemple, les espaces R^n et D^n sont connexes quel que soit n.

La sphère S^n pour $n > 0$ est également connexe. Deux quelconques de ses points peuvent être joints par un chemin déjà dans $S^n \setminus p$, où p est un troisième point (rappelons que l'espace $S^n \setminus p$ est homéomorphe à R^n). La sphère S^0 n'est pas connexe. Le chemin qui joint -1 à 1 serait une fonction réelle continue sur l'intervalle $[0, 1]$, prenant deux valeurs distinctes sans prendre de valeurs intermédiaires.

Parmi les sous-ensembles de la droite R sont connexes seuls : l'ensemble vide, les points, les intervalles ouverts, fermés et semi-ouverts ainsi que les demi-droites ouvertes et fermées. En effet, si α, β sont les bornes exactes d'un ensemble connexe A de la droite R, alors A contient l'intervalle $]\alpha, \beta[$.

3. Dans le cas d'un espace topologique quelconque X, une relation qui joint ses points par un chemin est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence correspondantes dans l'espace X sont des sous-ensembles connexes maximaux de X ; on les appelle *composantes*. L'ensemble des composantes peut être identifié d'une manière évidente avec $\pi(D^0, X)$. Nous le désignerons par comp X.

A une application continue $f\colon X \to Y$ correspond l'application

$$\operatorname{fact} f = \pi(\operatorname{id} D^0, f)\colon \operatorname{comp} X \to \operatorname{comp} Y$$

qui ne varie pas lorsqu'on remplace f par une application homotope et qui est bijective lorsque f est une équivalence homotopique (voir 1.4 et 1.8). Il est également clair que $f(X) = Y$ implique $\operatorname{fact} f(\operatorname{comp} X) = \operatorname{comp} Y$. En particulier, l'image d'un espace connexe par une application continue est connexe.

4. Si un espace X peut être représenté comme la réunion de ses sous-ensembles connexes A_1, A_2, et $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, X est connexe.

En effet, la composante de X qui contient le point $x_0 \in A_1 \cap A_2$ contient également A_1 et A_2, i.e. contient X tout entier.

5. Etant donnée une partition d'un espace X en ensembles ouverts, chaque sous-ensemble connexe de X est contenu dans un des éléments de cette partition. En particulier, chaque sous-ensemble à la fois ouvert et fermé d'un espace connexe est ou bien vide ou bien coïncide avec l'espace X tout entier.

Démonstration. Soient A un sous-ensemble connexe d'un espace X, et U un élément de la partition qui rencontre A. Puisque l'application $f\colon X \to S^0$ qui applique U dans 1 et $X \setminus U$ dans -1 est continue, l'ensemble $f(A)$ est connexe. Par conséquent, $f(A) = 1$ et $A \subset U$.

k-connexité

6. Pour une application continue $f\colon S^r \to X$ (avec $r \geqslant 0$) les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *f est homotope à l'application constante;*

(ii) *f peut être prolongé en une application continue $D^{r+1} \to X$;*

(iii) *les composées $f \circ DS_+$, $f \circ DS_-\colon D^r \to X$, où DS_+, DS_- sont des plongements de la boule D^r dans S^r définis par les formules*

$$DS_+(x_1, \ldots, x_r) = (x_1, \ldots, x_r, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_r^2}),$$

$$DS_-(x_1, \ldots, x_r) = (x_1, \ldots, x_r, -\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_r^2}),$$

sont S^{r-1}-homotopes;

(iv) *f est* ort_1*-homotope à l'application constante.*

La démonstration sera effectuée suivant le schéma:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{i}) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& (\mathrm{ii}) \arrow[r, shift left, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & (\mathrm{iii}) \arrow[l, shift left, Rightarrow] \\
(\mathrm{iv}) \arrow[uu, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). En effet, l'homotopie $F\colon S^r \times I \to X$ entre f et l'application constante applique la base supérieure du cylindre $S^r \times I$ en un point; par conséquent, F se décompose en deux applications: l'application $S^r \times I \to D^{r+1}$ définie par la formule

$$((x_1, \ldots, x_{r+1}), t) \mapsto (x_1(1-t), \ldots, x_{r+1}(1-t))$$

et une certaine application continue $g\colon D^{r+1} \to X$ (voir 2.3.4 et 1.7.9); on a évidemment $g|_{S^r} = f$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) et (ii) $\Rightarrow$ (iv). En effet, si $g\colon D^{r+1} \to X$ est un prolongement continu de l'application f, les formules

$$((x_1, \ldots, x_r), t) \mapsto g(x_1, \ldots, x_r, (1-2t)\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_r^2}),$$

$$((x_1, \ldots, x_{r+1}), t) \mapsto g(t + (1-t)x_1, (1-t)x_2, \ldots, (1-t)x_{r+1})$$

définissent une S^{r-1}-homotopie entre $f \circ DS_+$ et $f \circ DS_-$ et une ort_1-homotopie $S^r \times I \to X$ entre f et l'application constante.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). En effet, la S^{r-1}-homotopie $F\colon D^r \times I \to X$, qui joint $f \circ DS_+$ à $f \circ DS_-$ applique chaque génératrice du cylindre $S^{r-1} \times I$ en un point; par conséquent, F se décompose en deux ap-

plications : l'application $D^r \times I \to D^{r+1}$ définie par la formule

$$((x_1, \ldots, x_r), t) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, (2t-1)\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_r^2})$$

et une certaine application continue $g: D^{r+1} \to X$ (voir 2.3.4 et 1.7.9) ; il est clair que $g|_{S^r} = f$.

L'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) est évidente.

7. Un espace X non vide est dit *k-connexe* ($0 \leqslant k \leqslant \infty$), si chaque application continue $S^r \to X$ pour $r \leqslant k$ est homotope à l'application constante, i.e. vérifie la condition *6* (i). D'après le théorème *6*, cet énoncé est équivalent aux trois énoncés analogues que l'on en obtient en remplaçant la condition *6* (i) par les conditions *6* (ii), *6* (iii), *6* (iv). Comme, en outre, pour deux applications continues quelconques $f_1, f_2: D^r \to X$ qui coïncident sur S^{r-1}, il existe une application continue $f: S^r \to X$ pour laquelle $f \circ DS_+ = f_1$, $f \circ DS_- = f_2$, un espace X non vide est k-connexe si et seulement si deux applications continues quelconques $f_1, f_2: D^r \to X$ pour $r \leqslant k$ qui coïncident sur S^{r-1} sont S^{r-1}-homotopes.

Il est évident que pour les espaces non vides, la 0-connexité est connexité. Les espaces 1-connexes sont dits *simplement connexes* ; pour les espaces 0-connexes ceci signifie que deux chemins quelconques à extrémités communes sont homotopes entre eux.

Il découle de l'invariance homotopique d'ensembles $\pi(S^r, X)$ qu'un espace homotopiquement équivalent à un espace k-connexe est k-connexe. En particulier, les espaces contractiles sont ∞-connexes.

Le cas relatif

8. Pour une application continue $f: (D^r, S^{r-1}) \to (X, A)$, $r > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est homotope à l'application constante ;*

(ii) *l'application* abs f *est S^{r-1}-homotope à une application qui applique D^r dans un sous-ensemble de l'ensemble A.*

D é m o n s t r a t i o n. (i) $\Rightarrow$ (ii). Si $F: (D^r \times I, S^{r-1} \times I) \to (X, A)$ est une homotopie entre f et l'application constante, la formule

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} F(x/\mathrm{dist}(0, x), 2(1-\mathrm{dist}(0, x))) & \text{si } \mathrm{dist}(0, x) \geqslant (2-t)/2, \\ F(2x/(2-t), t) & \text{si } \mathrm{dist}(0, x) \leqslant (2-t)/2 \end{cases}$$

définit une S^{r-1}-homotopie $D^r \times I \to X$ entre abs f et une application qui envoie D^r dans un sous-ensemble de l'espace A.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Si $G: D^r \times I \to X$ est une homotopie liée sur S^{r-1} entre abs f et une application qui envoie D^r dans un sous-ensemble de l'ensemble A, l'application

$$\mathrm{rel}\, F: (D^r \times I, S^{r-1} \times I) \to (X, A),$$

où F est l'application du cylindre $D^r \times I$ dans X, définie par la formule

$$F((x_1, \ldots, x_r), t) = \begin{cases} G((x_1, \ldots, x_r), 2t) & \text{si } t \leqslant 1/2, \\ G((2x_1(1-t), \ldots, 2x_r(1-t)), 1) & \text{si } t \geqslant 1/2, \end{cases}$$

est une homotopie entre f et l'application constante.

9. Un couple (X, A) est appelé *k-connexe* $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ si pour toute application continue $f: (D^r, S^{r-1}) \to (X, A)$ avec $r \leqslant k$, l'application abs f est S^{r-1}-homotope à une application dont l'image est contenue dans A.

Il est clair que le couple (X, A) est 0-connexe si et seulement si chaque composante de X rencontre A. Pour $k > 0$, le couple (X, A) est k-connexe si et seulement si toute application continue $f: (D^r, S^{r-1}) \to (X, A)$ avec $r \leqslant k$ est homotope à une constante; voir *8*.

Un couple homotopiquement équivalent à un couple k-connexe est évidemment k-connexe. Il en découle en particulier que si A est un rétracte de déformation stricte de l'espace X, alors le couple (X, A) est ∞-connexe; en effet, il est homotopiquement équivalent au couple (X, X). Comme nous verrons plus loin, le couple (X, A) est ∞-connexe déjà dans le cas où A est un rétracte de déformation de l'espace X et même dans le cas où l'inclusion $A \to X$ est une équivalence homotopique; voir 5.1.6.5.

4. Propriétés locales

1. Un espace topologique X est dit *localement contractile au point* $x_0 \in X$, si chaque voisinage U de ce point contient un autre voisinage V de ce point tel que l'inclusion $V \to U$ est homotope à l'application constante de V dans x_0.

Un espace topologique X est dit *localement contractile* s'il est localement contractile dans chacun de ses points.

Si l'on remplace dans ces définitions l'équivalence homotopique par la x_0-équivalence homotopique, on obtient la définition de la *connexité locale forte* de l'espace X *au point* x_0 et de la *contractilité locale forte* de l'espace X.

En guise d'exemples d'espaces localement contractiles on peut citer R^n, D^n et S^n.

2. Un espace topologique X est dit *localement connexe en un point* $x_0 \in X$ si chaque voisinage U de x_0 contient un voisinage V de ce point tel que deux points quelconques de V peuvent être joints par un chemin dans U. Un espace topologique est dit *localement connexe* lorsqu'il est localement connexe en chacun de ses points.

Il est clair que la connexité locale découle de la contractilité locale. En guise d'exemple d'espace connexe non localement connexe citons une partie du plan $\mathbf{R}^2$ constituée par les droites $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$, où m_1, m_2 sont des entiers.

3. Un espace est localement connexe si et seulement si les composantes des ouverts sont ouvertes. En particulier, chaque voisinage d'un point quelconque d'un espace localement connexe contient un voisinage connexe de ce point.

Démonstration. Si x_0 est un point de la composante A d'un sous-ensemble ouvert U de l'espace localement connexe X, alors U contient un voisinage V du point x_0 tel que deux points quelconques de V peuvent être joints par un chemin dans U. Par conséquent, $V \subset A$, de sorte que $x_0 \in \operatorname{Int} A$. Ceci démontre que, dans un espace localement connexe, les composantes des ensembles ouverts sont ouvertes; la réciproque est évidente.

5. Couples de Borsuk

1. Un couple topologique (X, A) est appelé *couple de Borsuk* si quels que soient un espace topologique Y, une application continue $f: X \to Y$ et une homotopie $F: A \times I \to Y$ de l'application $f|_A$, il existe une homotopie $X \times I \to Y$ de f qui prolonge F.

Il est clair que si (X, A, B) est un triplet d'espaces topologiques et (X, A), (A, B) sont des couples de Borsuk, alors (X, B) est un couple de Borsuk.

2. Pour qu'un couple topologique (X, A) soit un couple de Borsuk il est nécessaire et, dans le cas où A est fermé, également suffisant, que l'ensemble $(X \times 0) \cup (A \times I)$ soit un rétracte du cylindre $X \times I$.

Démonstration de la nécessité. Chaque homotopie de l'application in: $X = X \times 0 \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ qui est un prolongement de l'homotopie in: $A \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ est une rétraction du cylindre $X \times I$ sur $(X \times 0) \cup (A \times I)$.

Démonstration de la suffisance. Si $\rho: X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ est une rétraction, alors, quel que soit un espace topologique Y, une application continue $f: X \to Y$ et une homotopie $F: A \times I \to Y$ de la restriction $f|_A$, la composée des applications $X \times I \xrightarrow{\rho} (X \times 0) \cup (A \times I) \xrightarrow{\rho} Y$, où G est défini par la formule

$$G(x, t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t = 0, \\ F(x, t) & \text{si } x \in A, \end{cases}$$

est une homotopie de f qui prolonge F.

3. La proposition suivante fait corps avec le théorème *2*: *si X est un espace de Hausdorff, l'ensemble A sera automatiquement fermé si le cylindre $X \times I$ peut être rétracté sur $(X \times 0) \cup (A \times I)$.* Pour

la démonstration il suffit de remarquer que cette dernière condition implique que l'ensemble $(X \times 0) \cup (A \times I)$ est fermé dans $X \times I$ (voir 1.5.5) et que A est l'image inverse de cet ensemble par l'application $X \to X \times I$ donnée par la formule $x \mapsto (x, 1)$.

4. Si les ensembles A, B constituent un recouvrement fermé d'un espace X et $(A, A \cap B)$ est un couple de Borsuk, alors (X, B) est également un couple de Borsuk.

Ceci découle de *2* car toute rétraction $\rho: A \times I \to [A \times 0] \cup \cup [(A \cap B) \times I]$ détermine, suivant la formule

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} \rho(x, t) & \text{si } x \in A, \\ (x, t) & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

une rétraction $X \times I \to (X \times 0) \cup (B \times I)$.

5. Si (X, A) est un couple de Borsuk, A étant fermé, et Z un espace topologique, $(Z \times X, Z \times A)$ est un couple de Borsuk.

Démonstration. Si ρ est une rétraction du cylindre $X \times I$ sur $(X \times 0) \cup (A \times I)$, alors id $Z \times \rho$ est une rétraction du cylindre $(Z \times X) \times I = Z \times (X \times I)$ sur $[(Z \times X) \times 0] \cup \cup [(Z \times A) \times I] = Z \times [(X \times 0) \cup (A \times I)]$.

Couples de Borsuk et rétractes de déformation

6. Si (X, A) est un couple de Borsuk et l'inclusion $A \to X$ est une équivalence homotopique, alors A est un rétracte de déformation de l'espace X.

Démonstration. Soit $\pi: X \to A$ une application homotopiquement inverse de l'inclusion $A \to X$. Prolongeons l'homotopie entre $\pi|_A = \pi \circ \mathrm{in}: A \to A$ et id A en une homotopie de l'application π et désignons par ρ la rétraction de l'espace X sur A liée par cette dernière homotopie à π. Puisque la composée des applications $X \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\mathrm{in}} X$ est homotope à id X, l'application composée $X \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\mathrm{in}} X$ est également homotope à id X, de sorte que ρ est une rétraction de déformation.

7. Si A est un rétracte de déformation d'un espace X et $((X \times I, (X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1))$ est un couple de Borsuk, alors A est un rétracte de déformation stricte de l'espace X.

Démonstration. Soit $\rho: X \to A$ une rétraction de déformation et $f: X \times I \to X$ une homotopie liant id X avec la composée des applications $X \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\mathrm{in}} X$. Définissons une homotopie $g: [(X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1)] \times I \to X$ par la formule

$$g((x, t_1) t_2) = \begin{cases} x & \text{si } t_1 = 0, \\ f(x, (1 - t_2) t_1) & \text{si } x \in A, \\ f(\rho(x), 1 - t_2) & \text{si } t_1 = 1 \end{cases}$$

et prolongeons-la en une homotopie $G: (X \times I) \times I \to X$ de l'application $f: X \times I \to X$. Il est clair que la formule $(x, t) \mapsto G((x, t), 1)$ définit une A-homotopie $X \times I \to X$ liant id X avec $\mathrm{in} \circ \rho$.

8. Si (X, A) est un couple de Borsuk et B un rétracte de déformation stricte de l'espace A, alors l'application $\mathrm{rel}: (X, B) \to (X, A)$ *est une équivalence homotopique.*

Démonstration. Prolongeons la B-homotopie liant id A à la composée de la rétraction de déformation stricte $A \to B$ et de l'inclusion $B \to A$ en une certaine homotopie G de l'application id X. Il est clair que l'application $(X, A) \to (X, B)$ définie par la formule $x \mapsto G(x, 1)$ est homotopiquement inverse de rel.

Caractéristiques locales des couples de Borsuk

9. Si (X, A) est un couple de Borsuk, X étant normal, alors, quels que soient un espace topologique Y, une application continue f: $X \to Y$ et une homotopie F de la restriction $f|_A$, il existe pour chaque voisinage U de l'ensemble A une $(X \setminus U)$-homotopie de f qui prolonge F.

Démonstration. Si G est une homotopie de f qui prolonge F, alors la formule $(x, t) \mapsto G(x, t\varphi(x))$, où φ est une fonction d'Urysohn du couple $X \setminus U$, A, détermine une $(X \setminus U)$-homotopie de f prolongeant F.

10. Pour qu'un couple topologique (X, A) soit un couple de Borsuk, il est nécessaire et, dans le cas où X est normal et A découpé (en particulier, lorsque X est métrisable et A est fermé), suffisant qu'il existe un voisinage U de A tel que l'inclusion $U \to X$ est A-homotope à une application qui envoie U dans A.

Démonstration de la nécessité. Si $\sigma: X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ est une rétraction, alors l'ensemble U constitué par les points $x \in X$ tels que $\sigma(x, 1) \in A \times (0, 1]$ est ouvert, tandis que la composée des applications

$$U \times I \xrightarrow{\mathrm{in}} X \times I \xrightarrow{\sigma} (X \times 0) \cup (A \times I) \xrightarrow{\mathrm{in}} X \times I \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X$$

est une A-homotopie liant l'inclusion $U \to X$ à une application de U dans A.

Démonstration de la suffisance. Soit F: $U \times I \to X$ une A-homotopie telle que $F(x, 0) = x$ et $F(x, 1) \in A$ quel que soit $x \in U$, et soit $\varphi: X \to I$ une fonction d'Urysohn du couple A, $X \setminus U$ qui découpe A (voir 1.5.9). La formule

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, \min(t/\varphi(x), 1)) & \text{si } x \in U \setminus A, \\ x & \text{si } x \in A \end{cases}$$

détermine une certaine application $G: U \times I \to X$, continue d'après le théorème 2.2.14. De même que G, est continue l'application H:

$X \times I \to X \times I$ définie par la formule

$$H(x, t) = \begin{cases} (G(x, \max(0, t-\varphi(x))), \max(0, t-2\varphi(x))) & \text{si } x \in U, \\ (x, 0) & \text{si } x \in X \setminus U; \end{cases}$$

il est clair que $H(X \times I) = (X \times 0) \cup (A \times I)$ et que ab H: $X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ est une rétraction.

11. Soit (X, A) un couple topologique tel que A est un rétracte de déformation stricte d'un de ses voisinages. Si X est normal et A découpable (en particulier, si X est métrisable et A fermé), (X, A) est un couple de Borsuk.

La proposition découle de *10*.

12. Si (X, A) est un couple de Borsuk, pour tout voisinage V de A, il existe un voisinage W tel que $W \subset V$ et l'inclusion $W \to V$ est A-homotope à une application de W dans A.

Démonstration. D'après *10*, il existe un voisinage U de A et une A-homotopie F: $U \times I \to X$ tels que $F(x, 0) = x$ et $F(x, 1) \in A$ quel que soit $x \in U$; d'après 2.2.13, chaque point x de A possède dans U un voisinage W_x tel que $F(W_x \times I) \subset V$. Posons $W = \bigcup_{x \in A} W_x$. Il est clair que $W \subset V$ et $F(W \times I) \subset V$, et que ab F: $W \times I \to V$ est une A-homotopie liant l'inclusion $W \to V$ à une application de W dans A.

13. Un espace topologique qui constitue avec un de ses points un couple de Borsuk est fortement localement contractile en ce point. Si un espace normal est fortement localement contractile dans un point découpé, il constitue avec ce point un couple de Borsuk.

La proposition découle de *12* et *10*.

6. Espaces SCNR *)

1. Un sous-ensemble d'un espace topologique est appelé *rétracte de voisinage* s'il est rétracte d'un de ses voisinages.

En guise d'exemples de rétractes de voisinage, citons les rétractes et les ensembles ouverts.

2. Si A est un rétracte de voisinage d'un espace X, et B est un rétracte de voisinage de A, alors B est un rétracte de voisinage de X.

En effet, si ρ: $U \to A$ est une rétraction de voisinage de A dans X et σ: $V \to B$ une rétraction de voisinage de B dans A, alors $\sigma \circ (\rho|_W)$: $W \to B$, où $W = \rho^{-1}(V)$, est une rétraction de voisinage de B dans X.

3. Un espace topologique est appelé *espace SCNR* s'il est compact et peut être plongé dans un espace euclidien (d'une certaine dimension) en tant que rétracte de voisinage.

La boule D^n et la sphère S^n sont des espaces SCNR.

---

*) La notation SCNR est composée des initiales des mots anglais « Sphere Compact Neighborhood Retract ».— *N.d.T.*

4. Un rétracte de voisinage compact d'un SCNR est un SCNR.
La proposition découle de *2*.

5. L'image d'un SCNR par plongement dans un espace normal est un rétracte de voisinage.

Démonstration. Soit f un plongement d'un SCNR X dans un espace normal Y, et soit $g: X \to \mathsf{R}^n$ un plongement tel que $g(X)$ est un rétracte de voisinage de l'espace R^n. Soit d'autre part $f_1 = [\text{ab } f: X \to f(X)]$, $g_1 = [\text{ab } g: X \to g(X)]$ et $\rho: V \to g(X)$ une rétraction de voisinage. Puisque l'ensemble $f(X)$ est fermé (voir 1.7.9), l'application $g \circ f_1^{-1}: f(X) \to \mathsf{R}^n$ se prolonge en une application continue $h: Y \to \mathsf{R}^n$ (voir 1.5.12); on voit que $U = h^{-1}(V)$ est un voisinage de l'ensemble $f(X)$ et $f_1 \circ g_1^{-1} \circ \rho \circ [\text{ab } h: U \to V]$ est une rétraction de ce voisinage sur $f(X)$.

6. Pour tout rétracte de voisinage compact X de l'espace R^n, il existe un nombre positif ε tel que des applications continues f, g d'un espace quelconque Y dans X vérifiant

$$\sup_{y \in Y} \operatorname{dist}(f(y), g(y)) < \varepsilon$$

sont homotopes entre elles. Cette homotopie peut être supposée fixe sur tout ensemble où f et g coïncident.

Démonstration. Soit $\sigma: U \to X$ une rétraction de voisinage. Nous montrerons qu'en guise de ε on peut choisir la distance entre les ensembles X et $\mathsf{R}^n \setminus U$ (elle est positive d'après 1.7.15).

Soient $f, g: Y \to X$ des applications continues telles que $\operatorname{dist}(f(y), g(y)) < \varepsilon$ quel que soit $y \in Y$. Il est évident que le segment qui joint $f(y)$ à $g(y)$ est contenu dans U quel que soit le point $y \in Y$. Par conséquent, les applications $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\text{in}} U$, $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{\text{in}} U$ sont liées par une homotopie linéaire $F: Y \times I \to U$ et il est immédiat que l'homotopie $\sigma \circ F: Y \times I \to X$ joint f avec g, étant liée sur tout ensemble où f et g coïncident.

7. Si A est un rétracte de voisinage d'un SCNR X, alors (X, A) est un couple de Borsuk.

Démonstration. Soit $\sigma: U \to A$ une rétraction de voisinage. En supposant X rétracte de voisinage de l'espace R^n, trouvons pour lui le nombre ε indiqué dans *6* et désignons par V le voisinage de l'ensemble A dans X constitué par les points $x \in U$ pour lesquels $\operatorname{dist}(x, \sigma(x)) < \varepsilon$. Désignons par φ la composée des applications

$$V \xrightarrow{\sigma|V} A \xrightarrow{\text{in}} X.$$

Il est évident que $\operatorname{dist}(\varphi(x), x) < \varepsilon$ si $x \in V$, tandis que $\varphi(x) = x$ si $x \in A$; par conséquent, l'inclusion $V \to X$ A-homotope à φ, et, puisque $\varphi(V) = A$, il ne reste qu'à appliquer le théorème 5.10.

8. Les espaces SCNR sont fortement localement contractiles.
La proposition découle de 5.7 et 5.13.

Information

9. La réciproque du théorème *8* est vraie : tout sous-espace localement contractile compact d'un espace euclidien est son rétracte de voisinage. Pour la démonstration, voir [14].

7. Propriétés homotopiques des constructions topologiques

1. Dans ce sous-paragraphe nous établissons l'équivalence homotopique de certaines constructions décrites au § 2 et nous étudions les propriétés homotopiques des espaces correspondants.

Produits

2. Il est évident que des applications continues $f, g: Y \to X_1 \times \times \ldots \times X_n$ sont homotopes si et seulement si les applications $\mathrm{pr}_i \circ f$, $\mathrm{pr}_i \circ g: Y \to X_i$ le sont pour chaque i (cf. 2.2.4). Il en découle en particulier que l'espace $X_1 \times \ldots \times X_n$ est k-connexe si et seulement si tous les espaces X_i $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ sont k-connexes.

Il est également clair que si des applications $g_1: X_1 \to Y_1, \ldots \ldots, g_n: X_n \to Y_n$ sont homotopes à des applications $f_1: X_1 \to Y_1, \ldots \ldots, f_n: X_n \to Y_n$, alors l'application $g_1 \times \ldots \times g_n: X_1 \times \ldots \ldots \times X_n \to Y_1 \times \ldots \times Y_n$ est homotope à l'application $f_1 \times \ldots \ldots \times f_n: X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times \ldots \times Y_n$; si $f_1, \ldots, f_n$ sont des équivalences homotopiques, alors $f_1 \times \ldots \times f_n$ l'est également.

3. Si A est un rétracte de déformation (resp. un rétracte de déformation stricte) d'un espace X, le produit $A \times Y$ est évidemment, pour tout Y, un rétracte de déformation (resp. un rétracte de déformation stricte) du produit $X \times Y$. En particulier, si X est contractile, les fibres $x \times Y$ du produit $X \times Y$ sont des rétractes de déformation de ce produit.

Espaces quotients

4. Puisque la projection $X \to X/\mathfrak{f}$ est une application continue de X sur $X/\mathfrak{f}$, l'espace quotient d'un espace connexe est connexe (voir 3.3). Il est également clair que l'espace quotient X/A de l'espace X par son sous-espace A sera connexe dès que le couple (X, A) est 0-connexe ; de même lorsque les composantes de X sont ouvertes, alors la 0-connexité du couple (X, A) découle de la connexité de l'espace quotient X/A.

Comme nous verrons par la suite, ni la k-connexité pour $k > 0$, ni la contractilité de l'espace quotient ne sont conservées par passage à l'espace quotient.

5. Soient $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$ *des partitions des espaces* X, Y. *Si des applications* $f_t: X \to Y$ *constituent une homotopie qui applique les éléments de la*

partition $\mathfrak{f}$ *dans des éléments de la partition* $\mathfrak{t}$, *alors les applications* fact f_t: $X/\mathfrak{f} \to Y/\mathfrak{t}$ *constituent également une homotopie.*

Il faut démontrer que l'application G: $(X/\mathfrak{f}) \times I \to Y/\mathfrak{t}$, définie par la formule $G(x, t) = (\text{fact } f_t)(x)$, est continue. Pour cela, il suffit de remarquer (voir 2.3.4) que la composée des applications $X \times I \xrightarrow{\text{pr}\times\text{id}\,I} (X/\mathfrak{f}) \times I \xrightarrow{G} Y/\mathfrak{t}$ est continue, tandis que l'application pr $\times$ id I est décomposable; la première assertion découle du fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{\text{pr}\times\text{id}\,I} & (X/\mathfrak{f}) \times I \\ \downarrow F & & \downarrow G \\ Y & \xrightarrow{\text{pr}} & Y/\mathfrak{t}, \end{array}$$

où F est définie par la formule $F(x, t) = f_t(x)$, est commutatif, tandis que la seconde assertion découle du théorème 2.7.8.

6. Si des applications f, f': $(X, A) \to (Y, B)$ *sont homotopes, les applications*

$$\text{rel fact } f, \text{ rel fact } f' : (X/A, \text{ pr } (A)) \to (Y/B, \text{ pr } (B))$$

le sont également. Si f *est une équivalence homotopique, alors* rel fact f *l'est également.*

La première assertion découle de *5*, la seconde de la première: en effet, si une application g: $(Y, B) \to (X, A)$ est homotopiquement inverse de f, alors l'application

$$\text{rel fact } g : (Y/B, \text{ pr } (B)) \to (X/A, \text{ pr } (A))$$

est homotopiquement inverse de rel fact f.

7. Si (X, A) *est un couple de Borsuk avec* A *contractile, alors* rel pr: $(X, A) \to (X/A, \text{pr } (A))$ *est une équivalence homotopique.*

Démonstration. Soient F: $A \times I \to A$ une homotopie qui joint id A à l'application constante, et G: $X \times I \to X$ une homotopie de l'application id X qui prolonge F. L'application g à laquelle G joint id X étant constante sur A, on a l'application fact g: $X/A \to X$; comme évidemment fact g (pr $(A)) \subset A$, on a également l'application

$$\text{rel fact } g : (X/A, \text{ pr } (A)) \to (X, A).$$

Montrons que cette dernière est homotopiquement inverse de rel pr. A cette fin considérons les homotopies

rel G: $(X \times I, A \times I) \to (X, A)$ et

$$\text{rel fact } G : ((X/A) \times I, \text{ pr } (A) \times I) \to (X/A), \text{ pr } (A))$$

La première joint les applications rel id X, rel $g: (X, A) \to (X, A)$, tandis que la seconde joint les applications

$$\text{rel id } (X/A), \text{ rel fact } g: (X/A, \text{pr } (A)) \to (X/A, \text{pr } (A))$$

et il est immédiat que $[\text{rel } g: (X, A) \to (X, A)] = [\text{rel fact } g: (X/A, \text{pr}(A)) \to (X, A)] \circ [\text{rel pr}: (X, A) \to (X/A, \text{pr } (A))]$ et $[\text{rel fact } g: (X/A, \text{pr } (A)) \to (X/A, \text{pr } (A))] = [\text{rel pr}: (X, A) \to (X/A, \text{pr } (A))] \circ [\text{rel fact } g: (X/A, \text{pr } (A)) \to (X, A)]$.

Attachements

8. *Soient (X_1, C) un couple de Borsuk et $\varphi, \varphi': C \to X_2$ des applications homotopes; les espaces $X_2 \cup_\varphi X_1$, $X_2 \cup_{\varphi'} X_1$ sont homotopiquement équivalents; en outre, il existe une équivalence d'homotopie f: $X_2 \cup_\varphi X_1 \to X_2 \cup_{\varphi'} X_1$ telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[dl, "\text{imm}_2"'] \arrow[dr, "\text{imm}_2"] & \\ X_2 \cup_\varphi X_1 \arrow[rr, "f"] & & X_2 \cup_{\varphi'} X_1 \end{tikzcd} \tag{1}$$

est commutatif.

Démonstration. Soit $\Phi: C \times I \to X_2$ une homotopie liant φ à φ' et σ une rétraction du cylindre $X_1 \times I$ sur $(X_1 \times 0) \cup (C \times I)$. Définissons les applications

$$h: (X_1 \times 0) \cup (C \times I) \to X_2 \cup_\varphi X_1, \quad h': (X_1 \times 0) \cup (C \times I) \to X_2 \cup_\varphi X$$

par les formules

$$h(x, t) = \begin{cases} \text{imm}_1(x) & \text{si } t = 0, \\ \text{imm}_2 \circ \Phi(x, t) & \text{si } x \in C, \end{cases}$$

$$h'(x, t) = \begin{cases} \text{imm}_1(x) & \text{si } t = 0, \\ \text{imm}_2 \circ \Phi(x, 1-t) & \text{si } x \in C, \end{cases}$$

et les applications

$$f: X_2 \cup_\varphi X_1 \to X_2 \cup_{\varphi'} X_1, \quad g: X_2 \cup_{\varphi'} X_1 \to X_2 \cup_\varphi X_1$$

par les formules

$$f \circ \text{imm}_1(x) = h' \circ \sigma(x, 1), \quad f \circ \text{imm}_2(x) = \text{imm}_2(x),$$

$$g \circ \text{imm}_1(x) = h \circ \sigma(x, 1), \quad g \circ \text{imm}_2(x) = \text{imm}_2(x).$$

Il est évident que ces applications sont continues et que le diagramme (1) est commutatif. Il est également clair que l'application

$(X_2 \cup_\varphi X_1) \times I \to X_2 \cup_\varphi X_1$, définie par les formules

$$(\mathrm{imm}_1(x), t) \mapsto h \circ \sigma \circ \psi(\sigma(x, t), t),$$
$$(\mathrm{imm}_2(x), t) \mapsto \mathrm{imm}_2(x),$$

où ψ est l'application du produit $(X_1 \times I) \times I$ dans $X_1 \times I$ suivant la formule $\psi((x, u), t) = (x, \max(0, t - u))$, est une homotopie entre id $(X_2 \cup_\varphi X_1)$ et $g \circ f$. Ainsi, la composée $g \circ f$ est homotope à id $(X_2 \cup_\varphi X_1)$ et, de même, la composée $f \circ g$ est homotope à id $(X_2 \cup_{\varphi'} X_1)$.

9 (Lemme). *Si $f: Y \to Y'$, $f': Y' \to Y$ sont des applications homotopiquement inverses, pour toute homotopie $F: Y \times I \to Y$ joignant*

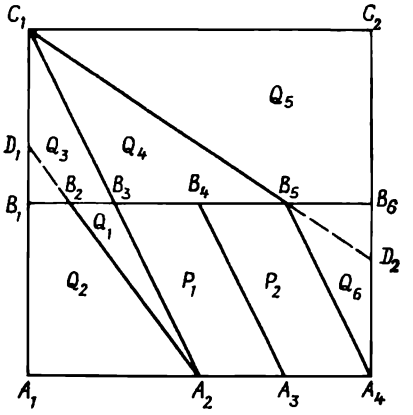


Fig. 3

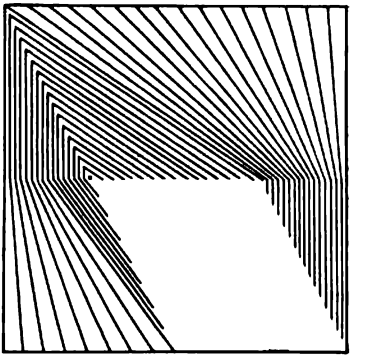


Fig. 4

id Y à $f' \circ f$, il existe une homotopie $F': Y' \times I \to Y'$ joignant id Y' *à $f \circ f'$ telle que les applications*

$$f \circ F, \quad F' \circ (f \times \mathrm{id}\, I): Y \times I \to Y'$$

sont $[(Y \times 0) \cup (Y \times 1)]$*-homotopes.*

Démonstration. Soient $G: Y' \times I \to Y'$ une homotopie liant id Y' à $f \circ f'$, et F' le produit des trois homotopies G, $f \circ F \circ (f' \times \mathrm{id}\, I)$ et de l'homotopie inverse de $G \circ (f \times \mathrm{id}\, I) \circ \circ (f' \times \mathrm{id}\, I)$. Partageons le carré I^2 en 8 parties de la manière indiquée sur la figure 3 (les points A_1, A_2, A_3, A_4 ont les abscisses 0, 1/2, 3/4, 1 et l'ordonnée 0, les points $B_1, \ldots, B_6$ ont les abscisses 0, 1/8, 1/4, 1/2, 3/4, 1 et l'ordonnée 1/2, les points C_1, C_2 les abscisses 0, 1 et l'ordonnée 1). Définissons des applications affines $\alpha_1: I^2 \to P_1$, $\alpha_2: I^2 \to P_2$ par les conditions $\alpha_1(0, 0) = B_3$, $\alpha_1(1, 0) = = B_4$, $\alpha_1(0, 1) = A_2$, $\alpha_2(0, 0) = B_5$, $\alpha_2(1, 0) = B_4$, $\alpha_2(0, 1) = = A_4$. Définissons ensuite, pour $y \in Y$, une application $\varphi_y: I^2 \to$

$\to Y'$ en posant $\varphi_y(\alpha_1(t_1, t_2)) = f(F(y, t_2)\, t_1))$, $\varphi_y(\alpha_2(t_1, t_2)) = G(f \circ F(y, t_2), t_1)$; pour $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ on a $\varphi_y(t, 0) = G(f(y), 2t)$; quant aux restrictions $\varphi_y|_{Q_i}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, elles sont constantes: pour $i = 1$ sur les segments de droite parallèles à la droite A_2B_2; pour $i = 2$ sur les segments de droite passant par le point D_1; pour $i = 3$ sur les segments verticaux; pour $i = 4$ sur les segments de droite parallèles à la droite C_1B_5; pour $i = 5$ sur les segments de droite passant par le point D_2; pour $i = 6$ sur les segments verticaux (les segments sur lesquels l'application φ_y est constante sont représentés sur la figure 4). Il est clair que la formule $((y, t_1), t_2) \mapsto \varphi_y(t_1, t_2)$ détermine une $[(Y \times 0) \cup (Y \times 1)]$-homotopie $(Y \times I) \times I \to Y'$ qui joint $f \circ F$ à $F' \circ (f \times \mathrm{id}\, I)$.

10. Soient (X, C) un couple de Borsuk avec C fermé, et $\varphi: C \to Y$ une application continue. Si $f: Y \to Y'$ est une équivalence homotopique,

$$\mathrm{fact}\,(\mathrm{id}\, X \sqcup f): Y \cup_\varphi X \to Y' \cup_{f \circ \varphi} X$$

est également une équivalence homotopique.

Démonstration. Fixons: (i) une application $f': Y' \to Y$, homotopiquement inverse de f; (ii) une homotopie $F: Y \times I \to Y$, joignant $\mathrm{id}\, Y$ à $f' \circ f$; (iii) une homotopie $F': Y' \times I \to Y'$, joignant $\mathrm{id}\, Y'$ à $f \circ f'$ et une $[(Y \times 0) \cup (Y \times 1)]$-homotopie $G: (Y \times I) \times I \to Y'$ joignant $f \circ F$ à $F' \circ (f \times \mathrm{id}\, I)$ (voir 9); (iv) une rétraction $\rho: X \times I \to (X \times 0) \cup (C \times I)$. Définissons ensuite les applications

$$g: (X \times 0) \cup (C \times I) \to Y \cup_\varphi X, \quad g': [(X \times 0) \cup (C \times I)] \times I \to Y' \cup_{f \circ \varphi} X$$

par les formules

$$g(x, t) = \begin{cases} \mathrm{imm}_1(x) & \text{si } t = 0, \\ \mathrm{imm}_2 \circ F(\varphi(x), t) & \text{si } x \in C; \end{cases}$$

$$g'((x, t_1), t_2) = \begin{cases} \mathrm{imm}_1(x) & \text{si } t_1 = 0, \\ \mathrm{imm}_2 \circ G((\varphi(x), t_1), t_2) & \text{si } x \in C, \end{cases}$$

et l'application $h: Y' \cup_{f \circ \varphi} X \to Y \cup_\varphi X$ par les formules

$$h(\mathrm{imm}_1(x)) = g \circ \rho(x, 1), \quad h(\mathrm{imm}_2(y')) = \mathrm{imm}_2(f'(y')).$$

Il est clair que les formules

$$H(\mathrm{imm}_1(x), t) = g \circ \rho(x, t), \qquad H(\mathrm{imm}_2(y), t) = \mathrm{imm}_2(F(y, t))$$

déterminent une homotopie $H: (Y \cup_\varphi X) \times I \to Y \cup_\varphi X$ qui joint $\mathrm{id}\,(Y \cup_\varphi X)$ à $h \circ \mathrm{fact}\,(\mathrm{id}\, X \sqcup f)$, tandis que les formules

$$H'_1(\mathrm{imm}_1(x), t) = g'(\rho(x, t), 1), \quad H'_1(\mathrm{imm}_2(y'), t) = \mathrm{imm}_2(F'(y', t)),$$

$H'_2(\mathrm{imm}_1(x), t) = g'(\rho(x, 1), t)$, $H'_2(\mathrm{imm}_2(y'), t) = \mathrm{imm}_2(f \circ f'(y))$ définissent des homotopies $H'_1, H'_2 : (Y' \cup_{f\circ\varphi} X) \times I \to Y' \cup_{f\circ\varphi} X$ dont le produit joint $\mathrm{id}(Y' \cup_{f\circ\varphi} X)$ avec $\mathrm{fact}(\mathrm{id}\, X \sqcup f) \circ h$. Ainsi l'application h est homotopiquement inverse de $\mathrm{fact}(\mathrm{id}\, X \sqcup f)$.

Constructions spéciales

11. Le cône cône X *est contractile pour tout* X. *La suspension* su X *est connexe pour tout* X. *Le join* $X_1 * X_2$ *est connexe quels que soient* X_1, X_2.

La contractilité du cône est évidente. La connexité de la suspension découle du fait qu'elle est un espace quotient du cône. La connexité du join découle du fait que deux points quelconques

$$\mathrm{pr}(x_1, x_2, t),\ \mathrm{pr}(x'_1, x'_2, t') \in$$
$$\in X_1 * X_2\ [(x_1, x_2, t), (x'_1, x'_2, t') \in X_1 \times X_2 \times I]$$

peuvent être reliés par un chemin défini par la formule

$$\tau \to \begin{cases} \mathrm{pr}(x_1, x_2, 3\tau(1-t)+t) & \text{si } \tau \leqslant 1/3, \\ \mathrm{pr}(x'_1, x_2, 2-3\tau) & \text{si } 1/3 \leqslant \tau \leqslant 2/3, \\ \mathrm{pr}(x'_1, x'_2, t'(3\tau-2)) & \text{si } \tau \geqslant 2/3. \end{cases}$$

12. En appliquant le théorème *5* on trouve que si les applications $f, g : X \to Y$ sont homotopes, les applications su f, su g: su $X \to$ su Y le sont également. On en déduit de la manière usuelle que si f est une équivalence homotopique, su f l'est également.

On trouve aussi que si les applications $f_1, g_1 : X_1 \to Y_1$ sont homotopes ainsi que les applications $f_2, g_2 : X_2 \to Y_2$, alors les applications $f_1 * f_2, g_1 * g_2 : X_1 * X_2 \to Y_1 * Y_2$ sont également homotopes. On en déduit de la manière usuelle que si f_1, f_2 sont des équivalences homotopiques, $f_1 * f_2$ l'est également.

13. Il est clair que l'application $\mathrm{rt}\, f$ du cylindre $\mathrm{Cyl}\, f$ de l'application $f : X_1 \to X_2$ sur X_2 (voir 2.6.10) est une rétraction de déformation stricte. Ainsi X_2 est un rétracte de déformation stricte de l'espace $\mathrm{Cyl}\, f$.

L'inclusion $X_1 \to \mathrm{Cyl}\, f$ est une équivalence homotopique si et seulement si f est une équivalence homotopique. En effet, la composée des applications $X_1 \xrightarrow{\mathrm{in}} \mathrm{Cyl}\, f \xrightarrow{\mathrm{rt}\, f} X_2$ coïncide avec f, tandis que $\mathrm{rt}\, f$ est une équivalence homotopique.

Le cas des espaces à point de base

14. Les propositions énoncées dans *2*, *3*, *6*, *7*, *10*, *11* et *12* peuvent être modifiées de manière évidente pour le cas des espaces à point de base. Notons en outre que le théorème *12*, dûment modifié,

est vrai pour les bouquets et les produits tensoriels: si les applications

$$f_\mu,\ g_\mu\colon (X_\mu,\ x_\mu) \to (Y_\mu,\ y_\mu)$$

sont homotopes pour tout μ, alors les applications

$$\bigvee_\mu f_\mu,\ \bigvee_\mu g_\mu\colon (\bigvee_\mu (X_\mu,\ x_\mu),\ \mathrm{bp}) \to (\bigvee_\mu (Y_\mu,\ y_\mu),\ \mathrm{bp})$$

sont homotopes; si chacune des applications f_μ est une équivalence homotopique, $\bigvee_\mu f_\mu$ est une équivalence homotopique; si les applications $f_1,\ g_1\colon (X_1,\ x_1) \to (Y_1,\ y_1)$ sont homotopes et les applications $f_2,\ g_2\colon (X_2,\ x_2) \to (Y_2,\ y_2)$ sont homotopes, alors les applications

$$f_1 \otimes f_2,\ g_1 \otimes g_2\colon ((X_1,\ x_1) \otimes (X_2,\ x_2),\ \mathrm{bp}) \to ((Y_1,\ y_1) \otimes \otimes (Y_2,\ y_2),\ \mathrm{bp})$$

le sont également et si f_1, f_2 sont des équivalences homotopiques, alors $f_1 \otimes f_2$ est une équivalence homotopique.

8. Exercices

1. Démontrer que la sphère S^∞ est contractile.

2. Démontrer que si $(X,\ A)$ est un couple de Borsuk et l'espace X est contractile, l'espace quotient X/A est homotopiquement équivalent à su A.

3. Démontrer que si le produit de deux espaces topologiques est homéomorphe à la suspension d'un espace topologique, alors ou bien les deux facteurs sont contractiles, ou bien l'un d'entre eux se réduit à un point.

4. Démontrer que si $f\colon X_1 \to X_2$ est une équivalence homotopique, X_1 est un rétracte de déformation stricte de l'espace $\mathrm{Cyl}\, f$.

5. Démontrer que si un espace métrisable X constitue, avec un point distingué x, un couple de Borsuk, alors la projection su $X \to$ su $(X,\ x)$ est une équivalence homotopique.

6. Démontrer que quels que soient un espace topologique connexe X et ses points x, y, la partie de l'espace $\mathscr{C}(I,\ 0;\ X,\ x)$ constituée des chemins passant par le point y est contractile.

CHAPITRE 2

ESPACES CELLULAIRES

§ 1. ESPACES CELLULAIRES ET LEURS PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES

1. Notions fondamentales

1. Une partition $\mathfrak{f}$ d'un espace topologique X est dite *cellulaire* si sur l'ensemble des éléments de cette partition est donnée une fonction d à valeurs entières non négatives telle que pour chaque élément e de $\mathfrak{f}$ il existe une application continue $D^{d(e)} \to X$ qui soit: (i) un homéomorphisme de $\operatorname{Int} D^{d(e)}$ sur e; (ii) une application de $S^{d(e)-1}$ dans la réunion des éléments de la partition $\mathfrak{f}$ sur lesquels d prend des valeurs inférieures à $d(e)$.

On appelle *cellules* les éléments d'une partition cellulaire et *cellules fermées*, leurs adhérences. Le nombre $d(e)$ s'appelle *dimension de la cellule* e; on le désigne généralement par $\dim e$. Une application continue $D^{d(e)} \to X$ jouissant des propriétés (i), (ii) est *caractéristique* pour e; elle sera notée cha_e.

Il est clair que $\mathrm{cha}_e(D^{\dim e}) \subset \mathrm{Cl}\, e$; si X est un espace de Hausdorff, alors $\mathrm{cha}_e(D^{\dim e}) = \mathrm{Cl}\, e$. En particulier, *les cellules fermées d'une partition cellulaire d'un espace de Hausdorff sont compactes.* Il est également clair que, *dans le cas d'un espace de Hausdorff la différence* $\mathrm{Cl}\, e \setminus e$ *se recouvre par des cellules de plus petites dimensions quelle que soit la cellule* e.

2. Une partition cellulaire est dite *équipée* si pour chacune de ses cellules on a choisi une application caractéristique. La famille $\{\mathrm{cha}_e : D^{\dim e} \to X\}$ des applications caractéristiques est appelée *équipement* de la partition, tandis que l'application

$$\mathrm{cha}: \bigsqcup_{e \in X/\mathfrak{f}} D^{\dim e} \to X,$$

définie par les relations $\mathrm{cha} \circ \mathrm{in}_e = \mathrm{cha}_e$, est appelée *application caractéristique totale.*

3. D'après les définitions générales du chapitre 1 (voir 1.2.4.3), le recouvrement d'un espace X par les cellules fermées d'une partition cellulaire $\mathfrak{f}$ définit dans X une deuxième topologie. La famille des ensembles fermés pour cette topologie peut être décrite de la manière suivante: un ensemble est fermé lorsque ses intersections

avec les cellules fermées de la partition $\mathfrak{f}$ sont fermées dans la topologie originale. La deuxième topologie est dite *faible* ou *cellulaire*; le passage à cette topologie est appelé *affaiblissement cellulaire*. Par ce passage, on ne peut qu'enrichir les familles des ensembles ouverts et fermés; en particulier, un espace de Hausdorff reste espace de Hausdorff. Dans tous les cas l'affaiblissement ne change pas la topologie des cellules fermées ainsi la partition $\mathfrak{f}$ reste cellulaire avec les mêmes applications caractéristiques.

Dans le cas où X est un espace de Hausdorff et la partition $\mathfrak{f}$ est équipée de $\{\mathrm{cha}_e\}$, la topologie cellulaire admet une description en termes de l'application caractéristique totale: l'ensemble A est ouvert (resp. fermé) lorsque son image inverse $\mathrm{cha}^{-1}(A)$ est ouverte (resp. fermée). Autrement dit, la topologie cellulaire coïncide avec la topologie apportée dans X par le quotient injectif de l'application cha de l'espace quotient de la réunion $\coprod_{e \in X/\mathfrak{f}} D^{\dim e}$ par la partition zer (cha). L'équivalence de cette description de la topologie cellulaire à celle donnée au début découle du fait que les applications cha_e sont fermées (voir 1.1.7.9).

4. On appelle *espace cellulaire* un espace de Hausdorff muni d'une partition cellulaire vérifiant les propriétés suivantes: (C) *toute cellule fermée ne rencontre qu'un nombre fini de cellules*; (W) *les cellules fermées constituent un recouvrement fondamental de l'espace*. La condition (W) signifie évidemment que la topologie de l'espace coïncide avec la topologie cellulaire. Les notations (C) et (W) sont généralement admises et proviennent des termes anglais *closure finiteness* et *weak topology*.

Il est clair que la propriété (C) est conservée par les affaiblissements cellulaires de la topologie. Par conséquent, un espace de Hausdorff muni d'une partition cellulaire possédant la propriété (C) devient un espace cellulaire après l'affaiblissement cellulaire de sa topologie.

La terminologie employée pour les partitions cellulaires est appliquée aux espaces cellulaires. En particulier, un espace cellulaire peut être fini, dénombrable et équipé. En particulier, dire qu'un espace cellulaire est fini c'est dire qu'il est constitué par un nombre fini de cellules et non par un nombre fini de points.

On appelle *dimension d'un espace cellulaire* la borne supérieure des dimensions de ses cellules; pour l'espace vide (considéré lui aussi comme un espace cellulaire), on la pose égale à -1. La dimension, finie ou infinie, d'un espace cellulaire X est désignée par $\dim X$.

L'ensemble des cellules de dimension r d'un espace cellulaire sera désigné par $\mathrm{cell}_r X$.

5. L'espace cellulaire le plus simple s'obtient en partitionnant un espace discret en cellules zéro-dimensionnelles (en points séparés). Il est clair que tous les espaces cellulaires zéro-dimensionnels sont ainsi constitués. Une partition d'un espace de Hausdorff à topologie

non discrète en cellules zéro-dimensionnelles ne vérifie pas la condition (W).

En guise d'exemple de partition cellulaire vérifiant la condition (W) mais ne vérifiant pas la condition (C), on peut citer la partition de la boule D^n pour $n > 1$ en la cellule Int D^n de dimension n et en cellules zéro-dimensionnelles recouvrant la sphère S^{n-1}.

Le cas localement fini

6. Conformément à la définition générale donnée dans 1.1.1.12, une partition cellulaire d'un espace est dite *localement finie* si chaque point de l'espace possède un voisinage qui coupe seulement un nombre fini de cellules. Condition équivalente : chaque point possède un voisinage qui coupe seulement un nombre fini de cellules fermées.

Il est clair que toute partie compacte d'un espace muni d'une partition cellulaire localement finie possède un voisinage qui coupe seulement un nombre fini de cellules. Il en découle qu'une partition cellulaire localement finie d'un espace de Hausdorff vérifie la condition (C). En ce qui concerne la condition (W), elle est toujours vérifiée en vertu du théorème 1.1.3.6 pour toute partition cellulaire localement finie. Ainsi, *un espace de Hausdorff muni d'une partition cellulaire finie ou localement finie est un espace cellulaire.*

7. Un espace cellulaire est localement fini si et seulement si chaque cellule ne coupe qu'un nombre fini de cellules fermées.

Démonstration. Si un espace cellulaire est localement fini, l'adhérence de toute cellule possède un voisinage qui ne coupe qu'un nombre fini de cellules (voir *6*), donc chaque voisinage, et la cellule elle-même, ne coupent pas d'adhérences d'autres cellules.

Si chaque cellule d'un espace cellulaire ne rencontre qu'un nombre fini de cellules fermées, alors, d'après les axiomes (C) et (W), la réunion d'une famille quelconque de cellules fermées est fermée. Par conséquent, le complémentaire de la réunion de toutes les cellules fermées qui ne coupent pas une cellule arbitraire e est, dans ce cas, un voisinage de la cellule e. Mais puisque ce complémentaire ne peut couper les cellules fermées qui ne coupent pas e, il ne peut couper qu'un nombre fini de cellules fermées.

Sous-espaces

8 (Lemme). *Si un sous-ensemble d'un espace cellulaire contient l'adhérence de la cellule de chacun de ses points, chaque partie de ce sous-ensemble qui coupe suivant des ensembles fermés les cellules fermées contenues dans ce sous-ensemble est elle-même fermée.*

En effet, si B est une telle partie et e une cellule arbitraire, l'intersection $B \cap \mathrm{Cl}\, e$ se présente sous la forme $\bigcup_{i=1}^{s} [(B \cap \mathrm{Cl}\, e_i) \cap \mathrm{Cl}\, e]$,

où $e_1, \ldots, e_s$ sont toutes les cellules du sous-ensemble qui coupent Cl e; elle est donc fermée.

9. Un sous-ensemble d'un espace cellulaire qui contient, avec chacun de ses points, l'adhérence de la cellule qui contient ce point, est appelé *sous-espace* de cet espace cellulaire. C'est un espace cellulaire: une partition cellulaire de l'espace induit dans chacun des sous-espaces une partition cellulaire vérifiant, d'après le lemme *8*, la condition (W) et, d'une manière évidente, la condition (C).

On tire du lemme *8* la conséquence suivante: tout sous-espace d'un espace cellulaire est fermé. Remarquons que la réunion et l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces sont des sous-espaces; d'autre part, tout recouvrement d'un espace cellulaire par ses sous-espaces est fondamental.

Un espace cellulaire et son sous-espace forment *un couple cellulaire.* D'une manière analogue on définit les *triplets* et les *triades cellulaires.*

Mise en garde: une cellule fermée n'est pas nécessairement un sous-espace. L'exemple correspondant est donné par le bouquet $(D^1, 0) \vee (S^2, \mathrm{ort}_1)$ partitionné en quatre cellules: les cellules zéro-dimensionnelles $\mathrm{imm}_1(-1)$ et $\mathrm{imm}_1(1)$, la cellule $\mathrm{imm}_1(\mathrm{Int}\, D^1)$ de dimension un et la cellule de dimension deux $\mathrm{imm}_2(S^2 \setminus \mathrm{ort}_1)$. Il est clair qu'il s'agit d'un espace cellulaire et que l'adhérence de la cellule de dimension deux a des points communs avec la cellule de dimension un, mais ne la contient pas.

10. Les sous-espaces les plus importants d'un espace cellulaire X sont ses *squelettes* $\mathrm{ske}_0 X$, $\mathrm{ske}_1 X, \ldots$, définis par la formule $\mathrm{ske}_r X = \bigcup_{\dim e \leqslant r} e$. Ils sont tous non vides lorsque X l'est (car s'il existe une cellule de dimension positive, il existe une cellule de plus petite dimension); pour des raisons d'ordre formel, on y rapporte le squelette vide $\mathrm{ske}_{-1} X$ et le squelette $\mathrm{ske}_\infty X = X$. Il est clair que $\{\mathrm{ske}_r X\}_{0 \leqslant r < \infty}$ est une filtration de l'espace X.

Remarquons que toute application $D^{\dim e} \to X$, caractéristique de la cellule e, applique $S^{\dim e - 1}$ dans $\mathrm{ske}_{\dim e - 1} X$ (en fait, ceci a déjà été indiqué dans *1*). Si X est muni d'un équipement $\{\mathrm{cha}_e\}$, l'application $\mathrm{ab}\,\mathrm{cha}_e : S^{\dim e - 1} \to \mathrm{ske}_{\dim e - 1} X$ est appelée *application d'attachement pour* e; on la désigne par att_e.

11. Chaque cellule d'un espace cellulaire est contenue dans un sous-espace fini.

La démonstration s'effectue par récurrence sur la dimension de la cellule. Une cellule zéro-dimensionnelle est elle-même un sous-espace. Si e est une cellule de dimension positive, alors l'ensemble $\mathrm{Cl}\, e \setminus e$ se recouvre par un nombre fini de cellules de plus petites dimensions; il est clair que la réunion des sous-espaces finis qui contiennent toutes ces cellules et de la cellule e elle-même est un sous-espace fini contenant e.

Sous-espaces compacts

12. Un sous-espace compact d'un espace cellulaire ne coupe qu'un nombre fini de cellules.

Démonstration. Dans tout sous-ensemble d'un espace cellulaire on peut trouver une partie qui coupe en un seul point chacune des cellules que rencontre ce sous-ensemble. Comme l'intersection d'une telle partie avec chaque cellule fermée est un ensemble fini, elle est fermée, de même que chacune de ses parties; elle est donc discrète; si le sous-ensemble donné est compact, elle est également compacte et, par conséquent, finie.

13. Un sous-ensemble compact d'un espace cellulaire est contenu dans un sous-espace fini.

Un tel sous-espace sera la réunion des sous-espaces finis qui contiennent toutes les cellules que rencontre le sous-ensemble donné.

14. Un sous-ensemble compact d'un espace cellulaire localement fini est contenu dans l'intérieur d'un sous-espace fini.

En effet, un tel sous-ensemble possède un voisinage qui ne coupe qu'un nombre fini de cellules (voir *6*) et la réunion des sous-espaces finis qui contiennent ces cellules est un sous-espace fini contenant le voisinage indiqué.

Applications cellulaires

15. Une application d'un espace cellulaire X dans un espace cellulaire Y est dite *cellulaire* si elle est continue et, quel que soit r, applique le squelette $\mathrm{ske}_r X$ dans le squelette $\mathrm{ske}_r Y$.

Il est clair qu'une application cellulaire envoie toute cellule zéro-dimensionnelle dans une cellule zéro-dimensionnelle. Une cellule de dimension positive n'a pas nécessairement pour image par une application cellulaire une cellule unique; par exemple, l'application identique du segment D^1 partitionné en cellules zéro-dimensionnelles -1, 1 et en une cellule de dimension un $(-1, 1)$, dans ce même segment, partitionné en cellules zéro-dimensionnelles -1, 0, 1 et en cellules de dimension un $(-1, 0)$, $(0, 1)$, applique la cellule de dimension un dans la réunion d'une cellule de dimension nulle et de deux cellules de dimension un.

16. Une application cellulaire est appelée *équivalence cellulaire* lorsqu'elle est bijective et l'application inverse est également cellulaire. Enoncé équivalent: une équivalence cellulaire est un homéomorphisme qui établit une bijection entre les deux partitions cellulaires. Deux espaces cellulaires entre lesquels peut exister une équivalence cellulaire sont dits *équivalents au sens cellulaire*. Deux espaces cellulaires équipés que l'on peut lier par une équivalence cellulaire qui soit une bijection entre les équipements s'appellent *équivalents avec équipements*.

Une application f d'un espace cellulaire X dans un espace cellulaire Y est appelée *plongement cellulaire* si $f(X)$ est un sous-espace de l'espace Y (dans le sens de *9*) et ab $f: X \to f(X)$ est une équivalence cellulaire.

Mise en garde : un homéomorphisme cellulaire n'est pas nécessairement une équivalence cellulaire. Exemple : l'homéomorphisme décrit dans *15*.

2. Espaces cellulaires comme recollements de boules

1. Pour $r \geqslant 0$ le squelette $\mathrm{ske}_r X$ *d'un espace cellulaire équipé X est canoniquement homéomorphe à l'espace* $(\mathrm{ske}_{r-1} X) \cup_\varphi (\sqcup_{e \in \mathrm{M}_r} (D_e = D^r))$, *où* $\mathrm{M}_r = \mathrm{cell}_r X$, *et* φ *est une application de l'espace* $\sqcup_{e \in \mathrm{M}_r} (S_e = S^{r-1})$ *dans* $\mathrm{ske}_{r-1} X$ *définie par la formule* $\varphi \circ \mathrm{in}_e = \mathrm{att}_e$ $(e \in \mathrm{M}_r)$.

L'homéomorphisme canonique $(\mathrm{ske}_{r-1} X) \cup_\varphi (\sqcup_{e \in \mathrm{M}_r} D_e) \to \mathrm{ske}_r X$ est obtenu en prenant le quotient bijectif de l'application $(\mathrm{ske}_{r-1} X) \sqcup (\sqcup_{e \in \mathrm{M}_r} D_e) \to \mathrm{ske}_r X$ définie par l'inclusion $\mathrm{ske}_{r-1} X \to \mathrm{ske}_r X$ et par les applications ab $\mathrm{cha}_e: D_e \to \mathrm{ske}_r X$.

2. La description donnée dans 1.3 de la topologie faible en termes de l'application caractéristique totale nous montre déjà qu'un espace cellulaire peut être obtenu par un recollement de boules assez spécial. Le théorème *1* décompose cette identification en une suite d'attachements : le r-ième attachement transforme $\mathrm{ske}_{r-1} X$ en $\mathrm{ske}_r X$ $(r = 0, 1, \ldots)$ et X se définit d'après la suite $\{\mathrm{ske}_r X\}$ suivant la formule $X = \lim \mathrm{ske}_r X$ (voir 1.10).

La formalisation suivante fait de cette description de l'espace cellulaire une méthode récurrente de construction. Remarquons tout d'abord que si l'on attache à un espace topologique A, muni d'une partition cellulaire équipée dont toutes les cellules sont de dimension inférieure à q, une somme $\sqcup_{\mu \in \mathrm{M}} (D_\mu = D^q)$ de boules de dimension q à l'aide d'une application continue $\varphi: \sqcup_{\mu \in \mathrm{M}} (S_\mu = S^{q-1}) \to A$, on obtient un espace muni d'une structure de partition cellulaire équipée dont toutes les cellules sont de dimension inférieure à $q + 1$. Cet espace vérifie la condition (W) si A vérifie cette condition ; d'après le théorème 1.2.4.9 il est normal si A est normal ; le théorème 1.12 implique qu'il vérifie la condition (C) si A est cellulaire ; ainsi, si A est un espace cellulaire équipé normal, alors $A \cup_\varphi (\sqcup_{\mu \in \mathrm{M}} D_\mu)$ est également un espace cellulaire équipé normal. Ces remarques sont à la base de notre méthode de construction par récurrence. Nous commençons par $q = 0$, i.e. par un ensemble A vide, et à la r-ième étape nous attachons à l'espace cellulaire X_{r-1}, obtenu précédemment et tel que $\dim X_{r-1} \leqslant r - 1$, l'espace $\sqcup_{\mu \in \mathrm{M}_r} (D_\mu = D^r)$ à l'aide d'une application continue $\varphi_r: \sqcup_{\mu \in \mathrm{M}_r} (S_\mu = S^{r-1}) \to X_{r-1}$. Le résultat de la r-ième étape est un espace cellulaire équipé normal $X_r = X_{r-1} \cup_{\varphi_r} (\sqcup_\mu D_\mu)$, $\dim X_r \leqslant r$, tandis que le résultat final

est la suite $X_{-1} = \varnothing$, X_0, X_1, . . . avec des plongements cellulaires naturels $X_r \to X_{r+1}$ et l'espace limite $X = \lim X_r$. Ce dernier est normal d'après le théorème 1.2.4.6 et admet une partition cellulaire évidente vérifiant les conditions (C) et (W). Ainsi X est un espace cellulaire équipé normal. Il est immédiat que $\mathrm{ske}_r X = X_r$.

Nous dirons alors que X est un *espace cellulaire à recollements successifs*. D'après ce qui précède, chaque espace cellulaire équipé est équivalent avec équipement à un espace cellulaire obtenu par recollements successifs.

3 (Corollaire). *Tout espace cellulaire est normal.*

3. Partitions cellulaires canoniques de la sphère, de la boule et des espaces projectifs

1. Les sphères, les boules et les espaces projectifs admettent des partitions cellulaires équipées canoniques qui en font des espaces cellulaires. Le fait que ces partitions vérifient les conditions (C) et (W) est toujours évident.

2. La partition cellulaire canonique de la sphère S^n pour $0 \leqslant n < \infty$ est constituée par la cellule zéro-dimensionnelle ort_1 et par la cellule $S^n \setminus \mathrm{ort}_1$ de dimension n. L'application caractéristique canonique de la cellule $S^n \setminus \mathrm{ort}_1$ est $DS : D^n \to S^n$.

3. La partition cellulaire canonique de la boule D^n avec $1 \leqslant n < \infty$ est constituée par la cellule zéro-dimensionnelle ort_1, la cellule $S^{n-1} \setminus \mathrm{ort}_1$ de dimension $n - 1$ et la cellule $\mathrm{Int}\, D^n$ de dimension n. L'application caractéristique canonique pour la cellule $S^{n-1} \setminus \mathrm{ort}_1$ est la composée des applications

$$D^{n-1} \xrightarrow{DS} S^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{in}} D^n,$$

et pour la cellule $\mathrm{Int}\, D^n$ c'est l'application identique $\mathrm{id}\, D^n$.

4. La partition cellulaire canonique de l'espace projectif réel $\mathbf{R}P^n$ $(0 \leqslant n \leqslant \infty)$ est la famille de cellules $e_r = \mathbf{R}P^r \setminus \mathbf{R}P^{r-1}$ telles que $\dim e_r = r$, où $0 \leqslant r \leqslant n$ (pour $n < \infty$) et $0 \leqslant r < \infty$ (pour $n = \infty$). En guise d'application caractéristique canonique pour e_r, on prend la suite des applications

$$D^r \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbf{R}P^r \xrightarrow{\mathrm{in}} \mathbf{R}P^n,$$

où pr correspond au passage à l'espace quotient décrit dans 1.2.5.2.

Il est clair que att_{e_r} est l'application $\mathrm{pr} : S^{r-1} \to \mathbf{R}P^{r-1}$ et que $\mathrm{ske}_r \mathbf{R}P^n = \mathbf{R}P^r$ lorsque $r \leqslant n$.

5. La partition cellulaire canonique de l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^n$ $(0 \leqslant n \leqslant \infty)$ est la famille de cellules $e_r = \mathbf{C}P^r \setminus \mathbf{C}P^{r-1}$ pour $\dim e_r = 2r$ (où $0 \leqslant r \leqslant n$ pour $n < \infty$ et $0 \leqslant r < \infty$ pour $n = \infty$). En guise d'application canonique caractéristique pour e_r,

on prend la composée des applications

$$D^{2r} \xrightarrow{\text{pr}} \mathbb{C}P^r \xrightarrow{\text{in}} \mathbb{C}P^n.$$

Il est clair que $\operatorname{ske}_r \mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{[r/2]}$ si $r \leqslant 2n$.

D'une manière analogue, on définit les partitions cellulaires équipées canoniques des espaces $\mathbb{H}P^n$ $(0 \leqslant n \leqslant \infty)$ et $\mathbb{C}\mathrm{a}P^n$ $(0 \leqslant n \leqslant 2)$. La partition de l'espace $\mathbb{H}P^n$ est la famille de cellules $e_r = \mathbb{H}P^r \setminus \mathbb{H}P^{r-1}$ avec $\dim e_r = 4r$ (où $0 \leqslant r \leqslant n$ pour $n < \infty$ et $0 \leqslant r < \infty$ pour $n = \infty$), tandis que la partition de l'espace $\mathbb{C}\mathrm{a}P^n$ est constituée par les cellules $e_r = \mathbb{C}\mathrm{a}\, P^r \setminus \mathbb{C}\mathrm{a}\, P^{r-1}$ avec $\dim e_r = 8r$ pour $0 \leqslant r \leqslant n$.

4. Autres propriétés topologiques des espaces cellulaires

1. Dans ce sous-paragraphe nous allons montrer comment sont liées les propriétés d'un espace cellulaire telles que la compacité, la compacité locale, la séparabilité, l'existence d'une base dénombrable et la métrisabilité d'une part et les propriétés de sa partition cellulaire telles que la dénombrabilité, la propriété d'être finie ou d'être localement finie de l'autre. En passant, nous démontrons que les espaces cellulaires finis sont des SCNR. En outre, nous considérons les conditions de connexité d'un espace cellulaire et de sa partition en composantes.

Compacité et compacité locale

2. Un espace cellulaire est compact si, et seulement si, il est fini.

La nécessité de cette condition découle de 1.12 et sa suffisance du fait qu'un espace cellulaire fini se recouvre par un nombre fini de cellules fermées.

3. Un espace cellulaire est localement compact si, et seulement si, il est localement fini.

Cette condition est nécessaire car le voisinage à adhérence compacte d'un point coupe, d'après le théorème 1.12, seulement un nombre fini de cellules. Elle est suffisante puisque l'adhérence d'un voisinage qui coupe seulement un nombre fini de cellules est contenue dans la réunion des adhérences de ces cellules.

Théorèmes de plongement

4. Un espace cellulaire fini peut être plongé dans un espace euclidien de dimension suffisamment grande.

Cette proposition se démontre par construction, pour un espace cellulaire fini X de dimension $n \geqslant 0$, d'un plongement $J : X \to \mathbb{R}^{q+n+1}$

d'après un plongement $j: \mathrm{ske}_{n-1} X \to \mathsf{R}^q$ (le début de la récurrence est trivial, puisqu'un espace cellulaire de dimension -1 est vide). Equipons X et numérotons toutes les cellules de dimension n pour former une suite $e_1, \ldots, e_s$. Définissons ensuite les applications $\varphi_1, \ldots, \varphi_s: D^n \to \mathsf{R}^{q+n+1}$ par la formule

$$\varphi_k(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} (0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + 2k, 1), \\ \qquad\qquad \text{si } \rho = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2} \leqslant 1/2, \\ (2\rho - 1)\, j \circ \mathrm{cha}_{e_k}\left(\frac{y_1}{\rho}, \ldots, \frac{y_n}{\rho}\right) + \\ \qquad + \left(2 - 2\rho\right)\left(0, \ldots, 0, \frac{y_1}{2\rho}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{2\rho}, \frac{y_n}{2\rho} + 2k, 1\right), \\ \qquad\qquad \text{si } \rho \geqslant 1/2, \end{cases}$$

et posons

$$J(x) = \begin{cases} j(x) & \text{si } x \in \mathrm{ske}_{n-1} X, \\ \varphi_k(y) & \text{si } x \in \mathrm{Cl}\, e_k \text{ et } x = \mathrm{cha}_{e_k}(y). \end{cases}$$

La dernière formule définit une application continue $J: X \to \mathsf{R}^{q+n+1}$ (voir 1.1.4.3); comme le plan $y_1 = 0, \ldots, y_q = 0, y_{q+n+1} = 1$ ne possède pas de droites parallèles à R^q, cette application est injective. Par conséquent, c'est un plongement (voir 1.1.7.10).

5. *Un espace cellulaire fini est un SCNR.*

La démonstration s'obtient par récurrence sur n, en continuant le raisonnement précédent. Nous montrerons que $\mathsf{R}^q \cup J(X)$ est un rétracte de voisinage de l'espace R^{q+n+1}. Ceci est suffisant, puisque le fait que $j(\mathrm{ske}_{n-1} X)$ est un rétracte de voisinage de l'espace R^q implique évidemment que $J(X)$ est un rétracte de voisinage de l'espace $\mathsf{R}^q \cup J(X)$.

Posons $A_k = \varphi_k(\mathrm{Int}\, D^n)$ et $B_k = A_k \cap \{(x_1, \ldots, x_{q+n+1}) \mid \times \times x_{q+n+1} \neq 1\}$.

Les ensembles $A_1, \ldots, A_s$ étant fermés dans $\mathsf{R}^{q+n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^s \times \times \varphi_k(S^{n-1})$ et deux à deux disjoints, ils possèdent dans $\mathsf{R}^{q+n+1} \setminus \setminus \bigcup_{k=1}^s \varphi_k(S^{n-1})$ des voisinages disjoints $U_1, \ldots, U_s$; il est clair que ces derniers sont ouverts dans R^{q+n+1}. Comme en outre les ensembles $A_1, \ldots, A_s$ sont homéomorphes à R^n, les applications identiques $A_1 \to A_1, \ldots, A_s \to A_s$ se prolongent en des applications continues $\psi_1: U_1 \to A_1, \ldots, \psi_s: U_s \to A_s$ (voir 1.1.5.12). Posons

$$V_k = \{x \in U_k \mid \mathrm{dist}(x, \psi_k(x)) < \mathrm{Dist}(x, \mathsf{R}^q)\},$$
$$V = \{x \in \mathsf{R}^{q+n+1} \mid \mathrm{Dist}(x, \mathsf{R}^q) < 1/2\}$$

et désignons par ψ la projection orthogonale $V \to \mathsf{R}^q$. On voit que $W = V \cup V_1 \cup \ldots \cup V_s$ est un voisinage de l'ensemble $\mathsf{R}^q \cup$

$\bigcup J(X)$ dans R^{q+n+1} et que les ensembles

$$\begin{gathered}\{[(\bigcup_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}\, V_k) \cap \mathrm{Fr}\, V] \cup \bigcup_{k=1}^{s} A_k\} \cap W, \\ [(\bigcup_{k=1}^{s} \mathrm{Fr}\, V_k) \cap \mathrm{Cl}\, V \cap W] \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \varphi_k (S^{n-1})\end{gathered} \tag{1}$$

sont disjoints et fermés dans $Y \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \varphi_k (S^{n-1})$, où $Y = (\bigcup_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}\, V_k) \cap \mathrm{Cl}\, V \cap W$. Soit $f\colon Y \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \varphi_k (S^{n-1}) \to I$ une fonction d'Urysohn du couple (1). Désignons par u_{yz} pour $y \in \mathrm{Cl}\, B_k$, $z \in \mathsf{R}^q$ le chemin dans l'espace $\mathsf{R}^q \cup J(X)$ défini comme le produit du segment de droite joignant y à $\varphi_k (\varphi_k^{-1}(y)/\mathrm{dist}\,(0, \varphi_k^{-1}(y)))$ et du segment de droite joignant $\varphi_k (\varphi_k^{-1}(y)/\mathrm{dist}\,(0, \varphi_k^{-1}(y)))$ à z, et définissons l'application

$$\sigma\colon (\bigcup_{k=1}^{s} \mathrm{Cl}\, B_k) \times \mathsf{R}^q \times I \to \mathsf{R}^q \cup J(X)$$

par la formule $\sigma(y, z, t) = u_{yz}(t)$. D'après **1.2.2.14**, l'application $\tau\colon Y \to \mathsf{R}^q \cup J(X)$ définie par la formule

$$\tau(x) = \begin{cases} \sigma(\psi_k(x), \psi(x), f(x)) & \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad x \in (\mathrm{Cl}\, V_k \cap \mathrm{Cl}\, V \cap W) \setminus \varphi_k (S^{n-1}), \\ x \qquad\quad \text{pour} \quad x \in \bigcup_{k=1}^{s} \varphi_k (S^{n-1}) \end{cases}$$

est continue. Par conséquent, en vertu de **1.1.4.3**, l'application $W \to \mathsf{R}^q \cup J(X)$ définie par la formule

$$x \mapsto \begin{cases} \psi_k(x) & \text{pour} \quad x \in \mathrm{Cl}\, V_k \cap (W \setminus V), \\ \psi(x) & \text{pour} \quad x \in W \setminus \bigcup_{k=1}^{s} V_k, \\ \tau(x) & \text{pour} \quad x \in Y \end{cases}$$

l'est également ; il est évident que c'est une rétraction.

Connexité. Composantes

6. Les composantes d'un espace cellulaire sont des sous-espaces ouverts.

Démonstration. Une cellule fermée est connexe, étant l'image d'une boule par l'application caractéristique ; par conséquent, la composante d'un espace cellulaire contient, avec chacun de ses points, l'adhérence de la cellule qui contient ce point, i.e. elle est un sous-espace. Le complémentaire d'une composante est la réunion de toutes les autres composantes ; c'est donc également un sous-espace ; il est donc fermé, i.e. la composante est ouverte.

7. Si $r \geqslant 1$, alors le r-ième squelette d'une composante d'un espace cellulaire est composante de son r-ième squelette. En particulier, un espace cellulaire est connexe si et seulement si son premier squelette est connexe.

Démonstration. Si A est une composante d'un espace cellulaire X, alors évidemment $\mathrm{ske}_r A = A \cap \mathrm{ske}_r X$ pour chaque r; il est clair que si B est une autre composante de l'espace X, alors $\mathrm{ske}_r A$ et $\mathrm{ske}_r B$ sont situés dans des composantes distinctes de l'espace $\mathrm{ske}_r X$. Par conséquent, il suffit de montrer que les squelettes $\mathrm{ske}_r A$ pour $r \geqslant 1$ sont connexes ou, ce qui revient au même, que les squelettes $\mathrm{ske}_r X$ pour $r \geqslant 1$ sont connexes lorsque X l'est. Mais ceci devient évident si l'on remarque que la construction d'un espace cellulaire par attachements successifs décrite dans 2.2 ne peut aboutir à un espace connexe si l'un des espaces X_r pour $r \geqslant 1$ n'est pas connexe.

8. Un espace cellulaire localement fini connexe est dénombrable.

Démonstration. Chosissions dans l'espace cellulaire localement fini connexe considéré X un point x_0 quelconque et désignons par A_m l'ensemble des points que l'on peut joindre à x_0 par un chemin qui ne rencontre pas plus de m cellules. Puisqu'un chemin ne peut couper qu'un nombre fini de cellules (voir 1.12), on a $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$; il est clair que les ensembles A_m sont constitués par des cellules entières; il suffit donc d'établir que le nombre de cellules contenues dans A_m est fini pour tout m.

Ceci se vérifie par récurrence sur m. Il est clair que l'adhérence de chaque cellule provenant de A_{m+1} coupe l'adhérence d'une certaine cellule de A_m, tandis que le fait que l'espace X est localement fini implique que l'adhérence d'une cellule de A_m (de même que chaque sous-ensemble compact de l'espace X) coupe seulement un nombre fini de cellules fermées. Le fait que le nombre des cellules qui constituent A_m est fini implique que le nombre des cellules constituant A_{m+1} est également fini, il ne reste donc qu'à remarquer que A_1 est une cellule.

Axiomes de dénombrabilité et de métrisabilité

9. Un espace cellulaire est séparable si, et seulement si, il est dénombrable.

Démonstration. Un sous-ensemble dénombrable partout dense d'un espace cellulaire dénombrable peut être obtenu en prenant la réunion des sous-ensembles dénombrables partout denses de ses cellules.

La dénombrabilité d'un espace cellulaire séparable découle du fait que chacun de ses points est contenu dans un sous-espace fini (voir 1.11): la réunion des sous-espaces finis contenant des points d'un ensemble dénombrable partout dense est un sous-ensemble dénombrable qui coïncide avec l'espace tout entier.

10 (Lemme). *Si un espace cellulaire X possède une base dénombrable au point x_0, cette base contient un voisinage du point x_0 qui ne coupe qu'un nombre fini de cellules de X.*

Supposons le contraire. Numérotons les éléments de la base en une suite U_1, U_2, . . . et construisons dans $X \setminus x_0$ (en procédant par récurrence) une suite x_1, x_2, . . . telle que : (i) $x_i \in U_i$; (ii) pour $i \neq j$ x_i et x_j sont contenus dans des cellules distinctes. Puisque chaque cellule fermée contient seulement un nombre fini de points x_i, l'ensemble constitué de tous les points x_i est fermé et son complémentaire serait un voisinage du point x_0. Or, ceci est impossible, puisque le complémentaire indiqué ne contient aucun des voisinages U_1, U_2, . . .

11. Pour qu'un espace cellulaire vérifie le premier axiome de dénombrabilité, il faut et il suffit qu'il soit localement fini.

La nécessité découle du lemme *10*. Pour démontrer la suffisance, remarquons qu'en vertu du théorème 1.14, chaque point d'un espace cellulaire localement fini possède un voisinage contenu dans un sous-espace fini. En vertu du théorème *4*, un tel sous-espace, et par suite le voisinage indiqué, vérifie le premier axiome de dénombrabilité ; il est clair qu'une base dénombrable de ce voisinage au point considéré sera une base dénombrable de l'espace en ce point.

12. Pour qu'un espace cellulaire possède une base dénombrable, il est nécessaire et suffisant qu'il soit dénombrable et localement fini.

La nécessité découle de *9* et *11*. Pour démontrer la suffisance, choisissons pour chaque cellule fermée un voisinage contenu dans un sous-espace fini (voir 1.14). Il découle du théorème *4* que ces voisinages vérifient le deuxième axiome de dénombrabilité et, par conséquent, la réunion de leurs bases dénombrables est une base dénombrable de l'espace.

13. Pour qu'un espace cellulaire soit métrisable, il est nécessaire et suffisant qu'il soit localement fini.

La nécessité découle de *11*. La métrisabilité d'un espace cellulaire localement fini connexe découle des théorèmes *8*, *12*, de 2.3 et 1.1.6.9. La métrisabilité d'un espace cellulaire localement fini arbitraire découle de la métrisabilité de ses composantes, puisqu'il est homéomorphe à leur somme (voir *6* et 1.2.1.2).

5. Constructions cellulaires

1. Les constructions décrites dans le § 1.2 se modifient d'une façon naturelle pour le cas des espaces cellulaires. Pour certaines de ces constructions, la modification consiste à munir l'espace obtenu d'une partition cellulaire qui en fait un espace cellulaire ; tel est le cas de la somme d'espaces. Pour d'autres constructions, par exemple pour le produit, la modification concerne également la topologie de l'espace obtenu.

Nous décrivons plus loin les modifications les plus importantes des deux types. Notons que dans le cas des espaces cellulaires équipés elles nous amènent à des espaces cellulaires équipés.

Produit cellulaire

2. Le produit $X_1 \times X_2$ des espaces topologiques X_1, X_2, munis de partitions cellulaires $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ possède une partition cellulaire naturelle, à savoir la partition $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$ avec $\dim(e_1 \times e_2) = \dim e_1 + \dim e_2$. On peut prendre pour application caractéristique de $e_1 \times e_2$ la composée de l'homéomorphisme canonique $D^{\dim e_1 + \dim e_2} \to D^{\dim e_1} \times \times D^{\dim e_2}$ (voir 1.2.6.9) et du produit $\mathrm{cha}_{e_1} \times \mathrm{cha}_{e_2}$: $D^{\dim e_1} \times \times D^{\dim e_2} \to X_1 \times X_2$ de deux applications caractéristiques arbitraires cha_{e_1}: $D^{\dim e_1} \to X_1$, cha_{e_2}: $D^{\dim e_2} \to X_2$. Dans le cas où les partitions $\mathfrak{f}_1$ $\mathfrak{f}_2$, sont équipées, ceci nous donne un équipement canonique pour $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$.

Si les partitions $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ possèdent la propriété (C), la partition $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$ la possède également. Par contre, la condition (W) peut ne pas être vérifiée pour la partition $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$ même dans le cas où X_1, X_2 sont des espaces cellulaires; voir exercice 6.6. Le produit des espaces cellulaires X_1, X_2 se transforme, par affaiblissement cellulaire de la topologie, en un espace cellulaire appelé *produit cellulaire*; on le désigne par $X_1 \times_c X_2$.

Notons que l'affaiblissement cellulaire d'une topologie ne change pas la topologie des parties compactes de l'espace $X_1 \times X_2$. En effet, un sous-ensemble compact de l'espace $X_1 \times X_2$ possède des images compactes par projections $X_1 \times X_2 \to X_1$, $X_1 \times X_2 \to X_2$ et se recouvre donc par un nombre fini de cellules.

3. Si un espace X_1 est localement fini, alors $X_1 \times_c X_2 = X_1 \times X_2$ pour tout espace cellulaire X_2.

Démonstration. Soient cha^1, cha^2 les applications caractéristiques totales correspondant à un équipement quelconque des partitions cellulaires $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ des espaces X_1, X_2. Il est évident que l'application caractéristique totale qui correspond à la partition $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$ peut être représentée comme la suite des applications

$$\sqcup D^{\dim(e_1 \times e_2)} \to \sqcup (D^{\dim e_1} \times D^{\dim e_2}) =$$

$$= (\sqcup D^{\dim e_1}) \times (\sqcup D^{\dim e_2}) \xrightarrow{\mathrm{cha}^1 \times \mathrm{cha}^2} X_1 \times X_2, \qquad (2)$$

où la flèche à gauche désigne la somme des homéomorphismes canoniques $D^{\dim(e_1 \times e_2)} \to D^{\dim e_1} \times D^{\dim e_2}$. Puisque les partitions $\mathfrak{f}_1$ et $\mathfrak{f}_2$ vérifient la condition (W), les applications cha^1 et cha^2 sont des applications quotients (voir 1.3), et puisque les espaces $\sqcup D^{\dim e_2}$ et X_1 sont localement compacts (voir 4.3), l'application $\mathrm{cha}^1 \times \mathrm{cha}^2$ est également une application quotient (voir 1.2.7.9). Alors la composée des applications (2) l'est également et la partition $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$ vérifie la condition (W).

4 (Information). Si chaque point des espaces cellulaires X_1, X_2 possède un voisinage qui ne rencontre qu'un ensemble dénombrable de cellules, alors $X_1 \times_c X_2 = X_1 \times X_2$. Une démonstration est donnée dans [6].

Attachements

5. Soient X_1, X_2 des espaces cellulaires, C un sous-espace de l'espace X_1 et $\varphi : C \to X_2$ une application cellulaire. Conformément à 1.2.4.8, on a l'espace topologique $X_2 \cup_\varphi X_1$ et il découle de 2.3 et de 1.2.4.9 qu'il est normal. Décomposons-le en ensembles $\mathrm{imm}_1\, e_1$ et $\mathrm{imm}_2\, e_2$, où e_1 parcourt toutes les cellules de $X_1 \setminus C$, tandis que e_2 parcourt toutes les cellules de X_2 et posons $\dim(\mathrm{imm}_1\, e_1) = \dim e_1$, $\dim(\mathrm{imm}_2\, e_2) = \dim e_2$. On obtient ainsi une partition cellulaire : en guise d'application canonique de l'ensemble $\mathrm{imm}_i\, e_i$ on peut prendre la composée d'une application caractéristique arbitraire cha_{e_i} et de imm_i. Il est clair que l'adhérence de la cellule $\mathrm{imm}_1\, e_1$ ne coupe que des cellules de la forme $\mathrm{imm}_1\, \varepsilon_1$, où ε_1 est une cellule de X_1 coupant $\mathrm{Cl}\, e_1$, et des cellules de la forme $\mathrm{imm}_2\, \varepsilon_2$, où ε_2 est une cellule de X_2 coupant $\varphi(\mathrm{Cl}\, e_1 \cap C)$. De même, l'adhérence de la cellule $\mathrm{imm}_2\, e_2$ ne coupe que des cellules de la forme $\mathrm{imm}_2\, \varepsilon_2$, où ε_2 est une cellule de X_2 qui rencontre $\mathrm{Cl}\, e_2$. Par conséquent, la partition construite vérifie la condition (C). Elle vérifie également la condition (W), car le fait que les intersections de la partie F de l'espace $X_2 \cup_\varphi X_1$ avec les cellules fermées sont fermées implique, en vertu de la formule

$$\mathrm{imm}_2^{-1}(F) \cap \mathrm{Cl}\, e_2 = \mathrm{imm}_2^{-1}(F \cap \mathrm{Cl}\,(\mathrm{imm}_2\, e_2)),$$

que l'ensemble $\mathrm{imm}_2^{-1}(F)$ est fermé et, en vertu de la formule

$$\mathrm{imm}_1^{-1}(F) \cap \mathrm{Cl}\, e_1 = \begin{cases} \varphi^{-1}(\mathrm{imm}_2^{-1}(F) \cap \varphi(\mathrm{Cl}\, e_1)) & \text{si } e_1 \subset C, \\ \mathrm{imm}_1^{-1}(F \cap \mathrm{Cl}\,(\mathrm{imm}_1\, e_1)) & \text{si } e_1 \subset X_1 \setminus C, \end{cases}$$

que l'ensemble $\mathrm{imm}_1^{-1}(F)$ est fermé. Ainsi nous avons rendu l'espace $X_2 \cup_\varphi X_1$ cellulaire ; $\mathrm{imm}_2(X_2)$ est un sous-espace de cet espace, imm_2 un plongement cellulaire et imm_1 une application cellulaire.

Lorsque $X_2 = D^0$, l'application $\varphi : C \to X_2$ est cellulaire, quel que soit le couple cellulaire (X_1, C) et l'on a $X_2 \cup_\varphi X_1 = X_1/C$. Ainsi, la définition précédente transforme l'espace quotient d'un espace cellulaire par son sous-espace cellulaire en un espace cellulaire.

Limites

6. Soient X_0, X_1, ... des espaces cellulaires et $\varphi_0 : X_0 \to X_1$, $\varphi_1 : X_1 \to X_2$, ... des plongements cellulaires. Conformément à 1.2.4.4, l'espace topologique $\lim(X_k, \varphi_k)$ est défini, et il découle de 2.3 et de 1.2.4.6 qu'il est normal. Décomposons-le en des ensembles

de la forme $\mathrm{imm}_k\, e_k$, où e_k est une cellule de $X_k \setminus \varphi_{k-1}\,(X_{k-1})$, $k = 0, 1, \ldots$; posons $\dim(\mathrm{imm}_k\, e_k) = \dim e_k$. On obtient ainsi une partition cellulaire; en guise d'application caractéristique pour $\mathrm{imm}_k\, e_k$ on peut prendre la composée d'une application caractéristique arbitraire cha_{e_k} avec imm_k. Il est évident que cette partition vérifie les conditions (C) et (W) et transforme ainsi $\lim(X_k, \varphi_k)$ en un espace cellulaire. Il est clair que les imm_k sont des plongements cellulaires.

Remarquons que cette définition de la limite contient la construction dont nous nous sommes servis dans le sous-paragraphe 2 pour former des espaces cellulaires à partir de boules par recollement.

Constructions spéciales

7. Puisque la partition de l'intervalle fermé I en cellules 0, 1, Int I en fait un espace cellulaire fini, le cylindre $X \times I$ est un espace cellulaire pour chaque espace cellulaire X; voir *2* et *3*. Puisque les bases d'un tel cylindre sont ses sous-espaces dans le sens de 1.9, le passage à l'espace quotient qui le transforme en cône X et un nouveau passage à l'espace quotient qui transforme cône X en su X sont conformes à la définition *5* et, par conséquent, le cône et la suspension d'un espace cellulaire sont également des espaces cellulaires.

Si $f\colon X_1 \to X_2$ est une application cellulaire, alors les attachements qui transforment $X_1 \times I$ en Cyl f et cône X_1 en Cône f sont également conformes à la définition *5*. Ainsi le cylindre et le cône d'une application cellulaire sont des espaces cellulaires.

8. Nous définissons le *join cellulaire* $X_1 *_c X_2$ des espaces cellulaires X_1, X_2 par la formule

$$X_1 *_c X_2 = (X_1 \sqcup X_2) \cup_\varphi [(X_1 \times_c X_2) \times I],$$

où φ est l'application de la réunion $[(X_1 \times_c X_2) \times 0] \cup \cup [(X_1 \times_c X_2) \times 1]$ dans $X_1 \sqcup X_2$, définie par les formules

$$\varphi(x_1, x_2, 0) = \mathrm{in}_1(x_1), \quad \varphi(x_1, x_2, 1) = \mathrm{in}_2(x_2);$$

voir 1.2.6.3. Comme φ est une application cellulaire, $X_1 *_c X_2$ est un espace cellulaire.

Si X_1 est localement fini, alors en vertu de *3*, $X_1 *_c X_2$ coïncide, comme espace topologique, avec $X_1 * X_2$. Dans le cas général, la partition cellulaire de l'espace $X_1 *_c X_2$ est évidemment cellulaire tout aussi bien pour $X_1 * X_2$, de sorte que $X_1 *_c X_2$ s'obtient de $X_1 * X_2$ par affaiblissement cellulaire de la topologie. Il est clair que ceci ne change pas la topologie des parties compactes de l'espace $X_1 * X_2$ (cf. *2*).

Le cas des espaces à point de base

9. Si X est un espace cellulaire muni d'une cellule zéro-dimensionnelle distinguée x_0, le cône cône (X, x_0) et la suspension su (X, x_0) s'obtiennent du cône cône X et de la suspension su X par passage au quotient par un sous-espace ; par conséquent, ce sont des espaces cellulaires. D'une manière analogue, le bouquet d'une famille d'espaces cellulaires à cellules zéro-dimensionnelles distinguées s'obtient de la somme de ces espaces par passage au quotient par un sous-espace ; c'est donc également un espace cellulaire.

Enfin, nous définissons le *produit tensoriel cellulaire* des espaces cellulaires X_1, X_2 à cellules zéro-dimensionnelles distinguées x_1, x_2 comme étant l'espace quotient $(X_1 \times {}_cX_2)/[(X_1 \times x_2) \cup (x_1 \times X_2)]$ et leur *join cellulaire* comme étant l'espace quotient $(X_1 * {}_cX_2)/(x_1 * x_2)$. Ce sont des espaces cellulaires que l'on désigne respectivement par $(X_1, x_1) \otimes {}_c(X_2, x_2)$ et $(X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)$. Si X_1 est localement fini, ces espaces coïncident, comme espaces topologiques, avec $(X_1, x_1) \otimes (X_2, x_2)$ et $(X_1, x_1) * (X_2, x_2)$ respectivement ; dans le cas général leur partition cellulaire est cellulaire pour $(X_1, x_1) \otimes \otimes (X_2, x_2)$ et $(X_1, x_1) * (X_2, x_2)$, de sorte qu'ils s'obtiennent à partir de ces derniers par un affaiblissement cellulaire de la topologie qui ne change évidemment pas la topologie des parties compactes des espaces $(X_1, x_1) \otimes (X_2, x_2)$, $(X_1, x_1) * (X_2, x_2)$.

6. Exercices

1. Démontrer que pour tout espace cellulaire X et chacun de ses points x, il existe un espace cellulaire Y et un homéomorphisme cellulaire $f\colon X \to Y$ tels que $f(x) \in \mathrm{ske}_0\, Y$.

2. Démontrer que la sphère S^∞ et la boule D^∞ sont homéomorphes à des espaces cellulaires.

3. Démontrer que tout espace cellulaire connexe et localement fini possède un plongement topologique dans R^∞.

4. Démontrer que tout espace cellulaire localement fini, connexe et de dimension finie peut être plongé dans R^q pour q suffisamment grand.

5. Démontrer que tout espace cellulaire fini admet un plongement cellulaire dans un espace cellulaire homéomorphe à la boule D^q pour q suffisamment grand.

Information. Tout espace cellulaire fini de dimension n admet un plongement cellulaire dans un espace cellulaire homéomorphe à D^{2n+1}.

6. En envisageant le bouquet $B = \bigvee_{t \in \mathsf{R}} (I_t = I, 0)$ comme espace cellulaire (voir 5.9), démontrer que l'application $\mathrm{id}\colon B \times {}_cB \to \to B \times B$ n'est pas un homéomorphisme.

§ 2. ESPACES SIMPLICIAUX

1. Simplexes euclidiens

1. Soit A un sous-ensemble de l'espace R^n constitué de $r + 1$ points ($r \geqslant 0$) non situés dans aucun plan de dimension $(r - 1)$. L'enveloppe convexe de l'ensemble A (le plus petit ensemble convexe qui contient A) s'appelle *simplexe euclidien engendré par* A ; on le désigne par Esi A. Les points de l'ensemble A sont appelés *sommets* du simplexe Esi A ; le nombre r est *sa dimension.*

Il est clair qu'un point du simplexe Esi A est un de ses sommets si et seulement si le simplexe ne contient aucun segment non dégénéré dont ce point soit le milieu. Ainsi, l'ensemble A se détermine par l'ensemble Esi A.

Les simplexes engendrés par les sous-ensembles de l'ensemble A sont appelés *faces* du simplexe Esi A. Il est évident que Esi $A_1 \cap$ $\cap$ Esi A_2 = Esi $(A_1 \cap A_2)$ quels que soient $A_1, A_2 \subset A$.

Les faces engendrées par deux sous-ensembles de l'ensemble A complémentaires entre eux sont dites *opposées.* Si A_1, A_2 sont de tels sous-ensembles, la formule

$$\mathrm{pr}\,(x_1,\ x_2,\ t) \mapsto (1 - t)\, x_1 + t x_2 \quad [x_1 \in \mathrm{Esi}\, A_1,\ x_2 \in \mathrm{Esi}\, A_2,\ t \in I]$$

détermine un homéomorphisme du join Esi $A_1 *$ Esi A_2 sur Esi A. Par conséquent, un simplexe euclidien est canoniquement homéomorphe au join de deux quelconques de ses faces opposées.

Puisque la boule D^r est canoniquement homéomorphe au join $D^p * D^q$, avec $p + q = r - 1$ (voir 1.2.6.9), en raisonnant par récurrence on montre que chacun des espaces Esi A, D^r est homéomorphe au join de $r + 1$ points. Ainsi un simplexe euclidien de dimension r est homéomorphe à D^r.

Il est évident que la frontière du simplexe Esi A dans le plan de dimension r qu'il détermine coïncide avec la réunion de ses faces de dimension $(r - 1)$. Cette frontière et son complémentaire dans Esi A sont appelés tout simplement *frontière* et *intérieur* du simplexe Esi A.

2. Le simplexe Esi A peut être décrit de manière équivalente comme l'ensemble des sommes $\sum_{a \in A} t_a a$, où les t_a sont des nombres réels non négatifs dont la somme est égale à 1. Puisque A n'est contenu dans aucun plan de dimension $(r - 1)$, les nombres t_a sont uniquement déterminés par le point $x = \sum_{a \in A} t_a a$; le nombre t_a est appelé *a-ième coordonnée barycentrique* de ce point ; on la désigne par $\mathrm{bar}_a\,(x)$.

Il est évident que la face Esi B du simplexe Esi A est déterminée dans les coordonnées barycentriques du simplexe Esi A par les équations $\mathrm{bar}_a\,(x) = 0$, avec $a \in A \setminus B$. Il est également clair que

si $x \in$ Esi B, les coordonnées $\mathrm{bar}_a(x)$, $a \in B$, calculées dans Esi A, coïncident avec les coordonnées $\mathrm{bar}_a(x)$, calculées dans Esi B.

On appelle *centre* du simplexe Esi A le point dont toutes les coordonnées barycentriques sont égales entre elles, donc égales à $1/(r+1)$.

3. Une application d'un simplexe Esi A dans un simplexe Esi B est dite *simpliciale* si elle est affine et applique A dans B. Une telle application est simpliciale sur chaque face du premier simplexe et elle envoie chaque face du premier simplexe sur une certaine face du deuxième et applique l'intérieur du premier simplexe sur l'intérieur de son image.

Il est évident que chaque application $A \to B$ se prolonge de manière unique en une application simpliciale Esi $A \to$ Esi B. Si l'application $A \to B$ est injective, son prolongement simplicial Esi $A \to$ Esi B est un plongement, et si elle est bijective, son prolongement simplicial Esi $A \to$ Esi B est homéomorphisme.

4. Un simplexe Esi A est dit *ordonné* si l'ensemble A est ordonné. Les sous-ensembles d'un ensemble ordonné étant naturellement ordonnés, les faces d'un simplexe ordonné sont des simplexes ordonnés.

Si Esi B est un autre simplexe ordonné de même dimension r, l'ordre donné dans A et B définit une application bijective $A \to B$ et par conséquent un homéomorphisme simplicial Esi $A \to$ Esi B. Ainsi tous les simplexes euclidiens ordonnés de même dimension sont liés par un homéomorphisme simplicial canonique entre eux.

5. On appelle *simplexe unité* le simplexe enveloppant les points $\mathrm{ort}_1, \ldots, \mathrm{ort}_{r+1}$ de l'espace $\mathbf{R}^{r+1}$; il est désigné par T^r. Il présente cette particularité que les coordonnées barycentriques de ses points coïncident avec leurs coordonnées usuelles dans $\mathbf{R}^{r+1}$. En fixant l'ordre de ses sommets on en fait un simplexe ordonné, donc tout simplexe euclidien ordonné de dimension r possède un homéomorphisme simplicial canonique sur T^r.

Remarquons que dans le cas d'un simplexe ordonné Esi A, l'homéomorphisme Esi $A \to D^r$ évoqué dans *1* devient canonique. L'homéomorphisme canonique $T^r \to D^r$ sera désigné par TD et l'homéomorphisme inverse, par DT. Il est clair que TD applique la frontière du simplexe T^r sur S^{r-1} et son intérieur sur $\mathrm{Int}\, D^r$.

Simplexes topologiques

6. On appelle un espace topologique X *simplexe topologique ordonné de dimension* r s'il est muni d'un homéomorphisme $T^r \to X$; ce dernier est appelé *homéomorphisme caractéristique* du simplexe, tandis que l'ensemble X est parfois appelé *support* du simplexe. Par exemple, les simplexes euclidiens ordonnés de dimension r et

la boule D^r sont des simplexes topologiques ordonnés de dimension r; voir *5*.

La méthode usuelle pour se débarrasser d'un ordre consiste à introduire simultanément tous les ordres possibles. En ce sens nous appellerons l'espace topologique X *simplexe topologique de dimension* r lorsqu'il est muni de $(r+1)!$ homéomorphismes $T^r \to X$ qui se transforment l'un dans l'autre à l'aide des homéomorphismes simpliciaux $T^r \to T^r$. On emploie également les termes *homéomorphisme caractéristique* et *support* dans cette situation, sauf qu'au lieu d'un seul homéomorphisme caractéristique on envisage $(r+1)!$ homéomorphismes caractéristiques d'égale importance. Les simplexes euclidiens sont des simplexes topologiques.

Si X est un simplexe topologique (resp. un simplexe topologique ordonné) de dimension r, et Y un espace topologique, alors chaque homéomorphisme $X \to Y$ transforme Y en un simplexe topologique (resp. en un simplexe topologique ordonné) de dimension r. Par conséquent, un espace topologique sur lequel on a appliqué un simplexe euclidien (resp. un simplexe euclidien ordonné) de dimension r devient lui-même un simplexe topologique (resp. un simplexe topologique ordonné) de dimension r.

Pour les simplexes topologiques, on définit d'une manière évidente les sommets, les faces, la frontière, l'intérieur, les coordonnées barycentriques, le centre et les applications simpliciales. Les faces d'un espace topologique sont des simplexes topologiques, les faces d'un simplexe topologique ordonné, des simplexes topologiques ordonnés. De même qu'un simplexe euclidien, un simplexe topologique devient ordonné si l'on donne un ordre de ses sommets.

2. Espaces simpliciaux et applications simpliciales

1. On appelle *triangulation* d'un ensemble son recouvrement par des simplexes topologiques tel que: (i) les faces d'un simplexe quelconque du recouvrement sont des simplexes du recouvrement; (ii) si un simplexe du recouvrement est recouvert par un autre simplexe de ce recouvrement, le premier est une face du second; (iii) l'intersection des supports de deux simplexes à points communs est support d'un certain simplexe du recouvrement.

Un ensemble muni d'une triangulation est appelé *espace simplicial*. Les simplexes de la triangulation sont appelés simplexes de l'espace, tandis que les simplexes zéro-dimensionnels sont les sommets. Le plus petit des simplexes de la triangulation qui contient le point x est désigné par si x.

Conformément à 1.2.4.3, une triangulation d'un ensemble le munit d'une structure d'espace topologique, et conformément à 1.2.4.1 les supports des simplexes de la triangulation constituent un recouvrement fondamental de cet espace. Les intersections des

simplexes de la triangulation étant fermées dans chacun d'eux, envisagés comme sous-espaces de cet espace, ils conservent leur topologie (voir 1.2.4.2).

Si a est un sommet d'un espace simplicial X, les points des simplexes à sommet a possèdent a-ième coordonnée barycentrique bar_a (voir 1.2 et 1.6), et nous obtenons une fonction continue bar_a : $X \to \mathsf{R}$ en posant $\mathrm{bar}_a(x) = 0$ pour tous les points $x \in X$ qui n'appartiennent pas aux simplexes de sommet a. Cette fonction est appelée *a-ième fonction barycentrique*. Il est clair que pour deux points arbitraires distincts x, y d'un espace simplicial il existe un sommet a tel que $\mathrm{bar}_a(x) \neq \mathrm{bar}_a(y)$. Par conséquent, *un espace simplicial est un espace de Hausdorff*.

Dans le cas où l'ensemble X que l'on munit d'une triangulation possédait déjà une topologie, il est utile de savoir sous quelles conditions la topologie déterminée par la triangulation coïncide avec la topologie originale. Une condition nécessaire et suffisante évidente consiste en ce que la topologie des simplexes de la triangulation coïncide avec la topologie induite par la topologie originale de l'espace X, et que les supports de ces simplexes forment relativement à la topologie originale un recouvrement fondamental. Si cette condition est satisfaite, la triangulation est appelée triangulation de l'espace topologique donné X. Par exemple, le recouvrement d'un simplexe topologique constitué par toutes ses faces est une triangulation.

Un espace simplicial est dit *ordonné* lorsque ses simplexes sont ordonnés et les faces de chaque simplexe sont ordonnées conformément à l'ordre donné dans le simplexe lui-même. Cette dernière condition est remplie, par exemple, si l'ordre dans les simplexes est induit par un ordre dans l'ensemble des sommets de l'espace; par conséquent, un espace simplicial peut toujours être ordonné.

2. La classe suivante d'espaces simpliciaux joue un rôle fondamental. Soit A un ensemble non vide quelconque; désignons par Si A l'ensemble de toutes les fonctions non négatives à support borné φ: $A \to \mathsf{R}$ telles que $\sum_{a \in A} \varphi(a) = 1$, et convenons d'identifier les ensembles de Si B correspondant aux sous-ensembles de A avec certains sous-ensembles de l'ensemble Si A, en posant les fonctions de Si B nulles sur $A \setminus B$. Si A est fini et se compose de $r + 1$ éléments, alors Si A est un simplexe topologique dans le sens naturel suivant: c'est le sous-ensemble de l'espace euclidien de dimension $(r + 1)$ de toutes les fonctions $A \to \mathsf{R}$; aux $(r + 1)!$ modes d'ordination de l'ensemble A correspondent $(r + 1)!$ homéomorphismes $T^r \to$ $\to$ Si A qui appliquent le point $(x_1, \ldots, x_{r+1})$ dans la fonction à valeurs $x_1, \ldots, x_{r+1}$ et qui se transforment l'un dans l'autre par les homéomorphismes simpliciaux $T^r \to T^r$. Dans le cas général, Si A se recouvre par les simplexes topologiques de Si B qui correspondent à tous les sous-ensembles finis de l'ensemble A ; il est clair

qu'on obtient ainsi une triangulation de l'ensemble Si A. Par conséquent, Si A est un espace simplicial. On l'appelle *simplexe engendré par* A. Ordonner ce simplexe équivaut à ordonner l'ensemble A.

3. Les intérieurs des simplexes d'un espace simplicial X constituent une partition de l'ensemble X ; cette partition devient évidemment cellulaire si l'on définit la dimension de l'intérieur e du simplexe s par la formule $\dim e = \dim s$: en guise d'application caractéristique pour e on peut prendre la composée des applications

$$D^{\dim s} \xrightarrow{DT} T^{\dim s} \xrightarrow{\varphi} s \xrightarrow{\text{in}} X, \tag{1}$$

où φ est un homéomorphisme caractéristique du simplexe s. Comme, d'une part, les conditions (C) et (W) sont satisfaites ici de manière évidente et, d'autre part, nous avons déjà établi qu'un espace simplicial est un espace de Hausdorff, cette partition cellulaire transforme X en un espace cellulaire. Ainsi *les intérieurs des simplexes d'un espace simplicial forment une partition qui en fait un espace cellulaire.*

Puisqu'un simplexe de dimension r possède $(r+1)!$ homéomorphismes canoniques, la formule (1) permet de choisir, parmi les applications caractéristiques de la cellule de dimension r d'un espace simplicial, $(r+1)!$ applications privilégiées. Ces applications caractéristiques privilégiées sont dites *simpliciales* et sont des plongements topologiques. Choisir l'une d'entre elles c'est ordonner le simplexe s, de sorte qu'un espace simplicial ordonné possède un équipement canonique.

Il est clair que le squelette $\operatorname{ske}_r X$ d'un espace simplicial X coïncide avec la réunion des simplexes dont la dimension est inférieure ou égale à r et que l'on a $\dim(\operatorname{ske}_r X) = r$ lorsque $r \leqslant \dim X$. En particulier, $\operatorname{ske}_0 X$ est l'ensemble des sommets de l'espace X. Pour que l'espace X soit fini il faut et il suffit que soit fini cet ensemble. Pour qu'un espace simplicial soit localement fini, il est nécessaire et suffisant, d'après 1.1.7, que chaque sommet appartienne seulement à un nombre fini de simplexes.

Sous-espaces

4. On appelle *sous-espace d'un espace simplicial* tout sous-ensemble constitué par des simplexes entiers de la triangulation. Les sous-espaces possèdent une triangulation naturelle et sont par conséquent des espaces simpliciaux. Un sous-espace d'un espace simplicial ordonné est un espace simplicial ordonné.

Il est évident que pour qu'un sous-ensemble d'un espace simplicial soit son sous-espace, il faut et il suffit qu'il le soit au sens cellulaire.

Un sous-espace d'un espace simplicial est dit *complet* si son intersection avec le support d'un simplexe quelconque de l'espace est le support d'un certain simplexe de l'espace ou bien est vide. Formulation équivalente: un sous-espace est complet s'il contient tous les simplexes dont les sommets lui appartiennent.

Il est clair que les simplexes d'un espace simplicial sont des sous-espaces complets. Les seuls sous-espaces complets de l'espace Si A sont les espaces Si B pour $B \subset A$.

Applications simpliciales

5. Une application d'un espace simplicial X dans un espace simplicial Y est dite *simpliciale* si elle est simpliciale sur chaque simplexe de l'espace X et envoie chaque tel simplexe dans un simplexe de l'espace Y. Il est clair qu'une telle application est cellulaire et applique X sur un sous-espace de l'espace Y.

Les faits suivants sont également évidents. Une application simpliciale bijective est un homéomorphisme et l'application inverse est simpliciale. Une application simpliciale injective est un plongement topologique. Une application simpliciale $f\colon X \to Y$ se détermine par l'application induite ab $f\colon \operatorname{ske}_0 X \to \operatorname{ske}_0 Y$ de l'ensemble des sommets de l'espace X dans l'ensemble des sommets de l'espace Y. L'application $\operatorname{ske}_0 X \to \operatorname{ske}_0 Y$ se prolonge en une application simpliciale $X \to Y$ si et seulement si elle applique les sommets de chaque simplexe de l'espace X dans les sommets d'un certain simplexe de l'espace Y. Si l'application simpliciale $f\colon X \to Y$ est injective (resp. bijective), l'application ab $f\colon \operatorname{ske}_0 X \to \operatorname{ske}_0 Y$ est également injective (resp. bijective).

Les espaces simpliciaux que l'on peut lier par un homéomorphisme simplicial sont dits *simplicialement homéomorphes.*

6. Une application simpliciale f d'un espace simplicial ordonné X dans un espace simplicial ordonné Y est dite *monotone* si $f(a) \preccurlyeq f(b)$ pour deux sommets quelconques a, b de l'espace X appartenant au même simplexe et vérifiant $a \preccurlyeq b$.

Une application simpliciale d'un espace simplicial dans un autre peut toujours être rendue monotone en ordonnant de manière appropriée ces espaces. Qui plus est, si X est un espace simplicial et Y un espace simplicial ordonné, l'application simpliciale $f\colon X \to Y$ peut être rendue monotone en ordonnant de manière appropriée l'espace X: il suffit d'ordonner de telle ou telle manière l'image inverse de chaque sommet de l'espace Y et d'ordonner les simplexes de l'espace X d'après la règle suivante: $a \prec b$ si $f(a) \prec f(b)$ ou bien si $f(a) = f(b)$ et $a \prec b$ dans $f^{-1}(f(a))$.

3. Schémas simpliciaux

1. On appelle *schéma simplicial* un couple dont le premier élément est un ensemble et le second, un recouvrement de cet ensemble par des sous-ensembles finis, si ce recouvrement contient chaque partie de chacun de ces sous-ensembles.

On appelle *application d'un schéma simplicial* (M, S) *dans un schéma simplicial* (M', S') un couple d'applications $\varphi: M \to M'$, $\Phi: S \to S'$ tel que $\Phi(A) = \varphi(A)$ pour $A \in S$. En vertu de la dernière condition, l'application (φ, Φ) du schéma (M, S) dans le schéma (M', S') se détermine par l'application φ et donc l'application $\varphi: M \to M'$ détermine l'application du schéma (M, S) dans le schéma (M', S') si et seulement si $\varphi(A) \in S'$ pour $A \in S$. Lorsque des applications φ et Φ sont bijectives (i.e. φ est bijective et $\Phi(S) = S'$), l'application (φ, Φ) est appelée *isomorphisme*. Des schémas simpliciaux qu'on peut lier par un isomorphisme sont dits *isomorphes*.

Un schéma simplicial (M, S) est appelé *sous-schéma* du schéma simplicial (M', S') si $M \subset M'$ et $S \subset S'$. Un sous-schéma (M, S) est dit *complet* si S contient tous les ensembles de S' situés dans M.

2. Un schéma simplicial constitué par le squelette zéro-dimensionnel d'un espace simplicial X et le recouvrement de ce squelette par les squelettes zéro-dimensionnels des simplexes de l'espace X est appelé *schéma de l'espace* X ; on le désigne par sh X. Par exemple, le schéma de l'espace Si A (voir 2.2) se compose de l'ensemble A et de son recouvrement par tous ses sous-ensembles finis.

Puisque l'application ab f: $\mathrm{ske}_0 X \to \mathrm{ske}_0 X'$ induite par l'application simpliciale $f: X \to X'$ applique le squelette zéro-dimensionnel de chaque simplexe de l'espace X dans le squelette zéro-dimensionnel d'un simplexe de l'espace X', elle définit une application du schéma sh X dans le schéma sh X' ; cette dernière est appelée *schéma de l'application* f; on la désigne par sh f. Il découle de 2.5 qu'une application simpliciale est déterminée par son schéma, que chaque application du schéma d'un espace simplicial X dans le schéma d'un espace simplicial X' est le schéma d'une certaine application simpliciale de l'espace X dans l'espace X', et qu'une application simpliciale est bijective si et seulement si son schéma est un isomorphisme. En particulier, *il existe un homéomorphisme simplicial entre les espaces* X, X' *si et seulement si les schémas* sh X, sh X' *sont isomorphes.*

3. Si X est un sous-espace d'un espace simplicial X', il est évident que sh X est un sous-schéma du schéma sh X' ; ce sous-schéma est complet si X l'est. Il est également clair que chaque sous-schéma d'un schéma d'un espace simplicial est le schéma d'un de ses sous-espaces.

Considérons, en particulier, pour un schéma (M, S), le simplexe Si M. Il est évident que (M, S) est un sous-schéma du schéma

sh Si M ; par conséquent, (M, S) est un schéma d'un certain sous-espace de l'espace Si M, de sorte que *tout schéma simplicial est le schéma d'un certain espace simplicial.* En choisissant en guise de (M, S) le schéma d'un espace simplicial arbitraire, nous voyons en outre que chaque espace simplicial X est un plongement simplicial dans Si $\mathrm{ske}_0\, X$.

4. Un schéma simplicial (M, S) est dit *ordonné* si les ensembles de S sont ordonnés et ceci en conformité avec l'ordre choisi dans ses sous-ensembles. Une application (φ, Φ) d'un schéma simplicial ordonné (M, S) dans un schéma simplicial ordonné (M', S') est appelée *monotone* lorsque $a \preccurlyeq b$ implique $\varphi(a) \preccurlyeq \varphi(b)$. Ainsi, ordonner le schéma d'un espace simplicial équivaut à ordonner ce sous-espace ; le schéma d'une application simpliciale d'un espace simplicial ordonné dans un autre est monotone si et seulement si cette application est monotone.

4. Polyèdres

1. On appelle *polyèdre* tout sous-ensemble d'un espace euclidien muni d'une triangulation finie dont tous les simplexes sont euclidiens. L'exemple le plus simple d'un polyèdre est le simplexe euclidien.

Il est clair que les sous-espaces d'un polyèdre sont des polyèdres.

Puisqu'un espace simplicial admet un plongement simplicial dans le simplexe engendré par son squelette zéro-dimensionnel (voir 3.3), et puisque ce simplexe est homéomorphe (par un homéomorphisme simplicial) à T^{q-1} si l'espace est fini et contient q sommets, alors un espace simplicial fini admet un plongement simplicial dans un simplexe euclidien ayant même nombre de sommets. Ainsi, chaque espace simplicial fini est homéomorphe à un polyèdre par un homéomorphisme simplicial.

2. Pour chaque espace simplicial de dimension n il existe un homéomorphisme simplicial sur un polyèdre contenu dans R^{2n+1}.

Démonstration. Puisqu'un espace simplicial fini de dimension n admet un plongement simplicial dans $\mathrm{ske}_n\, T^q$ pour q suffisamment grand (voir *1*), il suffit de construire, pour des valeurs arbitraires de q et n, une application linéaire $f\colon \mathsf{R}^{q+1} \to \mathsf{R}^{2n+1}$ injective sur $\mathrm{ske}_n\, T^q$.

Lorsque $q \leqslant 2n$, on peut prendre en guise de f l'inclusion $\mathsf{R}^{q+1} \to \mathsf{R}^{2n+1}$. Pour $q > 2n$, nous définissons f par la formule

$$f(\{x_j\}_{j=1}^{q+1}) = \{\textstyle\sum_{j=1}^{q+1} j^i x_i\}_{i=1}^{2n+1}$$

et il ne reste qu'à montrer que $x = x'$ si les points $x = (x_1, \ldots, x_{q+1})$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_{q+1})$ sont contenus dans $\mathrm{ske}_n\, T^q$ et $f(x) = f(x')$. Comme chacun de ces points est contenu dans une face de dimension n du simplexe T^q, il ne peut y avoir, parmi les nombres $x_1, \ldots, x_{q+1}$,

ni parmi les nombres $x'_1, \ldots, x'_{q+1}$, plus de $n+1$ nombres non nuls. Par conséquent, parmi les nombres $x_1 - x'_1, \ldots, x_{q+1} - x'_{q+1}$ il n'y a pas plus de $2n+2$ nombres non nuls, i.e. il existe des entiers positifs $j_1, \ldots, j_{2n+2}$ tels que $j_1 < \ldots < j_{2n+2} \leqslant 2q+1$ et $x_j = x'_j$ pour $j \neq j_1, \ldots, j_{2n+2}$. Vu que

$$\sum_{j=1}^{q+1} x_j = \sum_{j=1}^{q+1} x'_j \,(=1) \text{ et } \sum_{j=1}^{q+1} j^i x_j = \sum_{j=1}^{q+1} j^i x'_j$$

pour $i = 1, \ldots, 2n+1$, on a $\sum_{r=1}^{2n+2} j_r^i (x_{j_r} - x'_{j_r}) = 0$ pour $i = 0, \ldots$ $\ldots, 2n+1$; le déterminant de la matrice $\{j_r^i\}_{i=0,\, r=1}^{i=2n+1,\, r=2n+2}$ n'étant pas nul, on a $x_{j_r} = x'_{j_r}$ pour $r = 1, \ldots, 2n+2$. Par conséquent $x = x'$.

3 (Information). Quel que soit n, il existe des polyèdres de dimension n qui ne peuvent pas être plongés topologiquement dans $\mathbb{R}^{2n}$. En guise d'exemple, signalons $\mathrm{ske}_n\, T^{2n+2}$; pour la démonstration voir [10].

5. Constructions simpliciales

1. La plupart des constructions topologiques et cellulaires décrites au § 1.2 et au p. 1.5 peuvent également être effectuées dans un cadre purement simplicial. Citons les opérations simples $\sqcup$ et $\vee$: la somme des espaces simpliciaux et le bouquet des espaces simpliciaux à sommets distingués sont bien entendu des espaces simpliciaux. Les plus importantes des constructions plus complexes sont envisagées ici. Nous commençons par la subdivision barycentrique. Cette construction qui n'a pas d'homologues topologiques ou cellulaires permet de passer à des triangulations plus fines.

2 (Lemme). *Soit* Γ *un recouvrement fondamental d'un espace topologique* X *par des sous-espaces triangulés. Si, pour des éléments quelconques* $A, B \in \Gamma$, *l'intersection* $A \cap B$ *est un sous-espace complet de chacun des espaces* A, B (*considérés comme espaces simpliciaux*) *et hérite de* A *et* B *la même triangulation, alors* X *possède une triangulation et une seule pour laquelle les éléments du recouvrement* Γ *sont des sous-espaces dans le sens simplicial.*

Une telle triangulation est donnée par la réunion des triangulations des éléments du recouvrement Γ. Une simple vérification montre que cette réunion satisfait les conditions (i), (ii), (iii) de 2.1 (la complétude des intersections est nécessaire pour remplir (iii)). L'unicité est tout aussi évidente.

Subdivision barycentrique

3. La construction ci-dessous fait correspondre à un espace simplicial X un certain espace simplicial $\mathrm{ba}\, X$ qui coïncide avec X comme espace topologique mais qui possède une triangulation plus fine, appelée *subdivision barycentrique* de la triangulation donnée.

Supposons d'abord que X est un simplexe euclidien. Considérons, pour une numération arbitraire $a_0, \ldots, a_r$ des sommets du simplexe X, l'ensemble

$$\{x \in X \mid \mathrm{bar}_{a_0}(x) \leqslant \mathrm{bar}_{a_1}(x) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{bar}_{a_r}(x)\}. \qquad (2)$$

Il est clair que (2) est un simplexe euclidien dont les sommets sont situés dans les centres des simplexes Esi $A_0, \ldots,$ Esi A_r, où A_i est l'ensemble des points $a_0, \ldots, a_i$; les simplexes (2) correspondant à toutes les numérations des sommets du simplexe X constituent, avec leurs faces, une triangulation de l'espace X. C'est justement la subdivision barycentrique de la triangulation standard du simplexe X qui le transforme en ba X. Cette construction possède évidemment la propriété suivante: si X est une face du simplexe X', alors l'inclusion ba $X \to$ ba X' est un plongement simplicial.

Nous définissons la subdivision barycentrique de la triangulation standard du simplexe topologique X comme l'image de la subdivision barycentrique de la triangulation standard du simplexe unité T^r, où $r = \dim X$, par l'homéomorphisme simplicial $T^r \to X$. Il est clair que cette définition est correcte, i.e. que la triangulation obtenue de l'espace X ne dépend pas du choix de l'homéomorphisme simplicial $T^r \to X$ parmi les $(r+1)!$ possibles.

Soit enfin X un espace simplicial quelconque. Une vérification immédiate montre que le recouvrement de l'espace X par ses simplexes triangulés comme indiqué ci-dessus satisfait aux conditions du lemme *2*. La triangulation de l'espace X que définit ce lemme est justement la subdivision barycentrique de la triangulation donnée.

Remarquons que si X est un espace simplicial fini (resp. localement fini), alors ba X est également fini (resp. localement fini). Il est tout aussi évident que si X est un polyèdre, alors ba X est également un polyèdre.

4. Il est clair que l'ensemble des sommets de l'espace ba X est précisément l'ensemble des centres des simplexes de l'espace X et que les centres des simplexes $s_1, \ldots, s_m$ de l'espace X sont les sommets d'un simplexe de l'espace ba X si et seulement si les simplexes $s_1, \ldots, s_m$ constituent une suite croissante pour un choix approprié de la numération. Ceci permet de décrire la subdivision barycentrique dans le langage laconique des schémas: si sh $X = (M, S)$, alors sh ba $X = (S,$ ba $S)$, où ba S est la famille de toutes les parties finies de l'ensemble S, ordonnées par inclusion. En même temps, l'espace ba X s'avère canoniquement ordonné: le sommet $a \in \mathrm{ske}_0 \times$ $\times$ ba X précède le sommet $a' \in \mathrm{ske}_0$ ba X si le simplexe (de l'espace X) de centre a est contenu dans le simplexe de centre a'.

De la description du schéma de l'espace ba X on tire en particulier que si X est un sous-espace d'un espace X', alors ba X est un

sous-espace complet de l'espace ba X' ; en effet, sh ba X est évidemment un sous-schéma complet du schéma sh ba X'.

Pour une application simpliciale $f\colon X \to X'$, l'application f: ba $X \to$ ba X' n'est pas en général une application simpliciale (exemple très simple: $X = T^2$, $X' = T^1$, $f(\mathrm{ort}_1) = \mathrm{ort}_1$, $f(\mathrm{ort}_2) = f(\mathrm{ort}_3) = \mathrm{ort}_2$), néanmoins l'application sh f: sh $X \to$ sh X' induit naturellement l'application sh ba $X \to$ sh ba X' et par conséquent l'application simpliciale ba $X \to$ ba X'. Cette dernière est désignée par ba f; elle est évidemment toujours monotone.

5. *Si X est un polyèdre, le plus grand des diamètres des simplexes du polyèdre* ba X *est inférieur ou égal au plus grand des diamètres des simplexes du polyèdre X multiplié par $n/(n+1)$, où $n = \dim X$.*

Il suffit de montrer que si X est un simplexe euclidien de sommets $a_0, \ldots, a_r$, alors le diamètre du simplexe (2) est inférieur ou égal à $[r/(r+1)]$ diam X. Considérons pour cela la partie X' du simplexe X définie par l'inégalité $\mathrm{bar}_{a_r}(x) \geqslant 1/(r+1)$. C'est un simplexe euclidien obtenu de X par homothétie de sommet a_r et de coefficient $r/(r+1)$; par conséquent,

$$\operatorname{diam} X' \leqslant [r/(r+1)] \operatorname{diam} X$$

et il ne reste qu'à remarquer que X' contient le simplexe (2).

6 (Corollaire). *Pour tout polyèdre X et un $\varepsilon > 0$ quelconque il existe un entier positif m tel que les diamètres de tous les simplexes du polyèdre* $\mathrm{ba}^m X$ *sont inférieurs à ε.*

Produit simplicial

7. Pour le produit cellulaire $X_1 \times {}_cX_2$ d'espaces simpliciaux X_1, X_2, pour $\dim X_1 > 0$ et $\dim X_2 > 0$, il n'existe évidemment pas de triangulation dont les intérieurs des simplexes soient les produits des intérieurs des simplexes des espaces X_1, X_2. Nous montrerons néanmoins que ce produit peut être triangulé et nous indiquerons une construction qui nous amènera à sa triangulation canonique dans le cas où les espaces X_1, X_2 sont ordonnés. L'espace simplicial en lequel cette construction transforme $X_1 \times {}_cX_2$ est appelé *produit simplicial des espaces* X_1, X_2; on le désigne par $X_1 \times {}_sX_2$.

Supposons d'abord que X_1 est un simplexe euclidien de R^m aux sommets $a_0, \ldots, a_q$ et X_2 un simplexe euclidien de R^n aux sommets $b_0, \ldots, b_r$. Pour $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, posons

$$\alpha_i(x_1) = \sum_{k=0}^{i} \mathrm{bar}_{a_k}(x_1), \quad \beta_j(x_2) = \sum_{l=0}^{j} \mathrm{bar}_{b_l}(x_2),$$

et formons des nombres

$$\alpha_0(x_1), \ldots, \alpha_{q-1}(x_1), \quad \beta_0(x_2), \ldots, \beta_{r-1}(x_2)$$

une suite non décroissante

$$\gamma_1(x_1, x_2), \ldots, \gamma_{q+r}(x_1, x_2).$$

Désignons ensuite par M_{qr} la famille de tous les sous-ensembles à q éléments de l'ensemble des nombres $1, \ldots, q+r$ et par $s(\mu)$, où $\mu \in M_{qr}$, l'ensemble des points $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ tels que chacun des nombres $\gamma_p(x_1, x_2)$ (avec $p \in \mu$) est égal à un des nombres $\alpha_0(x_1), \ldots, \alpha_{q-1}(x_1)$. Une vérification immédiate montre que les $q+r+1$ points

$$\begin{gathered}(a_0, b_0), \ldots, (a_0, b_{j_1-1});\\ (a_1, b_{j_1-1}) \ldots, (a_1, b_{j_2-2});\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (a_{q-1}, b_{j_{q-1}, -(q-1)}), \ldots, (a_{q-1}, b_{j_q-q});\\ (a_q, b_{j_q-q}), \ldots, (a_q, b_r),\end{gathered} \tag{3}$$

où $j_1, \ldots, j_q$ sont les nombres de μ, numérotés en ordre croissant, ne sont contenus dans aucun plan de dimension $(q+r-1)$ et que pour $(x_1, x_2) \in s(\mu)$ on a

$$\sum_{k=0}^{q} \sum_{l=j_k-k}^{j_{k+1}-(k+1)} [\gamma_{k+l+1}(x_1, x_2) - \gamma_{k+l}(x_1, x_2)](a_k, b_l) = (x_1, x_2),$$

où $j_0 = 0$, $j_{q+1} = q+r+1$, $\gamma_0(x_1, x_2) = 0$, $\gamma_{q+r+1}(x_1, x_2) = 1$. En outre

$$\sum_{k=0}^{q} \sum_{l=j_k-k}^{j_{k+1}-(k+1)} [\gamma_{k+l+1}(x_1, x_2) - \gamma_{k+l}(x_1, x_2)] =$$

$$= \sum_{p=0}^{q+r} [\gamma_{p+1}(x_1, x_2) - \gamma_p(x_1, x_2)] = 1$$

et $\gamma_{p+1}(x_1, x_2) - \gamma_p(x_1, x_2) \geqslant 0$. Par conséquent, l'ensemble $s(\mu)$ est contenu dans un simplexe euclidien enveloppant les points (3); puisque cet ensemble est évidemment convexe et contient les points (3), il doit coïncider avec le simplexe indiqué. Il est clair que les ensembles $s(\mu)$ recouvrent $X_1 \times X_2$ et que l'intersection $s(\mu_1) \cap \cap s(\mu_2)$ coïncide, quels que soient $\mu_1, \mu_2 \in M_{qr}$, avec le simplexe euclidien enveloppant les sommets communs des simplexes $s(\mu_1)$, $s(\mu_2)$. D'où l'on déduit que les simplexes $s(\mu)$ constituent, avec toutes leurs faces, une triangulation du produit $X_1 \times X_2$. Cette triangulation transforme $X_1 \times X_2$ en $X_1 \times {}_sX_2$. Elle vérifie évidemment la condition suivante: si X_1, X_2 sont les faces des simplexes euclidiens ordonnés X_1', X_2', l'inclusion $X_1 \times {}_sX_2 \to X_1' \times {}_sX_2'$ est un plongement simplicial.

Pour définir le produit simplicial des simplexes topologiques ordonnés X_1, X_2, nous construisons de la manière indiquée ci-dessus une triangulation du produit des simplexes unité T^q, T^r, avec $q = \dim X_1$, $r = \dim X_2$, et transposons-la dans $X_1 \times X_2$ à l'aide du produit $T^q \times T^r \to X_1 \times X_2$ des homéomorphismes simpliciaux canoniques $T^q \to X_1$, $T^r \to X_2$. La triangulation transposée munit $X_1 \times X_2$ d'une structure simpliciale.

Soient, enfin, X_1, X_2 des espaces simpliciaux ordonnés quelconques. Une vérification immédiate montre que le recouvrement de l'espace $X_1 \times {}_cX_2$, triangulé suivant le procédé précédent par les produits $s_1 \times s_2$, où s_1 est un simplexe de X_1 et s_2 un simplexe de X_2 satisfait aux conditions du lemme *2*. La triangulation de l'espace $X_1 \times {}_cX_2$ d'après ce lemme transforme $X_1 \times {}_cX_2$ en $X_1 \times {}_sX_2$.

Remarquons que chaque cellule de l'espace $X_1 \times {}_cX_2$ se représente comme la réunion d'un nombre fini de cellules de l'espace $X_1 \times {}_sX_2$ de même dimension ou de dimension inférieure. En particulier, l'application $\mathrm{id} : X_1 \times {}_cX_2 \to X_1 \times {}_sX_2$ est cellulaire.

8. La construction du produit simplicial possède évidemment la propriété suivante : si $f_1 : X_1 \to X_1'$, $f_2 : X_2 \to X_2'$ sont des applications simpliciales monotones, alors $f_1 \times f_2 : X_1 \times {}_sX_2 \to X_1' \times {}_sX_2'$ est une application simpliciale. Puis, si X_1, X_2 sont des sous-espaces des espaces simpliciaux ordonnés X_1', X_2', alors $X_1 \times {}_sX_2$ est un sous-espace de l'espace $X_1' \times {}_sX_2'$.

Pour conclure, décrivons le produit simplicial dans le langage des schémas. Soit $\mathrm{sh}\, X_1 = (M_1, S_1)$ et $\mathrm{sh}\, X_2 = (M_2, S_2)$. Alors $\mathrm{sh}\,(X_1 \times {}_sX_2) = (M_1 \times M_2, S)$, où S est la famille des ensembles $A \subset M_1 \times M_2$ qui possède les deux propriétés suivantes : (i) $\mathrm{pr}_1 (A) \in S_1$, $\mathrm{pr}_2 (A) \in S_2$; (ii) si $(a_1, a_2) \in A$, $(a_1', a_2') \in A$ et $a_1 \preccurlyeq a_1'$, alors $a_2 \preccurlyeq a_2'$.

Limites

9. Soient $X_0, X_1, \ldots$ des espaces simpliciaux et $\varphi_0 : X_0 \to X_1$, $\varphi_1 : X_1 \to X_2, \ldots$ des plongements simpliciaux. Considérons le recouvrement de l'espace $\lim (X_k, \varphi_k)$ par des ensembles de la forme $\mathrm{imm}_k (s_k)$, où s_k est un simplexe de X_k $(k = 0, 1, \ldots)$. Nous pouvons transformer ces ensembles en simplexes topologiques en prenant en guise d'homéomorphismes caractéristiques la composée des homéomorphismes caractéristiques $T^{\dim s_k} \to s_k$ avec les homéomorphismes $\mathrm{ab}\,\mathrm{imm}_k : s_k \to \mathrm{imm}_k (s_k)$; il est clair que ceci fait du recouvrement indiqué une triangulation de l'espace $\lim (X_k, \varphi_k)$. Ainsi $\lim (X_k, \varphi_k)$ est un espace simplicial. Envisagé comme espace cellulaire, il coïncide évidemment avec la limite définie dans 1.5.6. On voit également que les applications imm_k sont des plongements simpliciaux.

Si les espaces X_k sont ordonnés et les plongements φ_k monotones, l'espace $\lim (X_k, \varphi_k)$ possède un ordre évident et les plongements imm_k sont monotones.

Join, cône et suspension

10. Si X_1, X_2 sont des simplexes topologiques, le join $X_1 * X_2$ est un simplexe topologique d'une manière naturelle: en guise d'homéomorphismes caractéristiques on peut prendre les applications de la forme

$$T^{\dim X_1+\dim X_2+1} = T_1 * T_2 \xrightarrow{\varphi_1 * \varphi_2} X_1 * X_2,$$

où T_1, T_2 sont des faces opposées du simplexe $T^{\dim X_1+\dim X_2+1}$ avec $\dim T_1 = \dim X_1$, $\dim T_2 = \dim X_2$, tandis que φ_1, φ_2 sont des homéomorphismes simpliciaux (l'égalité $T^{\dim X_1+\dim X_2+1} = T_1 * T_2$ définit l'homéomorphisme simplicial indiqué dans 1.1). Ceci nous permet de munir d'une triangulation canonique le join cellulaire $X_1 *_c X_2$ d'espaces simpliciaux quelconques X_1, X_2: ses simplexes seront les images des simplexes des espaces X_1, X_2 par les inclusions $X_1 \to X_1 *_c X_2$, $X_2 \to X_1 *_c X_2$ et les images des simplexes $s_1 * s_2$, où s_1 est un simplexe de X_1 et s_2 un simplexe de X_2, par l'inclusion $\mathrm{in} * \mathrm{in}: s_1 * s_2 \to X_1 *_c X_2$. L'espace simplicial ainsi obtenu s'appelle *join simplicial* des espaces X_1, X_2; on le désigne par $X_1 *_s X_2$. Envisagé comme espace cellulaire, il coïncide avec $X_1 *_c X_2$.

Lorsque $\mathrm{sh}\, X_1 = (M_1, S_1)$, $\mathrm{sh}\, X_2 = (M_2, S_2)$, alors $\mathrm{sh}\,(X_1 *_s X_2) = (M_1 \sqcup M_2, S)$, où S est l'ensemble des parties non vides de l'ensemble $M_1 \sqcup M_2$ dont les images inverses par l'application in_1: $M_1 \to M_1 \sqcup M_2$ appartiennent à S_1 ou bien sont vides, et les images inverses par l'application in_2: $M_2 \to M_1 \sqcup M_2$ appartiennent à S_2 ou bien sont vides.

Puisque pour chaque espace topologique on a en particulier

$$\text{cône}\, X = X * D^0, \qquad \text{su}\, X = X * S^0$$

(voir 1.2.6.8), la construction étudiée transforme en espace simplicial le cône et la suspension sur un espace simplicial quelconque.

Cylindre simplicial

11. Etant donnée une application simpliciale monotone $f: X_1 \to X_2$, la construction considérée ici lui fait correspondre un certain espace simplicial $\mathrm{Scyl}\, f$, appelé *cylindre simplicial.* Le cylindre simplicial n'est pas en général homéomorphe au cylindre usuel $\mathrm{Cyl}\, f$ de l'application f (voir 4.6.6.10) mais possède des propriétés analogues.

Le langage des schémas convient le mieux pour décrire l'espace $\mathrm{Scyl}\, f$. Soient $\mathrm{sh}\, X_1 = (M_1, S_1)$, $\mathrm{sh}\, X_2 = (M_2, S_2)$ et $\mathrm{sh}\, f = (\varphi, \Phi)$. Nous définissons $\mathrm{Scyl}\, f$ par la formule

$$\mathrm{sh}\, \mathrm{Scyl}\, f = (M_1 \sqcup M_2, S),$$

où S est la famille de tous les ensembles $A \subset M_1 \sqcup M_2$ tels que: (i) l'ensemble $\mathrm{in}_1^{-1}(A)$ appartient à S_1 ou bien est vide; (ii) l'ensemble $\varphi(\mathrm{in}_1^{-1}(A)) \cup \mathrm{in}_2^{-1}(A)$ appartient à S_2; (iii) si l'ensemble $\mathrm{in}_1^{-1}(A)$ n'est pas vide, l'ensemble $\mathrm{in}_2^{-1}(A)$ appartient à $\Phi(S_1)$; (iv) si $a_1 \in \mathrm{in}_1^{-1}(A)$, $a_2 \in \mathrm{in}_2^{-1}(A)$, alors $a_2 \preccurlyeq \varphi(a_1)$. Les applications in_1, in_2 déterminent des applications

$$\mathrm{sh}\, X_1 \to \mathrm{sh}\, \mathrm{Scyl}\, f, \qquad \mathrm{sh}\, X_2 \to \mathrm{sh}\, \mathrm{Scyl}\, f$$

et en même temps des plongements simpliciaux

$$X_1 \to \mathrm{Scyl}\, f, \qquad X_2 \to \mathrm{Scyl}\, f;$$

les images de ces plongements sont les *bases* (supérieure et inférieure) du cylindre $\mathrm{Scyl}\, f$ et peuvent être identifiées avec X_1, X_2. En outre, l'application

$$M_1 \times (0 \cup 1) \to M_1 \sqcup M_2$$

qui fait correspondre le point $\mathrm{in}_1(a)$ à $(a, 0)$ et le point $\mathrm{in}_2 \circ \varphi(a)$ à $(a, 1)$ détermine une certaine application

$$\mathrm{sh}\,(X_1 \times {}_sI) \to \mathrm{sh}\, \mathrm{Scyl}\, f$$

et en même temps l'application simpliciale $X_1 \times {}_sI \to \mathrm{Scyl}\, f$. Il est clair que cette application simpliciale constitue avec l'inclusion $X_2 \to \mathrm{Scyl}\, f$ l'application continue $(X_1 \times I) \sqcup X_2 \to \mathrm{Scyl}\, f$ et que cette dernière détermine une certaine application continue $\mathrm{csc}\, f : \mathrm{Cyl}\, f \to \mathrm{Scyl}\, f$. Il est clair également que $\mathrm{csc}\, f\,(\mathrm{Cyl}\, f) = \mathrm{Scyl}\, f$ et que la rétraction canonique $\mathrm{rt}\, f : \mathrm{Cyl}\, f \to X_2$ (voir 1.2.6.10) est constante sur les éléments de la partition $\mathrm{zer}\,(\mathrm{csc}\, f)$, tandis que la X_2-homotopie canonique, qui joint $\mathrm{id}\,(\mathrm{Cyl}\, f)$ avec $\mathrm{Cyl}\, f \xrightarrow{\mathrm{rt}\, f} X_2 \xrightarrow{\mathrm{in}} \mathrm{Cyl}\, f$, est constante sur les éléments de la partition $\mathrm{zer}\,(\mathrm{csc}\, f) \times \mathrm{zer}\,(\mathrm{id}\, I)$. On en tire que $\mathrm{rt}\, f$ détermine une déformation de rétraction stricte $\mathrm{Scyl}\, f \to X_2$ et la composée de cette rétraction avec l'inclusion $X_1 \to \mathrm{Scyl}\, f$ est f. Ainsi, l'inclusion $X_2 \to \mathrm{Scyl}\, f$ est toujours une équivalence homotopique, tandis que l'inclusion $X_1 \to \mathrm{Scyl}\, f$ n'est une équivalence homotopique que si f l'est.

6. Etoiles. Links. Voisinages réguliers

1. On appelle *étoile* d'un simplexe s d'un espace simplicial X la réunion des simplexes de l'espace X contenant s. Notations: $\mathrm{St}\, s$, $\mathrm{St}\,(s, X)$. Il est évident que c'est un sous-espace de X.

On appelle *étoile ouverte* d'un simplexe s la réunion des intérieurs des simplexes qui contiennent s. Notation: $\mathrm{st}\, s$, $\mathrm{st}\,(s, X)$. Il est clair que c'est un ensemble ouvert défini par les inégalités

$$\mathrm{bar}_{a_0}(x) > 0, \ldots, \mathrm{bar}_{a_q}(x) > 0,$$

où $a_0, \ldots, a_q$ sont les sommets du simplexe s, et que $\mathrm{Cl}\, \mathrm{st}\, s = \mathrm{St}\, s$.

On appelle *link* d'un simplexe s la réunion des simplexes de St s qui ne coupent pas s. Notations: lk s, lk (s, X). C'est un sous-espace des espaces X et St s.

Les faits suivants sont évidents. Si s est une face d'un simplexe s', alors

$$\mathrm{St}\, s' \subset \mathrm{St}\, s, \quad \mathrm{st}\, s' \subset \mathrm{st}\, s, \quad \mathrm{lk}\, s' \subset \mathrm{lk}\, s.$$

Si $a_0, \ldots, a_q$ sont des sommets non situés dans un même simplexe, alors l'intersection $\bigcap_{i=0}^{q} \mathrm{st}\, a_i$ est vide, tandis que si $a_0, \ldots, a_q$ sont les sommets du simplexe s, alors

$$\bigcap_{i=0}^{q} \mathrm{st}\, a_i = \mathrm{st}\, s.$$

Si X est un sous-espace d'un espace X', pour chaque simplexe s de X on a

$$\mathrm{st}\,(s, X) = \mathrm{st}\,(s, X') \cap X,$$

tandis que si X est un sous-espace complet, on a

$$\mathrm{St}\,(s, X) = \mathrm{St}\,(s, X') \cap X, \quad \mathrm{lk}\,(s, X) = \mathrm{lk}\,(s, X') \cap X.$$

Enfin, si s' est un simplexe contenu dans lk (s, X) et s'' est le plus petit simplexe qui contient à la fois s et s', on a

$$\mathrm{lk}\,(s', \mathrm{lk}\,(s, X)) = \mathrm{lk}\,(s'', X).$$

2. On définit les étoiles, les étoiles ouvertes et les links également pour les points d'un espace simplicial. Soit x un tel point. Alors l'étoile St x = St (x, X), l'étoile ouverte st x = st (x, X) et le link lk x = lk (x, X) sont donnés par les formules:

$$\mathrm{St}\, x = \mathrm{St}\ \text{si}\ x, \quad \mathrm{st}\, x = \mathrm{st}\ \text{si}\ x, \quad \mathrm{lk}\, x = \mathrm{St}\ \text{si}\ x \setminus \mathrm{st}\ \text{si}\ x.$$

Il est évident que st x est un voisinage du point x, tandis que lk x = = Fr St x = Fr st x. En outre, l'étoile St x est homéomorphe au cône sur le link lk x; on a même un homéomorphisme canonique cône lk $x \to$ St x défini par la formule

$$\mathrm{pr}\,(y, t) \mapsto \varphi\,((1 - t)\,\varphi^{-1}(x) + t\varphi^{-1}(y)),$$

où $y \in \mathrm{lk}\, x$, $t \in I$ et φ est un homéomorphisme caractéristique quelconque d'un simplexe qui contient x et y.

Mise en garde: lk x coïncide avec lk si x seulement dans le cas où x est un sommet.

Si s' est un simplexe de lk (s, X), alors, conformément à 1.1 et 5.10, on a un homéomorphisme simplicial canonique du join $s * s'$ sur le plus petit simplexe de l'espace X contenant s et s'; il est clair que tous ces homéomorphismes constituent ensemble un homéomorphisme simplicial du join $s *$ lk (s, X) sur l'étoile St (s, X). Cela signifie que l'étoile St (x, X) d'un point x quelconque de l'espace

X possède un homéomorphisme simplicial canonique sur le join si $x * \mathrm{lk}$ (si x, X) ; il est clair que cet homéomorphisme simplicial applique le join de la frontière du simplexe si x et du link lk (si x, X) sur lk (x, X). Puisqu'en outre la frontière du simplexe si x est homéomorphe à la sphère $S^{\dim \mathrm{si}\, x - 1}$, tandis que le join $S^{\dim \mathrm{si}\, x - 1} *$ $*$ lk (si x, X) est homéomorphe à la suspension su $^{\dim \mathrm{si}\, x}\mathrm{lk}$ (si x, X), le link lk (x, X) est homéomorphe à su $^{\dim \mathrm{si}\, x}\mathrm{lk}$ (si x, X).

Invariance homotopique du link d'un point

3 (Lemme). *Soient A, B des rétractes d'un espace topologique Y. Si les inclusions $i : A \to Y$, $j : B \to Y$ sont homotopes à des applications $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ telles que $f(A) \subset B$, $g(B) \subset A$, alors A et B sont homotopiquement équivalents.*

En guise d'équivalences homotopiques $A \to B$, $B \to A$ inverses l'une de l'autre on peut prendre les restrictions $\sigma|_A$, $\rho|_B$ de rétractions quelconques $\sigma : Y \to B$, $\rho : Y \to A$. En effet, $\sigma|_A = \sigma \circ i$, $\rho|_B = \rho \circ j$ et puisque la composée $\rho \circ j \circ \sigma \circ i$ est homotope à l'application $\rho \circ j \circ \sigma \circ f = \rho \circ f$, qui à son tour est homotope à $\rho \circ i = \mathrm{id}\, A$, la composée $\rho|_B \circ \sigma|_A$ est homotope à $\mathrm{id}\, A$. De la même manière, la composée $\sigma|_A \circ \rho|_B$ est homotope à $\mathrm{id}\, B$.

4. Soient T_1, T_2 deux sous-espaces d'un espace topologique X, tous deux munis chacun d'une triangulation finie. Si le point $x_0 \in X$ est un point intérieur de T_1 et T_2, alors les links lk (x_0, T_1), lk (x_0, T_2) *sont homotopiquement équivalents.*

Démonstration. Désignons par F_i l'homotopie $\mathrm{St}\,(x_0, T_i) \times I \to X$ entre l'inclusion $\mathrm{St}\,(x_0, T_i) \to X$ et l'application constante qui envoie St (x_0, T_i) dans x_0, en supposant que cette homotopie est linéaire dans chaque simplexe de St (x_0, T_i) ; posons

$$C_i(t) = F_i(\mathrm{St}\,(x_0, T_i) \times t) \quad [i = 1, 2].$$

Les ensembles st (x_0, T_1), st (x_0, T_2) étant ouverts et les ensembles St (x_0, T_1), St (x_0, T_2) compacts, on peut trouver des nombres $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que $C_1(\varepsilon) \subset \mathrm{St}\,(x_0, T_2)$, $C_2(\varepsilon) \subset \mathrm{St}\,(x_0, T_1)$ et $C_1(\delta) \subset C_2(\varepsilon)$, $C_2(\delta) \subset C_1(\varepsilon)$. Puisqu'en outre $C_1(\varepsilon) \setminus x_0$ est un rétracte de l'espace $\mathrm{St}\,(x_0, T_1) \setminus x_0$ et $C_2(\varepsilon) \setminus x_0$ un rétracte de l'espace $\mathrm{St}\,(x_0, T_2) \setminus x_0$, alors $C_1(\varepsilon) \setminus x_0$ et $C_2(\varepsilon) \setminus x_0$ sont des rétractes de l'espace $Y = [\mathrm{St}\,(x_0, T_1) \cap \mathrm{St}\,(x_0, T_2)] \setminus x_0$. Enfin les formules

$$(y, t) \mapsto F_1(y, \delta t/\varepsilon), \quad (y, t) \mapsto F_2(y, \delta t/\varepsilon)$$

déterminent des homotopies $(C_1(\varepsilon) \setminus x_0) \times I \to Y$, $(C_2(\varepsilon) \setminus x_0) \times$ $\times I \to Y$ qui joignent les inclusions $C_1(\varepsilon) \setminus x_0 \to Y$, $C_2(\varepsilon) \setminus x_0 \to Y$ avec les applications dont les images sont respectivement contenues dans $C_2(\varepsilon) \setminus x_0$ et $C_1(\varepsilon) \setminus x_0$. Ainsi $C_2(\varepsilon) \setminus x_0$ est homotopiquement

équivalent à $C_1(\varepsilon)\setminus x_0$ (voir *3*) et il reste à remarquer que $C_1(\varepsilon)\setminus x_0$ est homotopiquement équivalent à $\mathrm{lk}(x_0, T_1)$ et $C_2(\varepsilon)\setminus x_0$ l' t à $\mathrm{lk}(x_0, T_2)$.

Voisinages réguliers

5. On appelle *voisinage régulier* d'un sous-espace A d'un espace simplicial X le voisinage constitué par toutes les étoiles ouvertes $\mathrm{st}(a, X)$ avec $a \in A$, ou, ce qui revient au même, de toutes les étoiles ouvertes $\mathrm{st}(a, X)$ avec $a \in \mathrm{ske}_0 A$.

Si le sous-espace A est complet, il est un rétracte de déformation de son voisinage régulier. On a même une A-homotopie canonique $h: U \times I \to U$ qui joint l'application identique du voisinage régulier U du sous-espace complet A avec la composée de la rétraction $U \to A$ et de l'inclusion $A \to U$: elle se définit par la formule

$$\mathrm{bar}_a(h(x, t)) = \begin{cases} \dfrac{\left(1 - t \sum\limits_{b \in \mathrm{ske}_0 A} \mathrm{bar}_b(x)\right) \mathrm{bar}_a(x)}{1 - \sum\limits_{b \in \mathrm{ske}_0 A} \mathrm{bar}_b(x)} & \text{si } a \in \mathrm{ske}_0 A, \\ t\,\mathrm{bar}_a(x) \text{ si } a \in \mathrm{ske}_0 X \setminus \mathrm{ske}_0 A. \end{cases}$$

Il découle en particulier de ce que nous venons de dire que *tout sous-espace d'un espace simplicial X est un rétracte de déformation de son voisinage régulier dans* $\mathrm{ba}\, X$ (voir 5.4).

Etoiles barycentriques et links barycentriques

6. On appelle *étoile barycentrique* d'un simplexe s d'un espace simplicial X la réunion des simplexes du sous-espace $\mathrm{ba}\, X$ dont le premier sommet se trouve au centre du simplexe s. Notations: $\mathrm{bst}\, s$, $\mathrm{bst}(s, X)$. Description équivalente: $\mathrm{bst}\, s$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que

$$\mathrm{bar}_a(x) = \mathrm{bar}_b(x) \text{ si } a, b \in s \cap \mathrm{ske}_0 X,$$

$$\mathrm{bar}_a(x) \geqslant \mathrm{bar}_b(x) \text{ si } a \in s \cap \mathrm{ske}_0 X,\ b \in (X \setminus s) \cap \mathrm{ske}_0 X.$$

Il est évident que les étoiles barycentriques des simplexes de l'espace X le recouvrent et sont des sous-espaces de l'espace $\mathrm{ba}\, X$. Il est également clair que $\mathrm{bst}\, s \neq \mathrm{bst}\, s'$ lorsque $s \neq s'$ et que $\mathrm{bst}\, s \subset \mathrm{bst}\, s'$ lorsque $s \supset s'$.

7. La réunion des simplexes d'une étoile barycentrique $\mathrm{bst}\, s$ qui ne contiennent pas le centre du simplexe s est appelée *link barycentrique* du simplexe s; on le désigne par $\mathrm{blk}\, s$. Il est clair que l'étoile $\mathrm{bst}\, s$ possède un homéomorphisme simplicial sur le cône sur $\mathrm{blk}\, s$ et que la projection linéaire à partir du centre du simplexe s est un homéomorphisme de $\mathrm{blk}\, s$ sur le link $\mathrm{lk}\, s$ du simplexe s dans X

(ce dernier homéomorphisme devient simplicial après subdivision barycentrique du link lk s). Ainsi le couple (bst s, blk s) est homéomorphe au couple (cône lk s, lk s).

7. Approximation simpliciale d'une application continue

1. Une application simpliciale g d'un espace simplicial X dans un espace simplicial Y est appelée *approximation simpliciale* d'une application continue $f: X \to Y$ lorsque $g(x) \in \operatorname{si} f(x)$ pour chaque point $x \in X$.

L'approximation simpliciale de l'application $f: X \to Y$ est canoniquement homotope à f: l'homotopie canonique $X \times I \to Y$ qui joint l'application f avec son approximation simpliciale g est une application affine de chaque génératrice $x \times I$ du cylindre $X \times I$ sur le segment de droite (éventuellement dégénéré) qui joint $f(x)$ avec $g(x)$. Il est évident que cette homotopie est liée sur l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels $g(x) = f(x)$.

2. Une application simpliciale $g: X \to Y$ est une approximation simpliciale d'une application continue $f: X \to Y$ si et seulement si $f(\operatorname{st} a) \subset \operatorname{st} g(a)$ pour chaque sommet a de l'espace X.

Démonstration. Supposons d'abord que g est une approximation simpliciale de l'application f. Soit $x \in \operatorname{st} a$. Du fait que $g(x) \in \operatorname{si} f(x)$, l'application g est simpliciale et x est contenu dans l'intérieur du simplexe de sommet a on tire que $g(x)$ est situé à l'intérieur d'un simplexe de sommet $g(a)$ (voir 1.3). Par conséquent $g(a)$ est un sommet de simplexe si $f(x)$ et $f(x) \in \operatorname{st} g(a)$.

Supposons maintenant que $f(\operatorname{st} a) \subset \operatorname{st} g(a)$ pour chaque sommet a de l'espace X. Soit $x \in X$. Si $a_0, \ldots, a_q$ sont les sommets du simplexe si x, alors $x \in \bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} a_i$ et par conséquent

$$f(x) \in f\left(\bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} a_i\right) \subset \bigcap_{i=0}^{q} f(\operatorname{st} a_i) \subset \bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} g(a_i).$$

Ainsi les points $g(a_0), \ldots, g(a_q)$ appartiennent à l'ensemble des sommets du simplexe si $f(x)$ et, puisque $g(x)$ est situé dans le simplexe à sommets $g(a_0), \ldots, g(a_q)$, on a $g(x) \in \operatorname{si} f(x)$.

3. Une application continue f d'un espace simplicial X dans un espace simplicial Y possède une approximation simpliciale si et seulement si pour chaque sommet a de l'espace X il existe un sommet b de l'espace Y tel que $f(\operatorname{st} a) \subset \operatorname{st} b$.

La nécessité de cette condition découle directement de *2*; pour montrer sa suffisance, fixons une application $\varphi: \operatorname{ske}_0 X \to \operatorname{ske}_0 Y$ telle que $f(\operatorname{st} a) \subset \operatorname{st} \varphi(a)$ pour chaque sommet $a \in \operatorname{ske}_0 X$. Si $a_0, \ldots, a_q$ sont les sommets d'un même simplexe de l'espace X,

alors l'intersection $\bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} a_i$ n'est pas vide et, d'après les inclusions

$$\bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} \varphi(a_i) \supset \bigcap_{i=0}^{q} f(\operatorname{st} a_i) \supset f\left(\bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} a_i\right),$$

l'intersection $\bigcap_{i=0}^{q} \operatorname{st} \varphi(a_i)$ n'est pas vide non plus, de sorte que les sommets $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_q)$ appartiennent à un même simplexe de l'espace Y (voir 6.1). Par conséquent, φ se prolonge en une application simpliciale $X \to Y$ (voir 2.5) et il découle de *2* que cette application est une approximation simpliciale de l'application f.

4. Pour toute application continue f d'un espace simplicial fini X dans un espace simplicial Y, il existe un m tel que l'application f: $\mathrm{ba}^m X \to Y$ possède une approximation simpliciale.

Pour cette démonstration, on peut supposer que X est un polyèdre; voir 4.1. Les étoiles ouvertes des sommets constituant un recouvrement ouvert de l'espace Y, il existe un nombre positif ε tel que pour tout sous-espace A de l'espace X vérifiant $\operatorname{diam} A < \varepsilon$, l'ensemble $f(A)$ est contenu dans une de ces étoiles ouvertes (voir 1.1.7.16). Choisissons m si grand que les diamètres des simplexes de l'espace $\mathrm{ba}^m X$ soient inférieurs à $\varepsilon/2$ (voir 5.6). Alors le diamètre de l'étoile de chaque sommet de cet espace est inférieur à ε; d'après *3*, l'application f: $\mathrm{ba}^m X \to Y$ possède une approximation simpliciale.

8. Exercices

1. Soit X un espace simplicial. Démontrer que la formule

$$\operatorname{dist}(x, y) = \Big[\sum_{a \in \operatorname{ske}_0 X} (\operatorname{bar}_a(y) - \operatorname{bar}_a(x))^2\Big]^{1/2}$$

définit dans X une distance et que la topologie déterminée par cette distance coïncide avec la topologie originale si et seulement si X est localement fini.

2. Démontrer que pour chaque polyèdre $X \subset \mathbf{R}^n$ il existe une triangulation de l'espace $\mathbf{R}^n$, constituée par des simplexes euclidiens, relativement à laquelle X est un sous-espace au sens simplicial.

3. Démontrer que tout espace simplicial connexe localement fini de dimension n possède un plongement simplicial dans l'espace $\mathbf{R}^{2n+1}$ triangulé en simplexes euclidiens.

4. Soit f une application continue d'un espace simplicial dans un autre. Démontrer qu'il existe une nouvelle triangulation du premier espace possédant les deux propriétés suivantes: chacun de ces simplexes est contenu dans un simplexe de l'ancienne triangulation; relativement à la nouvelle triangulation, f admet une approximation simpliciale.

§ 3. PROPRIÉTÉS D'HOMOTOPIE DES ESPACES CELLULAIRES

1. Couples cellulaires

1. Soit X un espace cellulaire équipé et A son sous-espace. Désignons par h_0 la fonction $A \cup \mathrm{ske}_0 X \to I$, égale à 0 sur A et à 1 sur $(A \cup \mathrm{ske}_0 X) \setminus A$ et définissons par récurrence une suite de fonctions $h_r\colon A \cup \mathrm{ske}_r X \to I$ $(r = 1, 2, \ldots)$ à l'aide de la formule

$$h_r(x) = \begin{cases} h_{r-1}(x) & \text{si} \quad x \in A \cup \mathrm{ske}_{r-1} X, \\ 1 - \tau[1 - h_{r-1}(\mathrm{att}_e(y))] & \text{si} \quad x = \mathrm{cha}_e(\tau y), \end{cases}$$

où $e \in \mathrm{cell}_r X \setminus \mathrm{cell}_r A$, $\tau \in I$, $y \in S^{r-1}$. Puisque les fonctions h_r sont continues et se prolongent de proche en proche, elles définissent une certaine fonction continue $X \to I$. Cette dernière est appelée *fonction caractéristique du couple* (X, A), tandis que le voisinage du sous-espace A constitué de tous les points en lesquels la fonction caractéristique est inférieure à 1 est appelé *voisinage propre* de ce sous-espace.

Il est clair qu'une fonction caractéristique du couple (X, A) s'annule exactement sur A. Ainsi, *tout sous-espace d'un espace cellulaire est découpable.*

Si l'espace X est simplicial, la fonction caractéristique peut être construite à l'aide de l'équipement simplicial, et il est clair qu'elle ne dépend pas du choix de l'équipement. Le voisinage propre du sous-espace A coïncide dans ce cas avec son voisinage régulier dans ba X.

2. Un sous-espace d'un espace cellulaire équipé est un rétracte de déformation stricte de son voisinage propre.

Démonstration. Soit U le voisinage propre d'un sous-espace A d'un espace cellulaire équipé X. Puisque les produits $(A \cup \mathrm{ske}_r X) \times I$ recouvrent le cylindre $X \times I$ tout en étant ses sous-espaces, ils en constituent un recouvrement fondamental, et par conséquent leurs intersections avec le cylindre $U \times I$, i.e. les cylindres $U_r \times I$, où $U_r = U \cap (A \cup \mathrm{ske}_r X)$, constituent un recouvrement fondamental du cylindre $U \times I$. Désignons par G_0 l'homotopie constante de l'inclusion $A \to X$ et définissons les homotopies $F_r\colon U_r \times I \to U$ (avec $r \geqslant 1$) par la formule

$$F_r(x, t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in U_{r-1}, \\ \mathrm{cha}_e(((1-t)\tau + t)\, y) & \text{si} \quad x = \mathrm{cha}_e(\tau y), \end{cases}$$

où $e \in \mathrm{cell}_r X \setminus \mathrm{cell}_r A$, $\tau \in (0, 1]$, $y \in S^{r-1}$; définissons ensuite les homotopies $G_r\colon U_r \times I \to U$ (avec $r \geqslant 1$) par la formule

$$G_r(x, t) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2^{-r}, \\ F_r(x, 2^r t - 1) & \text{si} \quad 2^{-r} \leqslant t \leqslant 2^{-r+1}, \\ G_{r-1}(F_r(x, 1), t) & \text{si} \quad 2^{-r+1} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Les homotopies G_r prolongent l'une l'autre et définissent une A-homotopie $U \times I \to U$ qui joint id U à l'application envoyant U dans A. La réduction de cette dernière à $U \to A$ sera la rétraction de déformation stricte cherchée.

3. Tout couple cellulaire est un couple de Borsuk.

Ceci découle de *2* et de 1.3.5.11, puisque les espaces cellulaires sont normaux et leurs sous-espaces sont découpables.

4. Si (X, A) est un couple cellulaire et l'inclusion $A \to X$ est une équivalence d'homotopie, alors A est un rétracte de déformation stricte de l'espace X.

Pour la démonstration, il faut appliquer au couple (X, A) les théorèmes *3* et 1.3.5.6, puis le théorème *3* au couple $(X \times I, (X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1))$ et enfin le théorème 1.3.5.7 au couple (X, A).

Couples cellulaires et k-connexité

5. Soit k un entier non négatif ou bien ∞. Si (X, A) est un couple cellulaire tel que la dimension de chaque cellule de $X \setminus A$ n'est pas supérieure à k et (Y, B) est un couple topologique quelconque k-connexe, alors chaque application continue $f: X \to Y$ telle que $f(A) \subset B$ est A-homotope à une application qui envoie X dans un sous-ensemble de l'ensemble B. En particulier, chaque application continue d'un espace cellulaire de dimension k dans un espace topologique k-connexe est homotope à l'application constante.

Démonstration. Nous construirons une suite de A-homotopies

$$\{F_r: (A \cup \mathrm{ske}_r X) \times I \to Y\}_{r=-1}^{\infty}$$

qui prolongent l'une l'autre et ont les propriétés suivantes: (i) $F_r(x, 0) = f(x)$ si $x \in A \cup \mathrm{ske}_r X$; (ii) $F_r((A \cup \mathrm{ske}_r X) \times (1 - 2^{-r-1})) \subset B$; (iii) $F_r(x, t)$ ne dépend pas de t pour $t \geqslant 1 - 2^{-r-1}$.

L'application $F: X \times I \to Y$ qui coïncide sur $(A \cup \mathrm{ske}_r X) \times I$ avec F_{r-1} sera alors une A-homotopie qui joint f à une application envoyant X dans un sous-ensemble de l'ensemble B.

Procédons par récurrence. Définissons F_{-1} comme l'homotopie constante de l'application $f|_A$ et supposons que les homotopies $F_{-1}, \ldots, F_{q-1}$ qui se prolongent l'une l'autre et possèdent les propriétés (i), (ii), (iii) aient déjà été construites. Lorsque $q > k$, on a $A \cup \mathrm{ske}_q X = X$ et nous posons $F_q = F_{q-1}$; supposons maintenant que $q \leqslant k$. Puisque $((A \cup \mathrm{ske}_q X) \times I, (A \cup \mathrm{ske}_{q-1} X) \times I)$ est un couple de Borsuk (voir *3*), il existe une homotopie G de l'application $f|_{A \cup \mathrm{ske}_q X}$ telle que $G|_{(A \cup \mathrm{ske}_{q-1} X) \times I} = F_{q-1}$, et comme $F_{q-1}((A \cup \mathrm{ske}_{q-1} X) \times (1 - 2^{-q})) \subset B$, pour chaque cellule $e \in \mathrm{cell}_q X \setminus \mathrm{cell}_q A$ l'application $h_e: D^q \to Y$ définie par la formule

$$h_e(y) = G(\mathrm{cha}_e(y), 1 - 2^{-q})$$

applique S^{q-1} sur B. En vertu de la q-connexité du couple (Y, B), il en découle que pour chaque cellule $e \in \mathrm{cell}_q X \setminus \mathrm{cell}_q A$ il existe une S^{q-1}-homotopie $H_e : D^q \times I \to Y$ qui joint h_e à une application dont l'image est contenue dans B ; nous posons

$$F_q(x, t) = \begin{cases} F_{q-1}(x, t) & \text{si } x \in A \cup \mathrm{ske}_{q-1} X, \\ G(x, t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 - 2^{-q}, \\ H_e(y, 2^{q+1}(t - (1 - 2^{-q}))) & \\ & \text{si } x = \mathrm{cha}_e(y) \text{ et } 1 - 2^{-q} \leqslant t \leqslant 1 - 2^{-q-1}, \\ H_e(y, 1) & \text{si } x = \mathrm{cha}_e(y) \text{ et } 1 - 2^{-q-1} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Une vérification immédiate montre que l'application F_q est continue, prolonge F_{q-1} et vérifie les conditions (i), (ii), (iii), pour $r = q$.

6. Soit k un entier non négatif ou bien ∞. Si le couple cellulaire (X, A) est k-connexe et la dimension de chaque cellule de $X \setminus A$ n'est pas supérieure à k, alors A est rétracte de déformation stricte de l'espace X. En particulier, un espace cellulaire k-connexe de dimension k est contractile.

En effet, l'application id X est A-homotope (en vertu de *5*) à une certaine application $g : X \to X$ avec $g(X) \subset A$, de sorte que $\mathrm{ab}\, g : X \to A$ est une rétraction de déformation stricte.

2. Approximation cellulaire d'une application continue

1 (Lemme). *Soit $X = A \cup_\varphi [\sqcup_{\mu \in M} (D_\mu = D^{k+1})]$, où A est un espace topologique et φ une application continue de l'espace $\sqcup_{\mu \in M} (S_\mu = S^k)$ dans A. Soit d'autre part f une application continue de la boule D^{r+1} dans X telle que $f(S^r)$ est contenue dans $A' = \mathrm{imm}_2(A)$. Alors :*

(I) *si $r < k$, alors f est S^r-homotope à une application g telle que $g(D^{r+1}) \subset A'$;*

(II) *si $r = k$, alors f est S^r-homotope à une application g telle qu'il existe des plongements affines $\alpha_1, \ldots, \alpha_s : D^{k+1} \to D^{k+1}$ qui possèdent les quatre propriétés suivantes :* (i) *les images $d_i = \alpha_i(D^{k+1})$ sont des boules deux à deux disjointes contenues dans* $\mathrm{Int}\, D^{k+1}$; (ii) *chacune des composées $g \circ \alpha_i$ coïncide avec une des applications de la suite*

$$D^{k+1} \xrightarrow{\mathrm{in}_\mu} \sqcup_{\nu \in M} D_\nu \xrightarrow{\mathrm{imm}_2} X; \tag{1}$$

(iii) *l'ensemble $g(D^{k+1}) \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{Int}\, d_i)$ est contenu dans A'* ; (iv) *pour $k \geqslant 1$ le point de la boule d_i dont la première coordonnée prend la valeur maximale coïncide avec $\alpha_i(\mathrm{ort}_1)$ et le segment de droite qui joint*

ce point à ort_1 *est entièrement contenu dans* $D^{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \mathrm{Int}\, d_j$ $(i = 1, \ldots, s)$.

(La partie de ce lemme qui se rapporte au cas $r < k$ signifie que le couple (X, A') est k-connexe. C'est seulement cette partie qui sera nécessaire ici ; le cas $r = k$ sera utilisé au § 5.3.)

Démonstration. Désignons la composée des applications (1) par h_μ et fixons dans D^{k+1} un simplexe euclidien σ de dimension $(k+1)$ et dans $\mathrm{Int}\,\sigma$ un simplexe euclidien τ de dimension $(k+1)$ dans la triangulation $\mathrm{ba}^2\,\sigma$. Les ensembles $h_\mu(\mathrm{Int}\,\sigma)$ constituent avec $X \setminus \bigcup_{\mu \in M} h_\mu(\tau)$ un recouvrement ouvert de l'espace X ; il existe donc une triangulation si fine de la boule D^{r+1} que l'image d'un de ces simplexes par l'application f est contenue dans un des ensembles de ce recouvrement (voir 2.5.6 et 1.1.7.16). Désignons par K_μ la réunion des simplexes dont les images sont contenues dans $h_\mu(\mathrm{Int}\,\sigma)$ et par L la réunion des simplexes dont les images sont contenues dans $X \setminus \bigcup_\mu h_\mu(\tau)$. On remarque que les ensembles K_μ sont deux à deux disjoints, que parmi eux seul un nombre fini est non vide, en outre, K_μ et L sont des sous-espaces de l'espace simplicial D^{r+1} et $L \cup (\bigcup_\mu K_\mu) = D^{r+1}$.

Appliquons à la composée des applications

$$K_\mu \xrightarrow{\mathrm{ab}\, f} h_\mu(\sigma) \xrightarrow{(\mathrm{ab}\, h_\mu)^{-1}} \mathrm{ba}^2\,\sigma \tag{2}$$

le théorème 2.7.4. En vertu de ce théorème il existe un m tel que les applications (2) admettent, une fois les espaces K_μ remplacés par les espaces $\mathrm{ba}^m K_\mu$, une approximation simpliciale. Désignons par F_μ l'homotopie canonique qui joint (2) avec cette approximation simpliciale. Remarquant que τ n'est face d'aucun autre simplexe, alors $F_\mu((L \cap K_\mu) \times I)$ ne coupe pas $\mathrm{Int}\,\tau$ et par conséquent les homotopies F_μ déterminent une certaine homotopie

$$F : (L \cap (\bigcup_\mu K_\mu)) \times I \to X \setminus \bigcup_\mu h_\mu(\mathrm{Int}\,\tau).$$

D'après 1.3 et 1.3.5.9, l'homotopie F peut être prolongée en une certaine homotopie $G : L \times I \to X \setminus \bigcup_\mu h_\mu(\mathrm{Int}\,\tau)$, liée sur $B = D^{r+1} \setminus \bigcup_\mu f^{-1}(h_\mu(\mathrm{Int}\,\tau))$, de l'application $\mathrm{ab}\, f : L \to X \setminus \bigcup_\mu h_\mu \times (\mathrm{Int}\,\tau)$; l'on voit facilement que la composée des applications

$$K_\mu \times I \xrightarrow{F_\mu} \sigma \xrightarrow{h_\mu|\sigma} X, \quad L \times I \xrightarrow{G} X \setminus \bigcup_\mu h_\mu(\mathrm{Int}\,\tau) \xrightarrow{\mathrm{in}} X$$

constitue une B-homotopie de l'application f. Cette dernière joint f à une application $f_1 : D^{r+1} \to X$ telle que pour chaque μ la composée des applications

$$\mathrm{ba}^m K_\mu \xrightarrow{\mathrm{ab}\, f_1} h_\mu(\sigma) \xrightarrow{(\mathrm{ab}\, h_\mu)^{-1}} \mathrm{ba}^2\sigma$$

est simpliciale et l'on a $h_\mu(\tau) \subset f_1(K_\mu) \subset h_\mu(\sigma)$. Puisque $B \supset S^r$, l'application f_1 est S^r-homotope à f et notre lemme sera démontré si nous démontrerons (I) et (II) avec f_1 dans le rôle de f.

Choisissons dans Int τ une boule quelconque δ et désignons par ψ l'homéomorphisme de la boule δ sur D^{k+1} défini par la formule $\psi(x) = (x - a)/\rho$, où a et ρ sont le centre et le rayon de la boule δ, et désignons par Ψ l'application du cylindre $D^{k+1} \times I$ dans D^{k+1} définie par la formule

$$\Psi(x, t) = \frac{x - t_0 a}{1 - t_0(1 - \rho)},$$

où t_0 est le plus grand des nombres τ de l'intervalle $[0, t]$ tel que $(x - \tau a)/(1 - \tau(1 - \rho)) \in D^{k+1}$. Il est clair que les applications $p_t : X \to X$ définies par la formule

$$p_t(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A', \\ h_\mu \circ \Psi(h_\mu^{-1}(x), t) & \text{si } x \in h_\mu(\operatorname{Int} D^{k+1}) \end{cases}$$

constituent une A'-homotopie de l'application id X ; d'autre part, $p_1(X \setminus \bigcup_\mu h_\mu(\delta)) \subset A'$ et $p_1 \circ h_\mu = h_\mu \circ \psi$. Puisque $r < k$, on a $f_1(D^{r+1}) \subset X \setminus \bigcup_\mu h_\mu(\delta)$, et dans ce cas, pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que la formule $(y, t) \mapsto p_t(h_1(y))$ détermine une S^r-homotopie liant f_1 à une application dont l'image est contenue dans A'. Si $r = k$, alors $f^{-1}(\bigcup_\mu h_\mu(\delta))$ se décompose en ellipsoïdes deux à deux disjoints $\delta_1, \ldots, \delta_s$, chacun desquels est appliqué par f_1 sur un des ensembles $h_\mu(\delta)$ par une application affine. Soit $\{q_t\}$ une S^k-homotopie de l'application id D^{k+1} telle que : les images inverses $d_i = q_1^{-1}(\delta_i)$ sont des boules ; les applications ab $q_1 : d_i \to \delta_i$ sont affines ; pour $k \geqslant 1$ le point de la boule d_i avec la plus grande valeur de la première coordonnée est appliqué par l'application $f_1 \circ q_1$ dans un des points $h_\mu(\psi^{-1}(\mathrm{ort}_1))$ et le segment qui joint ce point avec ort_1 est entièrement contenu dans $D^{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \operatorname{Int} d_j$. Il est clair que la formule $(y, t) \mapsto (f_1 \circ q_t(y), t)$ détermine une S^r-homotopie qui joint f_1 à une certaine application g vérifiant les conditions (i) à (iv) du lemme.

2. Le couple cellulaire (X, A) tel que $A \supset \mathrm{ske}_k X$ est nécessairement k-connexe $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$. En particulier, un espace cellulaire dont le squelette de dimension k se réduit à un seul point est k-connexe.

Démonstration. Puisque l'image d'une boule dans X par toute application continue est contenue dans un des squelettes $\mathrm{ske}_r X$, il suffit d'établir la k-connexité de tous les couples $(A \cup \mathrm{ske}_r X, A)$ pour $r > k$, qui découle immédiatement de celle des couples $(A \cup \mathrm{ske}_{q+1} X, A \cup \mathrm{ske}_q X)$ pour $q \geqslant k$ postulée par le lemme *1* (voir 1.2.1).

3 (Corollaires). *La sphère* S^n *est* $(n-1)$*-connexe* $(n \geqslant 1)$. *Les espaces* $\mathbf{C}P^n$ *sont simplement connexes* $(0 \leqslant n \leqslant \infty)$. *Les espaces* $\mathbf{H}P^n$ *sont* 3*-connexes* $(0 \leqslant n \leqslant \infty)$. *L'espace* $\mathbf{Ca}P^2$ *est* 7*-connexe.*

4. Toute application continue d'un espace cellulaire dans un espace cellulaire est homotope à une application cellulaire. Toute application continue d'un espace cellulaire X *dans un espace cellulaire* Y, *cellulaire sur un sous-espace* A *de l'espace* X, *est* A*-homotope à une application cellulaire.*

Démonstration. A partir de l'application continue $f: X \to Y$, cellulaire sur A, nous allons construire une suite d'applications $\{f_r : X \to Y\}_{r=-1}^{\infty}$ et une suite d'homotopies $\{F_r : X \times I \to Y\}_{r=0}^{\infty}$ telles que:

(i) $f_{-1} = f$;

(ii) l'application f_r est cellulaire sur $A \cup \operatorname{ske}_r X$;

(iii) l'homotopie F_r est liée sur $A \cup \operatorname{ske}_{r-1} X$ et joint f_{r-1} à f_r.

Il est clair que la formule

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} F_r(x, 2-2^{r+1}(1-t)) \\ \qquad\qquad \text{si } 1-2^{-r} \leqslant t \leqslant 1-2^{-r-1}, \\ F_r(x, 1) \text{ si } x \in A \cup \operatorname{ske}_r X \text{ et } t = 1 \end{cases}$$

détermine alors une A-homotopie liant f à une application cellulaire.

La construction s'effectue par récurrence. Supposons que nous avons construit f_r et F_r pour $r < k$ de manière à satisfaire aux conditions (i) à (iii); alors, d'après *2* et 1.5, il existe une $(\operatorname{ske}_k A \cup \cup \operatorname{ske}_{k-1} X)$-homotopie liant $f_{k-1} \mid_{\operatorname{ske}_k X}$ à une application dont l'image est située dans $\operatorname{ske}_k Y$. Ensemble avec l'homotopie constante de l'application $f_{k-1} \mid_{A \cup \operatorname{ske}_{k-1} X}$, cette homotopie détermine une certaine $(A \cup \operatorname{ske}_{k-1} X)$-homotopie de l'application $f_{k-1} \mid_{A \cup \operatorname{ske}_k X}$ qui se prolonge, en vertu de 1.3, en une certaine $(A \cup \operatorname{ske}_{k-1} X)$-homotopie de l'application f_{k-1}. Nous prenons cette dernière en guise de F_k et l'application avec laquelle elle joint f_{k-1}, pour f_k.

5. Les applications cellulaires homotopes sont cellulairement homotopes. En outre, si des applications cellulaires $f, g : X \to Y$ *sont* A*-homotopes et* A *est un sous-espace de l'espace* X, *alors* f, g *sont cellulairement* A*-homotopes.*

En effet, on obtient une A-homotopie entre f et g en prenant l'application continue du cylindre $X \times I$ dans Y, cellulaire sur $(X \times (0 \cup 1)) \cup (A \times I)$; en vertu du théorème *4*, cette application est $[(X \times (0 \cup 1)) \cup (A \times I)]$-homotope à une application cellulaire.

3. Couples cellulaires k-connexes

1. Tout couple cellulaire k*-connexe* $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ *est homotopiquement équivalent à un certain couple cellulaire* (Y, B) *avec* $B \supset \supset \operatorname{ske}_k Y$.

Démonstration. Soit (X, A) un couple cellulaire k-connexe. Si $k = \infty$, alors d'après 1.6, A est un rétracte de déformation stricte de l'espace X, de sorte que le couple (X, A) est homotopiquement équivalent au couple (X, X) ; supposons que $k < \infty$.

On peut admettre que $A \supset \mathrm{ske}_{k-1}X$: le cas général se réduit à ce cas particulier par récurrence sur k puisque pour $k \geqslant 1$ tout couple k-connexe est $(k-1)$-connexe, tandis que la condition $A \supset \mathrm{ske}_{-1}X$ n'a aucune signification. D'après 1.5 et 2.5, l'inclusion $\mathrm{ske}_k X \to X$ peut être liée par une certaine $\mathrm{ske}_k A$-homotopie cellulaire f: $(\mathrm{ske}_k X) \times I \to X$ avec une application dont l'image est contenue dans A. Définissons l'application F: $(\mathrm{ske}_k X) \times I \times I \to X$ par la formule $F(x, t_1, t_2) = f(x, t_1)$ et posons

$$C = ((\mathrm{ske}_k X) \times I \times 0) \cup ((\mathrm{ske}_k X) \times (0 \cup 1) \times I) \cup ((\mathrm{ske}_k A) \times I \times I),$$
$$D = (\mathrm{ske}_k X) \times I \times I.$$

Il est clair que C, D sont des sous-espaces de l'espace cellulaire $(\mathrm{ske}_k X) \times I \times I$ et que l'application F est cellulaire. Nous définissons Y et B par les formules

$$Y = X \cup_{F|C} ((\mathrm{ske}_k X) \times I \times I), \qquad B = (\mathrm{imm}_2(A)) \cup (\mathrm{imm}_1(D)).$$

D'après 1.5.5, l'espace Y est cellulaire et il est clair que B est son sous-espace contenant $\mathrm{ske}_k Y$. Pour démontrer que le couple (X, A) est homotopiquement équivalent au couple (Y, B), remarquons que $\mathrm{imm}_2(A)$ est un rétracte de déformation stricte de l'espace B, tandis que $\mathrm{imm}_2(X)$ est un rétracte de déformation stricte de l'espace Y : l'homotopie $B \times I \to B$ qui joint $\mathrm{id}\, B$ avec la rétraction $B \to \mathrm{imm}_2(A)$, tout en étant liée sur $\mathrm{imm}_2(A)$, se définit par les formules

$$(\mathrm{imm}_1(x, t_1, 1), t) \mapsto \mathrm{imm}_1, (x, tt_1\ 1) \quad [x \in \mathrm{ske}_k X;\ t,\ t_1 \in I],$$
$$(\mathrm{imm}_2(x), t) \mapsto \mathrm{imm}_2(x) \qquad [x \in A,\ t \in I],$$

tandis que l'homotopie $Y \times I \to Y$ qui joint $\mathrm{id}\, Y$ avec la rétraction $Y \to \mathrm{imm}_2(X)$ et est liée sur $\mathrm{imm}_2(X)$ est donnée par les formules

$$(\mathrm{imm}_1(x, t_1, t_2), t) \mapsto \mathrm{imm}_1(x, t_1, tt_2) \quad [x \in \mathrm{ske}_k X;\ t,\ t_1,\ t_2 \in I],$$
$$(\mathrm{imm}_2(x), t) \mapsto \mathrm{imm}_2(x) \qquad [x \in X,\ t \in I].$$

Par conséquent, le couple $(Y, \mathrm{imm}_2(A))$ est homotopiquement équivalent aussi bien au couple (Y, B) (voir 1.3.5.8) qu'au couple $(\mathrm{imm}_2(X), \mathrm{imm}_2(A))$, et il ne reste qu'à remarquer que le couple $(\mathrm{imm}_2(X), \mathrm{imm}_2(A))$ est homéomorphe au couple (X, A).

2. *Tout espace cellulaire k-connexe* $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ *est homotopiquement équivalent à un espace cellulaire dont le squelette de dimension k se réduit à un point.*

Démonstration. Soit X un espace cellulaire k-connexe. Choisissons dans X une cellule de dimension nulle x_0 et remplaçons le couple (X, x_0) par le couple cellulaire (X, A) qui lui est homotopiquement équivalent, avec $A \supset \mathrm{ske}_k X$ (voir *1*); posons $Y = X/A$. Puisque A est contractile, Y est homotopiquement équivalent à X (voir 1.3.7.7 et 1.3) d'où l'on tire que $\mathrm{ske}_k Y$ est un point.

3. Le théorème *2* n'affirme rien au sujet de la dimension de l'espace Y par lequel on a remplacé l'espace donné X; or, il suit de la démonstration Y qu'on peut toujours choisir $\dim Y \leqslant \max(\dim X, k+2)$. Notre but immédiat est de montrer que pour $k = 0$ cette dernière inégalité peut être remplacée par l'inégalité $\dim Y \leqslant \dim X$ (voir *6*).

4 (Lemme). *Soient Y un espace topologique et $\{Y_k\}_{k=0}^{\infty}$ son recouvrement fondamental tel que $Y_k \cap U_l \neq \varnothing$ pour $k - l > 1$. Si pour $k \geqslant 1$ l'intersection $Y_{k-1} \cap Y_k$ est un rétracte de déformation stricte de l'espace Y_k, alors Y_0 est un rétracte de déformation stricte de l'espace Y.*

Démonstration. Si $F_k\colon Y_k \times I \to Y_k$ est une homotopie liée sur $Y_{k-1} \cap Y_k$ joignant $\mathrm{id}\, Y_k$ avec l'application qui envoie Y_k dans $Y_{k-1} \cap Y_k$, alors la formule

$$(y, t) \longmapsto \begin{cases} y \text{ si } y \in Y_k \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant 2^{-k}, \\ F_l(F_{l+1}(\ldots F_k(x, 1), \ldots, 1), 2^l t - 1) \\ \quad \text{si } y \in Y_k \text{ et } 2^{-l} \leqslant t \leqslant 2^{-l+1} \ (l \leqslant k) \end{cases}$$

détermine une y_0-homotopie $Y \times I \to Y$ qui joint $\mathrm{id}\, Y$ à application envoyant Y dans y_0.

5. Chaque espace cellulaire connexe possède un sous-espace contractile de dimension un qui contient toutes les cellules de dimension nulle.

Démonstration. Choisissons dans l'espace cellulaire connexe donné X une cellule x_0 de dimension nulle et désignons par A_k l'ensemble des cellules de dimension nulle que l'on peut joindre à x_0 par un chemin $I \to \mathrm{ske}_1 X$ qui contient au plus k cellules de dimension un. Puisque l'espace $\mathrm{ske}_1 X$ est connexe (voir 1.4.7) et un chemin ne peut couper qu'un nombre fini de cellules, on a $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \mathrm{ske}_0 X$. Fixons pour chaque cellule de dimension nulle $x \in A_k \setminus A_{k-1}$ (avec $k \geqslant 1$) une cellule fermée $c(x)$ de dimension un qui joint x avec une certaine cellule de $A_{k-1} \setminus A_{k-2}$; posons

$$Y_k = \begin{cases} x_0 & \text{si } k = 0, \\ \bigcup_{y \in A_k \setminus A_{k-1}} c(y) & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

et $Y = \bigcup_{k=0}^{\infty} Y_k$. Il est clair que Y est un sous-espace de dimension un de X qui contient $\mathrm{ske}_0 X$, et que le recouvrement $\{Y_k\}$ de Y vérifie

les conditions du lemme *4*. Ainsi Y_0 est un rétracte de déformation stricte de l'espace Y, i.e. Y est contractile.

6. Tout espace cellulaire connexe est homotopiquement équivalent à un espace cellulaire de même dimension ou de dimension plus petite avec une seule cellule de dimension nulle. En particulier, tout espace cellulaire connexe de dimension un est homotopiquement équivalent à un bouquet de cercles.

La proposition découle de *5*, 1.3 et 1.3.7.7.

Applications aux constructions cellulaires

7. Si un espace cellulaire X est k-connexe, alors les espaces su X *et* su (X, x_0), *où x_0 est une cellule de dimension nulle, sont $(k+1)$-connexes.*

La démonstration se réduit à trois remarques. Premièrement: puisque les espaces su X et su (X, x_0) sont homotopiquement équivalents (voir 1.4.5, 1.3.6.8 et 1.3.7.7), la $(k+1)$-connexité de l'un d'eux implique la $(k+1)$-connexité de l'autre. Deuxièmement: en vertu de *2* et de 1.3.7.12, il suffit d'établir la $(k+1)$-connexité de l'espace su (X, x_0) dans le cas où $\mathrm{ske}_k X = x_0$. Troisièmement: dans le cas indiqué, la $(k+1)$-connexité de l'espace su (X, x_0) découle du théorème *2* puisque le squelette ske_{k+1} su (X, x_0) n'a qu'un seul point de même que $\mathrm{ske}_k X$.

8. Si X_1 est un espace cellulaire k_1-connexe et X_2 un espace cellulaire k_2-connexe, alors les produits tensoriels $(X_1, x_1) \otimes (X_2, x_2)$ et $(X_1, x_1) \otimes_c (X_2, x_2)$, où x_1, x_2 sont des cellules de dimension nulle, sont $(k_1 + k_2 + 1)$-connexes.

La démonstration se ramène à trois remarques. Premièrement, puisque la topologie de l'espace $(X_1, x_1) \otimes (X_2, x_2)$ coïncide sur ses parties compactes avec la topologie de l'espace $(X_1, x_1) \otimes_c (X_2, x_2)$, la $(k_1 + k_2 + 1)$-connexité de l'un d'eux implique la $(k_1 + k_2 + 1)$-connexité de l'autre. Deuxièmement, en vertu de *1* et de 1.3.7.12, il suffit de démontrer la $(k_1 + k_2 + 1)$-connexité de l'espace $(X_1, x_1) \otimes_c (X_2, x_2)$ dans le cas où $\mathrm{ske}_{k_1} X_1 = x_1$, $\mathrm{ske}_{k_2} X_2 = x_2$. Troisièmement, dans le cas indiqué, la $(k_1 + k_2 + 1)$-connexité de l'espace $(X_1, x_1) \otimes_c (X_2, x_2)$ découle du théorème *2*, puisque le squelette $\mathrm{ske}_{k_1+k_2+1}((X_1, x_1) \otimes_c (X_2, x_2))$ se réduit à un seul point en même temps que $\mathrm{ske}_{k_1} X_1$ et $\mathrm{ske}_{k_2} X_2$.

9. (Lemme). *Pour des espaces cellulaires quelconques X_1, X_2 à cellules zéro-dimensionnelles distinguées x_1, x_2, le join cellulaire $(X_1, x_1) *_c (X_2, x_2)$ est homotopiquement équivalent à* su $((X_1, x_1) \otimes_c (X_2, x_2)$, bp).

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de leur définition, les espaces $(X_1, x_1) *_c (X_2, x_2)$, su $((X_1, x_1) \otimes_c (X_2, x_2)$, bp) s'obtiennent à partir de l'espace $(X_1 \times_c X_2) \times I$ par double passage à l'espace

quotient; il est clair que la projection

$$(X_1 \times {}_cX_2) \times I \to \mathrm{su}\,((X_1, x_1) \otimes {}_c(X_2, x_2), \mathrm{bp})$$

est constante sur les éléments de partition

$$\mathrm{zer}\,(\mathrm{pr}: (X_1 \times {}_cX_2) \times I \to (X_1, x_1) * {}_c\,(X_2, x_2)).$$

On obtient l'application

$$f = \mathrm{fact}\,[\mathrm{pr}: (X_1 \times {}_cX_2) \times I \to (X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)]:$$

$$\mathrm{su}\,((X_1, x_1) \otimes {}_c(X_2, x_2), \mathrm{bp}) \to (X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)$$

qui est décomposable (voir 1.2.3.4), et comme le seul élément de la partition zer (f) qui ne se réduit pas au point unique est l'ensemble f^{-1} (bp), on a

$$\mathrm{su}\,((X_1, x_1) \otimes {}_c(X_2, x_2), \mathrm{bp}) = [(X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)]/f^{-1}\,(\mathrm{bp}).$$

Enfin

$$f^{-1}\,(\mathrm{bp}) = [(X_1, x_1) * {}_c(x_2, x_2)] \cup [(x_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)]$$

et puisque cette réunion est contractile, l'espace quotient $[(X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)]/f^{-1}$ (bp) est homotopiquement équivalent à $(X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)$.

10. Si X_1 est un espace cellulaire k_1-connexe, et X_2 un espace cellulaire k_2-connexe, les joins $X_1 * X_2$, $X_1 *_c X_2$ et $(X_1, x_1) * (X_2, x_2)$, $(X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)$, où x_1, x_2 sont des cellules zéro-dimensionnelles, sont $(k_1 + k_2 + 2)$-connexes.

Pour la démonstration nous nous bornons à quatre remarques. Premièrement: puisque l'espace $(X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)$ s'obtient de l'espace $X_1 * {}_cX_2$ par passage à l'espace quotient par un sous-espace contractile (en l'occurrence la cellule fermée $x_1 * x_2$ de dimension un), ces espaces sont homotopiquement équivalents. Deuxièmement: puisque la topologie de l'espace $X_1 * {}_cX_2$ coïncide sur ses parties compactes avec la topologie de l'espace $X_1 * X_2$, la $(k_1 + k_2 + 2)$-connexité de l'un de ces espaces implique celle de l'autre. Troisièmement: de la même manière, la $(k_1 + k_2 + 2)$-connexité de l'un des espaces $(X_1, x_1) * (X_2, x_2)$, $(X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)$ implique celle de l'autre. Quatrièmement: la $(k_1 + k_2 + 2)$-connexité de l'espace $(X_1, x_1) * {}_c(X_2, x_2)$ découle immédiatement de *9*, *8* et *7*.

4. Approximation simpliciale des espaces cellulaires

1 (Lemme). *Soient X, Y des espaces cellulaires et $\{X_r\}_{r=0}^{\infty}$, $\{Y_r\}_{r=0}^{\infty}$ leurs filtrations constituées par des sous-espaces. Soit ensuite $f: X \to Y$ une application cellulaire telle que $f\,(X_r) \subset Y_r$ $(0 \leqslant r < \infty)$. Si* ab $f: X_r \to Y_r$ *est une équivalence homotopique, alors f est également une équivalence homotopique.*

Démonstration. Puisque les espaces $Z_r = \mathrm{Cyl}\,(\mathrm{ab}\, f\colon X_r \to Y_r)$ sont des sous-espaces de l'espace $Z = \mathrm{Cyl}\, f$ (au sens cellulaire) et vérifient les conditions $Z_r \subset Z_{r+1}$, $\bigcup_{r=0}^{\infty} Z_r = Z$, ils constituent une filtration de l'espace Z (voir 1.1.9), par conséquent, l'image de toute application continue est contenue dans un des ensembles Z_r (voir 1.2.4.5). D'où l'on déduit que si tous les couples (Z_r, X_r) sont ∞-connexes, alors le couple (Z, X) est également ∞-connexe, et il ne reste qu'à remarquer que la ∞-connexité des couples (Z_r, X_r), (Z, X) implique que les applications $\mathrm{ab}\, f\colon X_r \to Y_r$ et f respectivement sont des équivalences homotopiques (voir 1.3, 1.6, 1.3.3.9 et 1.3.7.13).

2. *Pour tout espace cellulaire X, il existe un espace simplicial de même dimension qui lui est homotopiquement équivalent et qui est fini lorsque X est fini, et dénombrable lorsque X est dénombrable.*

Pour la démonstration, nous construirons une suite d'espaces simpliciaux $\{Y_r\}_{r=0}^{\infty}$, une suite de plongements simpliciaux $\{i_r\colon Y_r \to Y_{r+1}\}_{r=0}^{\infty}$ et une suite d'équivalences homotopiques cellulaires $\{f_r\colon \mathrm{ske}_r X \to Y_r\}_{r=0}^{\infty}$, possédant les quatre propriétés suivantes:

(i) $f_r\,|_{\mathrm{ske}_{r-1}X} = i_{r-1} \circ f_{r-1}$;

(ii) $\dim Y_r = \dim \mathrm{ske}_r X$;

(iii) si l'espace $\mathrm{ske}_r X$ est fini, alors l'espace Y_r est fini; si $\mathrm{ske}_r X$ est dénombrable, alors Y_r est également dénombrable;

(iv) si $\mathrm{ske}_r X = \mathrm{ske}_{r-1} X$, alors $Y_r = Y_{r-1}$ et $i_{r-1} = \mathrm{id}\, Y_{r-1}$.

Ainsi nous aurons défini l'espace simplicial $\lim\,(Y_r, i_r)$ de dimension $\dim X$, qui est fini ou dénombrable en même temps que X, et l'application cellulaire $f\colon X \to \lim\,(Y_r, i_r)$ avec $f\,|_{\mathrm{ske}_r X} = \mathrm{imm}_2 \circ f$; d'après le lemme *1*, cette dernière application sera une équivalence homotopique.

Définissons Y_0 et f_0 comme $\mathrm{ske}_0 X$ et $\mathrm{id}\, \mathrm{ske}_0 X$ et supposons que pour $r < q$ les espaces simpliciaux Y_r, les équivalences homotopiques cellulaires f_r et les plongements simpliciaux i_{r-1} ont déjà été construits de manière à satisfaire aux conditions (i) à (iv). Conformément à 1.2.1, nous pouvons représenter $\mathrm{ske}_q X$ comme $(\mathrm{ske}_{q-1} X) \cup \cup_\varphi \Delta$, où $\Delta = \sqcup_{e \in \mathrm{cell}_q X} (D_e = D^q)$, et φ comme une application continue de l'espace $\Sigma = \sqcup_{e \in \mathrm{cell}_q X} (S_e = S^{q-1})$ dans $\mathrm{ske}_{q-1} X$; construisons pour Δ une triangulation relativement à laquelle Σ soit un sous-espace complet et l'application $f_{q-1} \circ \varphi\colon \Sigma \to Y_{q-1}$ admette une approximation simpliciale $g\colon \Sigma \to Y_{q-1}$; ordonnons Y_{q-1} et Σ de manière à rendre g monotone. En appliquant successivement le théorème 1.3.7.10, puis le théorème 1.3.7.8 et à nouveau le théorème 1.3.7.10, nous obtiendrons trois équivalences homotopiques: $\mathrm{ske}_q X \to Y_{q-1} \cup_{f_{q-1}\circ\varphi} \Delta$ qui coïncide avec f_{q-1} sur $\mathrm{ske}_{q-1} X$; $Y_{q-1} \cup_{f_{q-1}\circ\varphi} \Delta \to Y_{q-1} \cup_g \Delta$ qui est l'identité sur Y_{q-1}, et $Y_{q-1} \cup_g \Delta \to (\mathrm{Scyl}\, g) \cup_{\mathrm{in}} \cup_{\mathrm{in}} \Delta$ avec $\mathrm{in} = [\mathrm{in}\colon \Sigma \to \mathrm{Scyl}\, g]$ (voir 2.5.11) qui coïncide sur Y_{q-1}

avec l'inclusion $Y_{q-1} \to \mathrm{Scyl}\ g$. Définissons Y_q comme $(\mathrm{Scyl}\ g) \cup_{\mathrm{in}} \Delta$, f_q comme la composée des trois équivalences homotopiques indiquées et i_{q-1} comme la suite des plongements $Y_{q-1} \to \mathrm{Scyl}\ g \to Y_q$. Une triangulation de l'espace Δ et celle du cylindre Scyl g déterminent une triangulation de l'espace Y_q (voir 2.5.2); il est clair que l'inclusion i_{q-1} est simpliciale et, enfin, que Y_q, f_q et i_{q-1} vérifient les conditions (i) à (iv) lorsque $r = q$.

3. Si X est un espace cellulaire fini, et Y est un espace cellulaire dénombrable, l'ensemble $\pi(X, Y)$ est dénombrable.

Démonstration. D'après les théorèmes *2* et 1.3.1.8, il suffit de considérer le cas où X et Y sont des espaces simpliciaux. Or, dans ce cas, d'après le théorème 2.7.4, la cardinalité de l'ensemble $\pi(X, Y)$ ne peut être supérieure à celle de l'ensemble de toutes les applications simpliciales $\mathrm{ba}\ {}^m X \to Y$ $(m = 0, 1, \ldots)$ lequel est évidemment dénombrable.

5. Exercices

1. Démontrer que si des espaces cellulaires X_1, X_2 sont homotopiquement équivalents à des espaces cellulaires X_1', X_2', alors l'espace $X_1 \times_c X_2$ est homotopiquement équivalent à l'espace $X_1' \times_c X_2'$ et l'espace $X_1 * {}_c X_2$ est homotopiquement équivalent à l'espace $X_1' * {}_c X_2'$.

2. Démontrer que tout espace cellulaire est homotopiquement équivalent à un espace cellulaire localement fini.

3. Démontrer que tout couple cellulaire est homotopiquement équivalent à un couple simplicial, tandis que tout couple cellulaire fini est homotopiquement équivalent à un couple simplicial fini.

4. Démontrer qu'il n'existe pas d'espace cellulaire qui soit homotopiquement équivalent au sous-espace de la droite, constitué du point 0 et des points $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$

CHAPITRE 3

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

§ 1. NOTIONS FONDAMENTALES

1. Variétés topologiques

1. Ce chapitre débute par une introduction élémentaire à la topologie différentielle. Son objet principal sont des variétés différentiables. De même que les espaces cellulaires et simpliciaux, ce sont des espaces topologiques à structure supplémentaire. Les variétés topologiques occupent une position intermédiaire entre les variétés différentiables et les espaces topologiques; elles ne sont pas encore munies de structures supplémentaires.

Espaces localement euclidiens

2. Un espace topologique est *localement euclidien de dimension n* si chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à l'espace R^n ou au demi-espace R^n_- de l'espace R^n constitué par les points $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \leqslant 0$. Le demi-espace R^n_- est défini pour $n \geqslant 1$; pour $n = 0$ nous ne le définissons pas. Alors un espace localement euclidien de dimension 0 sera par définition un espace topologique dont tous les points possèdent un voisinage homéomorphe à R^0, i.e. un espace discret.

Les points d'un espace localement euclidien possédant un voisinage homéomorphe à R^n sont appelés *intérieurs* et les autres sont les *points de bord.* Les points intérieurs d'un espace localement euclidien constituent son *intérieur*, les points de bord, son *bord.* On désigne respectivement par int X et ∂X l'intérieur et le bord d'un espace localement euclidien X. (Rappelons au lecteur que l'ensemble des points intérieurs d'un sous-ensemble d'un espace topologique est désigné par Int; la différence de notation et le contexte permettront d'éviter toute confusion.) L'intérieur est évidemment un ensemble ouvert partout dense et le bord, un ensemble fermé.

Il est clair qu'un espace topologique est un espace localement euclidien de dimension n déjà dans le cas où chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble ouvert d'un des espaces R^n, R^n_-. Il en découle qu'un sous-ensemble ouvert d'un espace localement euclidien de dimension n est un espace lo-

calement euclidien de dimension n; en particulier, l'intérieur d'un espace localement euclidien de dimension n est un espace localement euclidien de dimension n sans bord. Il est également clair que l'intérieur et le bord d'un sous-ensemble ouvert U d'un espace localement euclidien X se déterminent par les formules $\operatorname{int} U = U \cap \operatorname{int} X$, $\partial U = U \cap \partial X$.

Puisqu'un espace localement euclidien est localement connexe, ses composantes sont des ensembles ouverts (voir 1.3.4.3) et donc également fermés.

En guise d'exemples d'espaces localement euclidiens de dimension n citons les espaces R^n, R^n_-, S^n, D^n. Il est clair que $\partial \mathsf{R}^n = \varnothing$ et $\partial S^n = \varnothing$. On voit également que tous les points de bord de l'espace R^n_- sont situés dans l'hyperplan frontière R^{n-1}_1 constitué des points $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_1 = 0$ et que tous les points de bord de la boule D^n sont contenus dans la sphère frontière S^{n-1}.

3. Il découle du fait que le produit $\mathsf{R}^{n_1} \times \mathsf{R}^{n_2}$ est homéomorphe à l'espace $\mathsf{R}^{n_1+n_2}$ que, pour des espaces localement euclidiens X_1, X_2 de dimensions n_1, n_2 sans bord, $X_1 \times X_2$ est un espace localement euclidien de dimension $n_1 + n_2$ sans bord; en général, si $X_1, \ldots, X_s$ sont des espaces localement euclidiens de dimensions $n_1, \ldots, n_s$ sans bord, alors $X_1 \times \ldots \times X_s$ est un espace localement euclidien de dimension $n_1 + \ldots + n_s$ sans bord. Pour étendre ce raisonnement aux espaces localement euclidiens avec bord, remarquons que la formule

$$((x_1, \ldots, x_{n_1}), (y_1, \ldots, y_{n_2})) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}),$$

bui détermine l'homéomorphisme canonique $\mathsf{R}^{n_1} \times \mathsf{R}^{n_2} \to \mathsf{R}^{n_1+n_2}$, définit également pour $n_1 > 0$ l'homéomorphisme $\mathsf{R}^{n_1}_- \times \mathsf{R}^{n_2} \to \mathsf{R}^{n_1+n_2}_-$; de même, la formule

$$((x_1, \ldots, x_{n_1}), (y_1, \ldots, y_{n_2})) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n_2}, x_1, \ldots, x_{n_1})$$

détermine pour $n_2 > 0$ l'homéomorphisme $\mathsf{R}^{n_1} \times \mathsf{R}^{n_2}_- \to \mathsf{R}^{n_1+n_2}_-$ et la formule

$$((x_1, \ldots, x_{n_1}), (y_1, \ldots, y_{n_2})) \mapsto$$
$$\mapsto (-2x_1y_1, x_1^2 - y_1^2, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_2, \ldots, y_{n_2})$$

détermine pour $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ l'homéomorphisme $\mathsf{R}^{n_1}_- \times \mathsf{R}^{n_2}_- \to \mathsf{R}^{n_1+n_2}_-$. Ainsi chacun des produits $\mathsf{R}^{n_1}_- \times \mathsf{R}^{n_2}$, $\mathsf{R}^{n_1} \times \mathsf{R}^{n_2}_-$, $\mathsf{R}^{n_1}_- \times \mathsf{R}^{n_2}_-$ est homéomorphe à $\mathsf{R}^{n_1+n_2}_-$, donc si X_1, X_2 sont des espaces localement euclidiens quelconques de dimensions n_1, n_2, alors $X_1 \times X_2$ est un espace localement euclidien de dimension $n_1 + n_2$ et en général si $X_1, \ldots, X_s$ sont des espaces localement euclidiens quelconques de dimensions $n_1, \ldots, n_s$, alors $X_1 \times \ldots \times X_s$ est un espace localement euclidien de dimension $n_1 + \ldots + n_s$.

4. Les définitions formulées dans *2* donnent lieu à deux questions non triviales.

La première question est la suivante : est-ce qu'un espace topologique non vide peut être en même temps espace localement euclidien de dimension n et espace localement euclidien de dimension n', lorsque $n' \neq n$? Nous montrerons au chapitre 4 que la réponse est négative (voir 4.6.5.10). Cette réponse est évidente lorsque $n = 1$, $n' > 1$ ou $n' = 1$, $n > 1$ [tout sous-ensemble ouvert non vide d'un] espace localement euclidien de dimension un devient non connexe si l'on en élimine deux points choisis de manière appropriée (par exemple, deux points de ce sous-ensemble appartenant à une partie ouverte homéomorphe à R^1), alors qu'un espace localement euclidien non vide de dimension $n' > 1$ possède un sous-ensemble ouvert non vide qui reste connexe après l'élimination de deux points (par exemple, un sous-ensemble ouvert homéomorphe à $\mathsf{R}^{n'}$)] ; il est absolument évident que pour $n = 0$ et $n' = 0$ la réponse est négative, mais, par contre, pour $n > 1$, $n' > 1$ la démonstration nécessite une technique qui ne sera développée que par la suite.

La deuxième question peut être énoncée de la manière suivante : comment définir les points intérieurs et les points de bord pour qu'on puisse les distinguer réellement? Par exemple, pour le demi-espace R^n_- nous avons établi seulement l'inclusion évidente $\partial\mathsf{R}^n_- \subset \subset \mathsf{R}^{n-1}_1$ (voir *2*) qui admet aussi bien l'égalité $\partial\mathsf{R}^n_- = \mathsf{R}^{n-1}_1$ que l'égalité $\partial\mathsf{R}^n_- = \varnothing$ (il n'y a évidemment pas d'autres possibilités). Nous démontrerons au chapitre 4 que $\partial\mathsf{R}^n_- = \mathsf{R}^{n-1}_1$ (voir 4.6.5.12). Cette égalité est évidente pour $n = 1$ (s'il existait dans R^1_- un voisinage du point 0 homéomorphe à R^1, alors l'élimination de ce point rendrait ce voisinage non connexe, ce qui en réalité ne peut arriver à aucun voisinage connexe du point 0 dans R^1_-), tandis que pour $n > 1$, là aussi, des moyens techniques que nous n'avons pas encore étudiés sont nécessaires.

Cette égalité résout de manière satisfaisante également le problème général de la distinction des points intérieurs et des points de bord : il en découle qu'*un point x d'un espace localement euclidien X de dimension n possédant un voisinage U tel que $U \to \mathsf{R}^n_-$ sera un point de bord de U et donc de X si, et seulement si, il est appliqué par cet homéomorphisme en un point de l'hyperplan* R^{n-1}_1. Pour D^n, ce théorème nous donne $\partial D^n = S^{n-1}$. Remarquons qu'à partir de l'égalité hypothétique $\partial\mathsf{R}^n_- = \varnothing$ découle l'égalité $\partial X = \varnothing$ pour tout espace localement euclidien X de dimension n.

5. Il serait sans doute plus sage de se garder d'utiliser les théorèmes énoncés dans *4*, i.e. le théorème sur la dimension et l'égalité $\partial\mathsf{R}^n_- = \mathsf{R}^{n-1}_1$, avant qu'ils ne soient démontrés. Quant au théorème sur la dimension, nous n'en aurons pas encore besoin, sauf pour une remarque peu importante dans 2.3, tandis que l'égalité $\partial\mathsf{R}^n_- = \mathsf{R}^{n-1}_1$ nous a déjà servi et servira encore dans *7* et dans 2.6, 2.7.

Il n'y aura aucune autre application de ces théorèmes et de leurs conséquences avant leur démonstration.

6. Le bord d'un espace localement euclidien de dimension n est un espace localement euclidien de dimension n — 1 sans bord.

En effet, si U est un voisinage homéomorphe à R^n_-, d'un point de bord d'un espace localement euclidien X, alors le bord ∂U est un voisinage de ce point dans ∂X, puisqu'il coïncide avec $U \cap \partial X$, homéomorphe à R^{n-1}, puisque $\partial \mathsf{R}^n_- = \mathsf{R}^{n-1}_1$ (ici l'égalité $\partial \mathsf{R}^n_- = \mathsf{R}^{n-1}_1$ ne nécessite pas de renvoi au chapitre 4, puisque l'alternative, l'égalité $\partial \mathsf{R}^n_- = \varnothing$, est impossible, le bord ∂X étant non vide).

7. Pour des espaces localement euclidiens quelconques $X_1, \ldots, X_s$ on a

$$\operatorname{int}(X_1 \times \ldots \times X_s) = \operatorname{int} X_1 \times \ldots \times \operatorname{int} X_s,$$

$$\partial(X_1 \times \ldots \times X_s) =$$
$$= (\partial X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_s) \cup \ldots \cup (X_1 \times \ldots \times X_{s-1} \times \partial X_s).$$

Il suffit de le démontrer pour $s = 2$. Soient x_1, x_2 des points de X_1, X_2, et soit φ_1 un homéomorphisme d'un voisinage U_1 du point x_1 sur R^{n_1} ou $\mathsf{R}^{n_1}_-$, et φ_2 un homéomorphisme d'un voisinage U_2 du point x_2 sur R^{n_2} ou $\mathsf{R}^{n_2}_-$. Alors $\varphi_1 \times \varphi_2$ est un homéomorphisme du voisinage $U_1 \times U_2$ du point (x_1, x_2) sur un des produits $\mathsf{R}^{n_1} \times \mathsf{R}^{n_2}$, $\mathsf{R}^{n_1} \times \mathsf{R}^{n_2}_-$, $\mathsf{R}^{n_1}_- \times \mathsf{R}^{n_2}$, $\mathsf{R}^{n_1}_- \times \mathsf{R}^{n_2}_-$, tandis que la composée de cet homéomorphisme avec l'homéomorphisme correspondant de *3* est un homéomorphisme du voisinage $U_1 \times U_2$ sur $\mathsf{R}^{n_1+n_2}$ ou sur $\mathsf{R}^{n_1+n_2}_-$. Désignons cette composée par φ et considérons les quatre possibilités qui se présentent.

Si $\varphi_1(U_1) = \mathsf{R}^{n_1}$, $\varphi_2(U_2) = \mathsf{R}^{n_2}$, alors $\varphi(U_1 \times U_2) = \mathsf{R}^{n_1+n_2}$, de sorte que tous les trois points x_1, x_2, (x_1, x_2) sont des points intérieurs. Si $\varphi_1(U_1) = \mathsf{R}^{n_1}$, $\varphi_2(U_2) = \mathsf{R}^{n_2}_-$, alors $\varphi(U_1 \times U_2) = \mathsf{R}^{n_1+n_2}_-$ et l'inclusion $\varphi(x_1, x_2) \in \mathsf{R}^{n_1+n_2-1}_1$ est équivalente à l'inclusion $\varphi_2(x_2) \in \mathsf{R}^{n_2-1}_1$, de sorte que le point (x_1, x_2) est de même nature que x_2, tandis que x_1 est un point intérieur. De la même manière, lorsque $\varphi_1(U_1) = \mathsf{R}^{n_1}_-$, $\varphi_2(U_2) = \mathsf{R}^{n_2}$, le point (x_1, x_2) est de même nature que x_1, tandis que x_2 est un point intérieur. Enfin, si $\varphi_1(U_1) = \mathsf{R}^{n_1}_-$, $\varphi_2(U_2) = \mathsf{R}^{n_2}_-$, on a $\varphi(U_1 \times U_2) = \mathsf{R}^{n_1+n_2}_-$ et l'inclusion $\varphi(x_1, x_2) \in \mathsf{R}^{n_1+n_2-1}_1$ a lieu si et seulement si $\varphi_1(x_1) \in \mathsf{R}^{n_1-1}_1$ ou $\varphi_2(x_2) \in \mathsf{R}^{n_2-1}_1$. De sorte que le point (x_1, x_2) est un point de bord si et seulement si un des points x_1, x_2 l'est. Ainsi dans tous les cas le point (x_1, x_2) est intérieur si x_1, x_2 sont des points intérieurs et un point de bord si x_1 ou x_2 est un point de bord.

8. Un espace localement euclidien est connexe si et seulement si son intérieur est connexe.

La suffisance de cette condition est évidente ; démontrons sa nécessité. Soient X un espace localement euclidien connexe de dimen-

sion n, A une composante de l'ensemble int X, et B la réunion de toutes les autres composantes de l'ensemble int X. Remarquant que les ensembles Cl A, Cl B sont fermés et recouvrent X, et X est connexe, on en déduit que l'intersection Cl $A \cap$ Cl $B \neq \varnothing$ lorsque $B \neq \varnothing$ et l'on voit que Cl $A \cap$ Cl $B \subset \partial X$. Soit x un point de cette intersection et U son voisinage homéomorphe à R^n_-. L'ensemble int R^n_- étant connexe, l'ensemble $U \cap$ int X = int U qui lui est homéomorphe sera également connexe, ce qui serait impossible si $B \neq \varnothing$. Par conséquent, B est vide et int X est connexe.

9. L'espace topologique $X \cup_{\mathrm{in}:\partial X \to X} X$, construit d'après l'espace localement euclidien X, s'appelle le *double* de ce dernier ; on le désigne par dopp X. Il est évident que le double d'un espace localement euclidien de dimension n est un espace localement euclidien de dimension n sans bord.

Par la suite, nous identifierons $\mathrm{imm}_1(X)$ avec X, nous désignerons l'application ab imm_2: $X \to \mathrm{imm}_2(X)$ par cop, et $\mathrm{imm}_2(X)$ par cop X. Remarquons que X et cop X sont fermés dans dopp X.

Variétés

10. Un espace localement euclidien est appelé *variété topologique* ou *variété* tout court lorsqu'il est un espace de Hausdorff à base dénombrable. Une variété est dite *fermée* si elle est compacte et ne possède pas de bord, et *ouverte* lorsqu'elle ne possède pas de composantes compactes.

En comparant ce qui a été dit dans *2*, *3*, *6* et *9* avec les propriétés correspondantes des espaces de Hausdorff, des espaces à base dénombrable et des espaces compacts, nous voyons que : un sous-espace ouvert d'une variété de dimension n est une variété de dimension n ; l'intérieur d'une variété n-dimensionnelle est une variété n-dimensionnelle sans bord ; le bord d'une variété n-dimensionnelle est une variété $(n-1)$-dimensionnelle sans bord ; le bord d'une variété compacte est une variété fermée ; le produit des variétés de dimensions $n_1, \ldots, n_s$ est une variété de dimension $n_1 + \ldots + n_s$; le double d'une variété de dimension n est une variété de dimension n sans bord ; le double d'une variété compacte est une variété fermée.

Les composantes d'une variété formant son recouvrement ouvert, leur nombre est fini dans le cas compact et dénombrable dans le cas général (voir 1.1.6.5).

Les espaces localement euclidiens R^n, R^n_-, S^n et D^n considérés ci-dessus sont évidemment des variétés.

11. Les variétés sont localement compactes.

Démonstration. Soit x un point d'une variété X de dimension n. Fixons un homéomorphisme φ d'un voisinage U du point x sur R^n ou sur R^n_- et un voisinage V du point $\varphi(x)$ dans $\varphi(U)$

à adhérence compacte Cl V; posons $U' = \varphi^{-1}(V)$. Il est clair que U' est un voisinage du point x dans X, contenu dans $\varphi^{-1}(\mathrm{Cl}\ V)$, et que l'ensemble $\varphi^{-1}(\mathrm{Cl}\ V)$ est compact. D'où nous déduisons successivement que l'ensemble $\varphi^{-1}(\mathrm{Cl}\ V)$ est fermé, qu'il contient le voisinage U' avec son adhérence Cl U' et que cette dernière est compacte.

12. Toute variété est métrisable.

En effet, le fait qu'une variété est un espace de Hausdorff localement compact implique sa régularité (voir 1.1.7.23), tandis que la régularité et le deuxième axiome de dénombrabilité impliquent la métrisabilité (voir 1.1.6.9).

13. L'exemple suivant montre qu'un espace localement euclidien de dimension n à base dénombrable pour $n \geqslant 1$ n'est pas nécessairement un espace de Hausdorff. Posons $X = \mathsf{R}^n \cup {}_i\mathsf{R}^n$, où $i = [\mathrm{in}: \mathsf{R}^n \setminus \mathsf{R}^n_- \to \mathsf{R}^n]$. Il est clair que X est un espace localement euclidien n-dimensionnel à base dénombrable et que, pour $n \geqslant 1$, les points $\mathrm{imm}_1(x)$, $\mathrm{imm}_2(x)$ ne possèdent pas de voisinages disjoints dans X lorsque $x \in \mathsf{R}^{n-1}_1$.

14 (Information). Pour $n \geqslant 1$ un espace de Hausdorff localement euclidien de dimension n peut ne pas posséder de base dénombrable. Un exemple de dimension deux est donné dans [5], de dimension un dans [11], des exemples de plus grande dimension s'en obtiennent en les multipliant par des espaces euclidiens.

Variétés de dimension un

15. Une variété connexe de dimension nulle est évidemment un point. Les théorèmes *17*, *19* ci-dessous donnent une classification topologique des variétés connexes de dimension un. Le cas des variétés de dimension deux sera considéré au § 5. La classification topologique des variétés de plus grande dimension s'avère déjà être un problème très difficile.

16 (Lemme). *Si un espace de Hausdorff connexe se présente comme la réunion de deux de ses sous-ensembles ouverts, homéomorphes à* R^1, *alors il est homéomorphe à* R^1 *ou à* S^1.

Démonstration. Soit $X = U \cup V$ la représentation indiquée et soient $\varphi: U \to \mathsf{R}^1$, $\psi: V \to \mathsf{R}^1$ des homéomorphismes. Laissant de côté les cas triviaux $U \subset V$ et $V \subset U$ où X est homéomorphe à R^1, nous allons étudier les ensembles $\varphi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$.

L'intersection $U \cap V$ étant ouverte dans U et dans V, les ensembles $\varphi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$ sont ouverts dans R^1 et leurs composantes sont des intervalles. Parmi ces intervalles aucun n'est fini; en effet, si par exemple, l'ensemble $\varphi(U \cap V)$ possédait une composante finie $]a, b[$, alors l'ensemble $\varphi^{-1}(]a, b[)$ serait en même temps fermé dans V (étant l'intersection d'un ensemble compact et

donc fermé $\varphi^{-1}([a, b])$ avec V) et ouvert dans V, d'où l'on déduirait que $V = \varphi^{-1}(]a, b[) \subset U$. En outre, $\varphi(U \cap V) \neq \mathsf{R}^1$ sinon $U \subset V$ et $\psi(U \cap V) \neq \mathsf{R}^1$ car autrement $V \subset U$. Ainsi seuls deux cas ne sont pas exclus : (i) chacun des ensembles $\varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ est une demi-droite ouverte ; (ii) chacun des ensembles $\varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ est constitué par deux demi-droites ouvertes sans points communs.

Puisque φ et ψ peuvent être multipliés par -1, on peut supposer que dans le cas (i) l'ensemble $\varphi(U \cap V)$ est de la forme $]-\infty, a[$, tandis que l'ensemble $\psi(U \cap V)$ est de la forme $]b, \infty[$. Considérons la composée des applications

$$]-\infty, a[= \varphi(U \cap V) \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\text{ab}\,\psi} \psi(U \cap V) =]b, \infty[.$$

Puisqu'elle est injective et continue, elle est monotone croissante (si elle était décroissante, les points $\varphi^{-1}(a)$ et $\psi^{-1}(b)$ ne posséderaient pas de voisinages disjoints dans X). Par conséquent

$$X = \psi^{-1}(]-\infty, \psi(x_0)]) \cup \varphi^{-1}([\varphi(x_0), \infty[),$$

où x_0 est un point de $U \cap V$, d'où l'on voit que dans le cas (i) X est homéomorphe à R^1.

Dans le cas (ii), nous avons $\varphi(U \cap V) =]-\infty, a_1[\cup]a_2, \infty[$, $\psi(U \cap V) =]-\infty, b_1[\cup]b_2, \infty[$ pour certains a_1, a_2, b_1, b_2 ($a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$) et l'on peut supposer que la composée des homéomorphismes

$$\varphi(U \cap V) \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\text{ab}\,\psi} \psi(U \cap V)$$

applique $]-\infty, a_1[$ sur $]b_2, \infty[$, et $]a_2, \infty[$ sur $]-\infty, b_1[$. Les deux fonctions

$$]-\infty, a_1[\to]b_2, \infty[, \quad]a_2, \infty[\to]-\infty, b_1[,$$

(abréviations de cet homéomorphisme composé) sont croissantes (si, par exemple, la première était décroissante, les points $\varphi^{-1}(a_1)$ et $\psi^{-1}(b_2)$ n'auraient pas de voisinages disjoints dans X) et par conséquent

$$X = \psi^{-1}([\psi(x_2), \psi(x_1)]) \cup \varphi^{-1}([\varphi(x_1), \varphi(x_2)]),$$

où x_1 est un point de $\varphi^{-1}(]-\infty, a_1[) = \psi^{-1}(]b_2, \infty[)$, et x_2 un point de $\varphi^{-1}(]a_2, \infty[) = \psi^{-1}(]-\infty, b_1[)$. Par conséquent, dans le cas (ii), X est homéomorphe à S^1.

17. Toute variété compacte connexe non vide de dimension un est homéomorphe à S^1 ou à D^1.

Démonstration. Supposons tout d'abord que la variété est fermée ; alors elle se recouvre par un nombre fini de sous-ensembles ouverts homéomorphes à R^1, et ces sous-ensembles peuvent être numérotés en une suite $U_1, \ldots, U_s$ pour laquelle les réunions

$V_k = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ sont connexes. En vertu du lemme *16*, le premier des ensembles $V_1, \ldots, V_s$ non homéomorphes à R^1 sera homéomorphe à S^1 et, puisque cet ensemble est ouvert et fermé, il coïncide avec la variété toute entière qui s'avère donc homéomorphe à S^1.

Supposons maintenant que la variété possède un bord non vide. Dans ce cas, son double est une variété fermée connexe de dimension un ; elle est donc homéomorphe à S^1, tandis que la variété elle-même est homéomorphe à une partie du cercle. Puisque cette partie est connexe, fermée, non vide, diffère du cercle tout entier et ne se réduit pas à un point, elle est homéomorphe à D^1.

18 (Lemme). *Si un espace topologique se représente comme la réunion d'une suite non décroissante de ses sous-ensembles ouverts homéomorphes à* R^1, *alors il est homéomorphe à* R^1.

Démonstration. Soit $X = \bigcup V_i$ la représentation indiquée. Il est évident que chaque homéomorphisme de l'ensemble V_i sur l'intervalle $]a, b[$ se prolonge en un homéomorphisme de l'ensemble V_{i+1} sur un des intervalles $]a, b[$, $]a-1, b[$, $]a, b+1[$, $]a-1, b+1[$. Ceci permet de construire par récurrence une suite d'intervalles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ et une suite d'homéomorphismes $\varphi_1 : V_1 \to \Delta_1$, $\varphi_2 : V_2 \to \Delta_2, \ldots$ telles que $\varphi_i = \mathrm{ab}\, \varphi_{i+1}$; il est clair que l'application de l'espace X sur l'intervalle $\bigcup \Delta_i$, obtenue en prenant φ_i sur chaque V_i, est un homéomorphisme.

19. Toute variété connexe de dimension un non compacte est homéomorphe à R^1 *ou à* R^1_-.

Démonstration. Considérons tout d'abord une variété sans bord. Elle se recouvre par un ensemble dénombrable de sous-ensembles ouverts, homéomorphes à R^1, qu'on peut numéroter en une suite $U_1, U_2, \ldots$ avec des réunions $U_1 \cup \ldots \cup U_k$ connexes. Mais toutes ces réunions sont homéomorphes à R^1, car la première d'entre elles qui ne serait pas homéomorphe à R^1 serait, en vertu du lemme *16*, homéomorphe à S^1 et coïnciderait donc, étant ouverte et fermée, avec la variété toute entière. Par conséquent, cette dernière vérifie le lemme *18* qui dit qu'elle est homéomorphe à R^1.

Supposons maintenant que la variété possède un bord non vide. Alors son double sera une variété de dimension un sans bord, connexe, non compacte ; il est par conséquent homéomorphe à R^1, tandis que la variété elle-même est homéomorphe à une partie de droite. Puisque cette partie est connexe, fermée, non compacte et différente de la droite toute entière, elle est homéomorphe à R^1_-.

2. Structures différentielles

1. Rappelons qu'une fonction réelle définie sur un sous-ensemble ouvert de l'espace R^n est dite *fonction de classe* $\mathscr{C}^r$ si elle possède des dérivées partielles continues de tous les ordres inférieurs ou égaux à r. On suppose que $0 \leqslant r \leqslant \infty$ et que la classe $\mathscr{C}^0$ se compo-

se de toutes les fonctions continues, et la classe $\mathscr{C}^\infty$, des fonctions à dérivées partielles continues de tous les ordres. En outre, nous appelons les fonctions réelles analytiques fonctions de classe $\mathscr{C}^a$. Il est commode de convenir que $a > \infty$; toutes ces classes sont alors recouvertes par les inégalités $0 \leqslant r \leqslant a$.

Ces définitions restent évidemment valables dans le cas où l'on considère des fonctions définies sur un sous-ensemble ouvert du demi-espace R^n_- : la dérivée relativement à la première coordonnée aux points de l'hyperplan frontière R^{n-1}_1 doit être interprétée comme la dérivée à gauche, et l'analyticité comme l'existence d'un prolongement analytique à un ensemble, ouvert dans R^n. En outre, nous généralisons ces définitions aux applications d'un sous-ensemble ouvert de l'espace R^n ou du demi-espace R^n_- dans un sous-ensemble quelconque de l'espace R^q : de telles applications sont appelées *applications de classe* $\mathscr{C}^r$ ou plus brièvement $\mathscr{C}^r$*-applications* lorsque leurs fonctions de coordonnée sont de classe $\mathscr{C}^r$.

2. Une application f d'un sous-ensemble ouvert de l'espace R^n ou du demi-espace R^n_- dans un sous-ensemble ouvert de l'espace R^p ou du demi-espace R^p_- est un *difféomorphisme* lorsqu'elle est bijective et les deux applications f, f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$. Les ensembles que l'on peut lier par un difféomorphisme sont dits *difféomorphes*.

Les faits suivants découlent des théorèmes bien connus du calcul différentiel :

(i) Si un sous-ensemble ouvert de l'espace R^p ou du demi-espace R^p_- est difféomorphe à un sous-ensemble ouvert de l'espace R^n ou du demi-espace R^n_- , alors $p = n$.

(ii) Un sous-ensemble ouvert du demi-espace R^n_- difféomorphe à un sous-ensemble ouvert de l'espace R^n est ouvert dans R^n.

(iii) Un difféomorphisme inverse d'un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^r$ appartient à la classe $\mathscr{C}^r$.

$\mathscr{C}^r$-structures et $\mathscr{C}^r$-espaces

3. L'ensemble X qui figure dans les définitions suivantes est supposé donné.

On appelle *carte de dimension n* dans X toute application bijective d'un sous-ensemble de X sur un sous-ensemble ouvert de l'espace R^n ou du demi-espace R^n_-. L'ensemble de départ s'appelle *support* de la carte φ ; on le désigne par supp φ.

Les cartes φ, ψ sont dites $\mathscr{C}^r$*-compatibles* ($0 \leqslant r \leqslant a$) lorsque l'ensemble φ (supp $\varphi \cap$ supp ψ) est ouvert dans Im φ, l'ensemble ψ (supp $\varphi \cap$ supp ψ) est ouvert dans Im ψ et les applications composées

$$\varphi\,(\mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi) \xrightarrow{\mathrm{ab}\,\varphi^{-1}} \mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi \xrightarrow{\mathrm{ab}\,\psi} \psi\,(\mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi),$$

$$\psi\,(\mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi) \xrightarrow{\mathrm{ab}\,\psi^{-1}} \mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi \xrightarrow{\mathrm{ab}\,\varphi} \varphi\,(\mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi)$$

inverses l'une de l'autre appartiennent à la classe $\mathscr{C}^r$ (i.e. sont des $\mathscr{C}^r$-difféomorphismes pour $r \geqslant 1$ et des homéomorphismes pour $r = 0$). Remarquons que cette condition est trivialement satisfaite lorsque les ensembles supp φ, supp ψ sont disjoints; lorsqu'ils ne le sont pas, alors, d'après *2*(i), le fait que les cartes φ, ψ sont $\mathscr{C}^1$-compatibles implique l'égalité de leur dimension, tandis que d'après (1.4) cette égalité découle également du fait qu'elles sont $\mathscr{C}^0$-compatibles.

On appelle *$\mathscr{C}^r$-atlas de dimension n d'un ensemble X* toute famille de cartes de dimension n recouvrant X et compatibles deux à deux. Deux $\mathscr{C}^r$-atlas de l'ensemble X sont dits *$\mathscr{C}^r$-équivalents* lorsque toutes leurs cartes sont deux à deux $\mathscr{C}^r$-compatibles. Il est évident que la $\mathscr{C}^r$-équivalence est effectivement une équivalence; les classes en lesquelles elle décompose les $\mathscr{C}^r$-atlas de dimension n de l'ensemble X sont appelées *$\mathscr{C}^r$-structures de dimension n*. Pour $r > 0$, elles sont appelées *structures différentielles*.

Il est clair que pour $0 \leqslant q \leqslant r$ tout $\mathscr{C}^r$-atlas de dimension n est un $\mathscr{C}^q$-atlas de dimension n et des atlas $\mathscr{C}^r$-équivalents sont également $\mathscr{C}^q$-équivalents. Par conséquent, pour $0 \leqslant q \leqslant r$, une $\mathscr{C}^r$-structure peut être augmentée de manière unique à une certaine $\mathscr{C}^q$-structure.

Chaque $\mathscr{C}^r$-structure possède un atlas maximal qui est simplement la réunion de tous ses atlas. On l'appelle *atlas complet*, et ses cartes sont appelées *cartes de la structure*. Lorsqu'on passe d'une $\mathscr{C}^r$-structure à sa $\mathscr{C}^q$-augmentation, l'atlas complet augmente également.

4. Un ensemble muni d'une $\mathscr{C}^r$-structure de dimension n est appelé *$\mathscr{C}^r$-espace de dimension n*. Les cartes et les atlas de la structure sont appelés cartes et atlas de cet espace. L'atlas complet d'un $\mathscr{C}^r$-espace X est désigné par Atl X.

Les fonctions coordonnées d'une carte φ d'un $\mathscr{C}^r$-espace X sont *coordonnées dans* supp φ et *coordonnées locales dans X*.

Le $\mathscr{C}^q$-espace en lequel se transforme le $\mathscr{C}^r$-espace X en augmentant sa $\mathscr{C}^r$-structure pour en faire une $\mathscr{C}^q$-structure ($0 \leqslant q \leqslant r$) est désigné par $\mathscr{C}^q X$.

Les $\mathscr{C}^r$-espaces pour $r \geqslant q$ sont également appelés *$\mathscr{C}^{\geqslant q}$-espaces*.

En guise d'exemples de $\mathscr{C}^r$-espaces de dimension n citons les sous-ensembles ouverts X de l'espace R^n ou du demi-espace R^n_- munis de la $\mathscr{C}^r$-structure définie par l'atlas composé de l'unique carte id : $X \to X$. En particulier, quel que soit r, les cartes id R^n et id R^n_- transforment R^n et R^n_- en $\mathscr{C}^r$-espaces de dimension n.

5. Tout espace localement euclidien de dimension n se munit naturellement d'une $\mathscr{C}^0$-structure de dimension n dont l'atlas complet se compose de tous les homéomorphismes $U \to U'$, où U est un sous-ensemble ouvert de l'espace considéré et U' un sous-ensemble ouvert de R^n ou de R^n_-. D'autre part, en appliquant à l'atlas complet d'un $\mathscr{C}^0$-espace de dimension n la construction de réunion des espaces topologiques (voir 1.2.4.3), on le transforme en un

espace localement euclidien de dimension n et il est clair que cette construction est inverse de la précédente. Ainsi, les $\mathscr{C}^0$-espaces sont précisément les espaces localement euclidiens.

Puisqu'une structure différentielle peut être augmentée de manière unique à une $\mathscr{C}^0$-structure, tout $\mathscr{C}^r$-espace pour $r > 0$ est également un espace localement euclidien. D'une manière plus directe, sa topologie peut être décrite comme la topologie de la réunion obtenue à partir d'un atlas quelconque de la structure.

6. Il est évident que chaque point d'un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension n peut être recouvert par une carte φ d'un espace X avec $\operatorname{Im} \varphi' = \mathsf{R}^n$ ou R^n_-. Les points pour lesquels se réalise la première possibilité sont dits *intérieurs* et constituent un sous-ensemble ouvert partout dense appelé *intérieur* de l'espace X. Les autres points sont appelés *points de bord* et constituent un ensemble fermé appelé *bord* de l'espace X. L'intérieur est désigné par int X, le bord par ∂X. Ces notations sont conformes à celles introduites dans 1.2, car pour $r = 0$ les définitions des points intérieurs et des points de bord données ici ou là-bas coïncident.

Pour $r > 0$ on utilise avec succès la proposition *2*(ii) pour distinguer les points intérieurs des points de bord. En effet, il en découle que pour $r > 0$ le point x d'un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension n, recouvert par une carte φ de cet espace, est un point de bord si et seulement si $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathsf{R}^n_-$ et $\varphi(x) \in \mathsf{R}^{n-1}_1$; en particulier, si R^n_- est considéré comme un $\mathscr{C}^r$-espace avec $r > 0$, on a $\partial \mathsf{R}^n_- = \mathsf{R}^{n-1}_1$. Rappelons que cette proposition avait déjà été énoncée dans 1.4 pour $r = 0$ et que la démonstration avait été remise au chapitre 4.

Cette description des points de bord nous montre que l'intérieur et le bord d'un $\mathscr{C}^r$-espace sont invariants par l'augmentation de sa $\mathscr{C}^r$-structure à une $\mathscr{C}^q$-structure pour un q quelconque inférieur à r; autrement dit, lorsque $0 \leqslant q \leqslant r$ on a $\operatorname{int}(\mathscr{C}^q X) = \operatorname{int} X$ et $\partial(\mathscr{C}^q X) = \partial X$. Soulignons que nous avons démontré les égalités

$$\operatorname{int}(\mathscr{C}^0 X) = \operatorname{int} X, \quad \partial(\mathscr{C}^0 X) = \partial X$$

en nous servant de 1.4, i.e. du chapitre 4, alors que pour les égalités

$$\operatorname{int}(\mathscr{C}^q X) = \operatorname{int} X, \quad \partial(\mathscr{C}^q X) = \partial X$$

pour $q > 0$ nous n'en avons pas besoin.

Il découle en particulier de l'égalité $\partial X = \partial(\mathscr{C}^0 X)$ que le théorème 1.8 est valable également pour un $\mathscr{C}^r$-espace lorsque $r > 0$, i.e. qu'un $\mathscr{C}^r$-espace est connexe si et seulement si son intérieur l'est. D'ailleurs, cette $\mathscr{C}^r$-variante du théorème 1.8 peut être démontrée en répétant tout simplement la démonstration du théorème, sans avoir à utiliser le chapitre 4.

7. Si A est un sous-ensemble ouvert d'un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension n, alors les cartes d'un espace X dont les supports sont contenus dans A constituent un $\mathscr{C}^r$-atlas de dimension n de l'ensemble A;

elles déterminent par conséquent une $\mathscr{C}^r$-structure de dimension n dans A. Ainsi, un sous-ensemble ouvert d'un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension n est un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension n. En particulier, l'intérieur d'un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension n est un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension n sans bord. Il est clair que, pour $r > 0$ également, l'intérieur et le bord d'un sous-ensemble ouvert U d'un $\mathscr{C}^r$-espace X sont définis par les formules

$$\operatorname{int} U = U \cap \operatorname{int} X, \quad \partial U = U \cap \partial X.$$

Si φ est une carte d'un $\mathscr{C}^r$-espace X de dimension n, alors l'application

$$\operatorname{ab} \varphi : \partial X \cap \operatorname{supp} \varphi \to \varphi\,(\partial X \cap \operatorname{supp} \varphi)$$

est une carte de dimension $n - 1$ dans ∂X. Les cartes de cette forme constituent un $\mathscr{C}^r$-atlas de l'ensemble ∂X et y définissent donc une $\mathscr{C}^r$-structure. Ainsi le bord d'un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension n est un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension $n - 1$ sans bord.

Si φ_1 est une carte d'un $\mathscr{C}^{r_1}$-espace X_1, $\operatorname{Im} \varphi_1 = \mathsf{R}^{n_1}_{-}$ ou R^{n_1}, et φ_2 une carte d'un $\mathscr{C}^{r_2}$-espace X_2, $\operatorname{Im} \varphi_2 = \mathsf{R}^{n_2}$, alors la composée de l'homéomorphisme $\varphi_1 \times \varphi_2$ avec un des homéomorphismes $\mathsf{R}^{n_1} \times \mathsf{R}^{n_2} \to \mathsf{R}^{n_1+n_2}$, $\mathsf{R}^{n_1}_{-} \times \mathsf{R}^{n_2} \to \mathsf{R}^{n_1+n_2}_{-}$ définis dans 1.3 sera une carte de dimension $n_1 + n_2$ dans $X_1 \times X_2$. Lorsque $\partial X_2 = \varnothing$, les cartes de cette forme constituent un $\mathscr{C}^r$-atlas de l'ensemble $X_1 \times X_2$ avec $r = \min(r_1, r_2)$ et définissent donc une $\mathscr{C}^r$-structure dans $X_1 \times X_2$. Ainsi le produit d'un $\mathscr{C}^{r_1}$-espace X_1 de dimension n_1 par un $\mathscr{C}^{r_2}$-espace X_2 de dimension n_2 (avec $\partial X_2 = \varnothing$) est un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension $n_1 + n_2$, où r est le plus petit des nombres r_1, r_2. En général, le produit des $\mathscr{C}^{r_1}, \ldots, \mathscr{C}^{r_s}$-espaces $X_1, \ldots, X_s$ de dimensions $n_1, \ldots, n_s$ qui sont tous, sauf peut-être un, sans bord, est un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension $n_1 + \ldots + n_s$, où r est le plus petit des nombres $r_1, \ldots, r_s$. On a alors

$$\operatorname{int}(X_1 \times \ldots \times X_s) = \operatorname{int} X_1 \times \ldots \times \operatorname{int} X_s$$

tandis que si tous les espaces $X_1, \ldots, X_s$, sauf X_i, n'ont pas de bord, on a

$$\partial(X_1 \times \ldots \times X_s) = X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times \partial X_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_s;$$

les deux formules sont contenues dans 1.7 pour $r = 0$ et sont évidentes pour $r > 0$.

Il est clair que lorsqu'on augmente une $\mathscr{C}^r$-structure d'un $\mathscr{C}^r$-espace X à une $\mathscr{C}^q$-structure, les $\mathscr{C}^r$-structures induites dans les sous-ensembles ouverts de l'espace X et de son bord ∂X augmentent également à des $\mathscr{C}^q$-structures et

$$\mathscr{C}^q(X_1 \times \ldots \times X_s) = \mathscr{C}^q X_1 \times \ldots \times \mathscr{C}^q X_s.$$

En particulier, la topologie définie par ces $\mathscr{C}^r$-structures induites coïncide avec la topologie relative, tandis que le produit des $\mathscr{C}^{r_1}$, ..., $\mathscr{C}^{r_s}$-espaces X_1, . . ., X_s envisagé comme un espace topologique coïncide avec le produit des espaces X_1, . . ., X_s envisagés comme des espaces topologiques.

Applications différentiables

8. Une application continue f d'un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-espace X dans un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-espace Y est appelée *application de classe* $\mathscr{C}^r$, ou $\mathscr{C}^r$-*application*, si pour chaque carte φ de l'espace X et chaque carte ψ de l'espace Y la composée des applications

$$\varphi(\operatorname{supp}\varphi \cap f^{-1}(\operatorname{supp}\psi)) \xrightarrow{\mathrm{ab}\,\varphi^{-1}} \operatorname{supp}\varphi \cap f^{-1}(\operatorname{supp}\psi) \xrightarrow{\mathrm{ab}\,f} \operatorname{supp}\psi \xrightarrow{\psi} \operatorname{Im}\psi$$

appartient à la classe $\mathscr{C}^r$ (voir *1*). Une application composée de cette forme est appelée *représentation locale* de l'application f. Notation: loc $(\varphi, \psi)\, f$. Pour qu'une application continue f d'un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-espace X dans un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-espace Y appartienne à la classe $\mathscr{C}^r$ il suffit que cette classe contienne les représentations locales de f construites d'après les cartes d'un atlas quelconque de X et d'un atlas quelconque de Y.

Remarquons que cette définition générale d'une $\mathscr{C}^r$-application contient la définition donnée dans *1*. De même que selon cette dernière, une application de classe $\mathscr{C}^0$ est simplement une application continue. Les applications de classe $\mathscr{C}^1$ sont dites *différentiables* (ou *lisses*) et les applications de classe $\mathscr{C}^a$, *analytiques*.

Il est clair que la composée de deux $\mathscr{C}^r$-applications est une $\mathscr{C}^r$-application. L'inclusion $A \to X$, où A est un sous-ensemble ouvert ou le bord d'un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-espace X, est une $\mathscr{C}^r$-application. L'abréviation $A \to B$ de la $\mathscr{C}^r$-application $X \to Y$, où A est un sous-ensemble ouvert ou le bord de X, et B, un sous-ensemble ouvert ou le bord de Y, est une $\mathscr{C}^r$-application.

9. L'application f d'un $\mathscr{C}^{\geqslant 1}$-espace X dans un $\mathscr{C}^{\geqslant 1}$-espace Y est appelée *difféomorphisme* lorsqu'elle est bijective et les deux applications f, f^{-1} sont différentiables. L'espace Y est dit *difféomorphe* à l'espace X si existe un difféomorphisme $X \to Y$, et $\mathscr{C}^r$-*difféomorphe* à l'espace X si existe un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme $X \to Y$.

Il est évident que l'application identique d'un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-espace pour $r \geqslant 1$ est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme. On voit également que la composée de deux $\mathscr{C}^r$-difféomorphismes est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme, tandis que *2*(iii) implique que l'application inverse d'un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme. Ainsi un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme est une relation d'équivalence.

Il découle de *2*(i) que les espaces difféomorphes non vides sont de même dimension.

10. Si $f_1: X_1 \to Y_1, \ldots, f_m: X_m \to Y_m$ sont des applications de classe $\mathscr{C}^r$ pour $r \geqslant 1$, les espaces $X_1, \ldots, X_m$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ étant tous, sauf peut-être un dans chaque suite, sans bord, alors

$$f_1 \times \ldots \times f_m: X_1 \times \ldots \times X_m \to Y_1 \times \ldots \times Y_m$$

est une application de classe $\mathscr{C}^r$. Si $f_1, \ldots, f_m$ sont des difféomorphismes, alors $f_1 \times \ldots \times f_m$ est un difféomorphisme.

L'homéomorphisme canonique $X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$ est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme quels que soient les $\mathscr{C}^r$-espaces X_1, X_2, avec $r \geqslant 1$, un étant sans bord. Les homéomorphismes canoniques $(X_1 \times \ldots \times X_{m-1}) \times X_m \to X_1 \times \ldots \times X_m$ et $X_1 \times (X_2 \times \ldots \times X_m) \to X_1 \times \ldots \times X_m$ sont des $\mathscr{C}^r$-difféomorphismes quels que soient les $\mathscr{C}^r$-espaces $X_1, \ldots, X_m$, avec $r \geqslant 1$, tous, sauf peut-être un, sans bord.

Sous-espaces

11. Un sous-ensemble A d'un $\mathscr{C}^r$-espace X de dimension n pour $r \geqslant 1$ est *sous-espace de dimension* k de X si chaque point de A est recouvert par une carte φ de X telle que le couple $(\operatorname{Im} \varphi, \varphi(A \cap \operatorname{supp} \varphi))$ coïncide avec un des couples $(\mathsf{R}^n, \mathsf{R}^k)$, $(\mathsf{R}^n, \mathsf{R}^k_-)$, $(\mathsf{R}^n_-, \mathsf{R}^k_-)$. Il est évident que pour $k > 0$ cette condition est équivalente à la suivante : chaque point de A est recouvert par une carte φ de l'espace X telle que

$$\varphi(A \cap \operatorname{supp} \varphi) = \operatorname{Im} \varphi \cap \mathsf{R}^k \quad \text{ou} \quad \operatorname{Im} \varphi \cap \mathsf{R}^k_-.$$

Pour un sous-espace A de dimension k d'un $\mathscr{C}^r$-espace X de dimension n considérons les applications

$$\operatorname{ab} \varphi: A \cap \operatorname{supp} \varphi \to \varphi(A \cap \operatorname{supp} \varphi),$$

qui correspondent à toutes les cartes φ de l'espace X telles que $\varphi(A \cap \operatorname{supp} \varphi) = \operatorname{Im} \varphi \cap \mathsf{R}^k$ (ou $\operatorname{Im} \varphi \cap \mathsf{R}^k_-$). Chaque application de cette forme est une carte de dimension k dans A, et ensemble elles constituent un $\mathscr{C}^r$-atlas de dimension k de l'ensemble A. Muni d'une $\mathscr{C}^r$-structure définie par cet atlas, A devient un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension k. La topologie de ce $\mathscr{C}^r$-espace coïncide évidemment avec la topologie relative.

Lorsqu'on augmente la $\mathscr{C}^r$-structure d'un espace à une $\mathscr{C}^q$-structure pour $q \geqslant 1$, les sous-espaces restent des sous-espaces. Les sous-espaces d'un espace $\mathscr{C}^q X$ sont appelés *$\mathscr{C}^q$-sous-espaces* du $\mathscr{C}^r$-espace X donné.

La différence entre la dimension d'un espace et celle de son sous-espace est appelée *codimension* de ce dernier.

Des sous-espaces d'un $\mathscr{C}^r$-espace (pour $r \geqslant 1$) sont évidemment ses sous-ensembles ouverts, en particulier son intérieur et ses composan-

tes. Mise en garde : le bord d'un $\mathscr{C}^r$-espace, lorsqu'il n'est pas vide, n'est pas un sous-espace.

Il est clair que si un espace A d'un $\mathscr{C}^r$-espace X est de codimension 0, alors $\operatorname{int} A = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{int} X$.

Un sous-espace d'un $\mathscr{C}^r$-espace est dit *propre* lorsque, considéré comme sous-ensemble, il est fermé et son bord est contenu dans le bord de l'espace. Remarquons qu'un sous-espace propre de codimension 0 se compose toujours de composantes entières de l'espace.

12. La définition de sous-espace énoncée dans *11* fournit implicitement un moyen, souvent employé, de donner des sous-espaces à l'aide d'équations et d'inégalités. A savoir, un sous-espace A d'un $\mathscr{C}^r$-espace de dimension n pour $r \geqslant 1$ sera son sous-espace de dimension positive k si et seulement si chaque point de A possède un voisinage U de coordonnées $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dans lequel l'intersection $A \cap U$ se détermine par les équations $\varphi_{k+1}(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0$ ou par les équations $\varphi_{k+1}(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0$ et l'inégalité $\varphi_1(x) \leqslant 0$.

L'inconvénient de ce moyen de définir les sous-espaces réside dans ce qu'il présuppose que les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des coordonnées locales. L'application suivante du théorème sur les fonctions implicites rend cette méthode plus efficace.

Convenons d'appeler les fonctions réelles $f_1, \ldots, f_m$ de classe $\mathscr{C}^1$, définies dans un certain voisinage U_0 du point x_0 d'un $\mathscr{C}^r$-espace X (pour $r \geqslant 1$), *indépendantes au point* x_0, lorsque pour une certaine carte φ de l'espace X qui recouvre x_0 les fonctions

$$g_1, \ldots, g_m : \varphi(U_0 \cap \operatorname{supp} \varphi) \to \mathsf{R},$$

définies par la formule $g_i(y) = f_i(\varphi^{-1}(y))$, possèdent au point $\varphi(x_0)$ des gradients linéairement indépendants. Il découle du théorème sur les fonctions implicites que : (i) si les $\mathscr{C}^r$-fonctions $f_1, \ldots, f_m$ sont indépendantes en un point intérieur x_0 du $\mathscr{C}^r$-espace X, alors elles peuvent être inclues (dans un voisinage du point x_0) dans un système de coordonnées ; (ii) si les $\mathscr{C}^r$-fonctions $f_1, \ldots, f_m$ sont indépendantes dans un point de bord x_0 du $\mathscr{C}^r$-espace X et la fonction f_1 est négative aux points intérieurs et nulle aux points de bord, alors les fonctions $f_1, \ldots, f_m$ peuvent être inclues (dans un voisinage du point x_0) dans un système de coordonnées où la première coordonnée sera f_1. En comparant ceci à la description précédente des sous-espaces d'un $\mathscr{C}^r$-espace en termes de coordonnées, nous voyons que le sous-ensemble A d'un $\mathscr{C}^r$-espace X de dimension n sera son sous-espace de dimension positive k si : (i) chaque point x_0 de l'ensemble A, intérieur pour X, possède un voisinage U dans lequel l'intersection $A \cap U$ est déterminée par les équations $\varphi_{k+1}(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0$, où $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n$ sont des $\mathscr{C}^r$-fonctions indépendantes au point x_0, ou par les équations $\varphi_{k+1}(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0$ et l'inégalité $\varphi_1(x) \leqslant 0$, où $\varphi_1, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n$ sont

des $\mathscr{C}^r$-fonctions indépendantes au point x_0; (ii) chaque point x_0 de l'ensemble A qui est un point de bord pour X possède un voisinage U dans lequel l'intersection int $X \cap U$ est déterminée par l'inégalité $\varphi_1(x) < 0$, l'intersection $\partial X \cap U$, par l'équation $\varphi_1(x) = 0$ et l'intersection $A \cap U$, par les équations $\varphi_{k+1}(x) = 0, \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x) = 0$, où $\varphi_1, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n$ sont des $\mathscr{C}^r$-fonctions indépendantes au point x_0.

13. D'après la définition d'un sous-espace, l'intérieur int A d'un sous-espace A d'un $\mathscr{C}^r$-espace X est contenu dans l'intérieur int X de l'espace X et les intersections $\partial A \cap$ int X et $\partial A \cap \partial X$ sont ouvertes dans ∂A, i.e. sont constituées par des composantes entières du bord ∂A. Il est également clair que int A est un sous-espace de chacun des espaces X, int X et que $\partial A \cap$ int X est un sous-espace de l'espace X. En particulier, si A est un sous-espace propre de X, alors $\partial A = A \cap \partial X$ et int A est un sous-espace propre de l'espace int X, tandis que ∂A est un sous-espace propre de l'espace ∂X.

L'inclusion du sous-espace X d'un $\mathscr{C}^r$-espace X dans X est évidemment une $\mathscr{C}^r$-application. L'abréviation $A \to B$ d'une $\mathscr{C}^q$-application $X \to Y$, où A est un sous-espace de X et B un sous-espace de Y, sera une $\mathscr{C}^q$-application.

Soient $X_1, \ldots, X_s$ des $\mathscr{C}^r$-espaces, tous, sauf peut-être un, sans bord. Si $A_1, \ldots, A_s$ sont leurs sous-espaces, tous, sauf peut-être un, sans bord, alors $A_1 \times \ldots \times A_s$ est un sous-espace de l'espace $X_1 \times \ldots \times X_s$, propre lorsque les espaces $A_1, \ldots, A_s$ le sont. Par exemple, les fibres du produit $X_1 \times \ldots \times X_s$ sont ses sous-espaces propres.

Il découle de la description d'un sous-espace donnée dans *12* qu'un sous-espace d'un sous-espace d'un $\mathscr{C}^r$-espace X est un sous-espace de l'espace X; en particulier, un sous-espace propre d'un sous-espace propre d'un $\mathscr{C}^r$-espace X est un sous-espace propre de l'espace X. Il découle de cette description des sous-espaces, qu'un sous-espace propre d'un $\mathscr{C}^r$-espace X contenu dans un sous-espace propre A de l'espace X est un sous-espace propre de l'espace A.

$\mathscr{C}^r$-variétés

14. Un $\mathscr{C}^r$-espace est appelé *$\mathscr{C}^r$-variété* ou *variété de classe* $\mathscr{C}^r$ lorsqu'il est une variété topologique, i.e. est un espace de Hausdorff à base dénombrable. Une variété de classe $\mathscr{C}^0$ est précisément une variété topologique; voir *5*. Une variété de classe $\mathscr{C}^r$ pour $r \geqslant 1$ est appelée variété *différentiable* ou *lisse*. Les variétés de classe $\mathscr{C}^\alpha$ sont dites *analytiques*.

Puisqu'une $\mathscr{C}^r$-structure se détermine par son atlas, il est intéressant de considérer les propriétés de l'atlas d'un $\mathscr{C}^r$-espace qui permettent de conclure à l'existence d'une base dénombrable ou d'affirmer qu'un espace est un espace de Hausdorff. Nous nous bornerons

à deux énoncés évidents : si chaque couple de points d'un espace peut être recouvert par une carte ou par deux cartes disjointes de l'atlas, alors l'espace est un espace de Hausdorff ; si l'atlas est dénombrable, l'espace possède une base dénombrable.

L'existence d'une base dénombrable et la propriété d'être un espace de Hausdorff ne nécessitent pas de vérification lorsqu'on munit d'une structure différentielle un ensemble qui était déjà une variété topologique, à condition que la nouvelle topologie coïncide avec la topologie donnée. Si la structure différentielle est introduite à l'aide d'un atlas $\{\varphi_\alpha\}$, alors pour que les deux topologies indiquées coïncident il faut et il suffit que les ensembles supp φ_α soient ouverts et les applications φ_α soient des homéomorphismes ; voir *5*.

Une variété différentiable est dite *fermée* lorsqu'elle est compacte et sans bord ; voir 1.10. Mise en garde : avant que ne soit démontrée l'égalité $\partial X = \partial(\mathscr{C}^0 X)$ (voir *6*), il ne faut pas confondre la variété différentiable fermée X avec la variété topologique fermée $\mathscr{C}^0 X$.

15. En comparant ce qui a été dit dans *7* et *11* avec les propriétés correspondantes des espaces de Hausdorff, des espaces à base dénombrable et des espaces compacts, nous voyons que : un sous-ensemble ouvert d'une $\mathscr{C}^r$-variété de dimension n est une $\mathscr{C}^r$-variété de dimension n ; l'intérieur d'une $\mathscr{C}^r$-variété de dimension n est une $\mathscr{C}^r$-variété de dimension n sans bord ; le bord d'une $\mathscr{C}^r$-variété de dimension n est une $\mathscr{C}^r$-variété de dimension $n-1$ sans bord ; le bord d'une $\mathscr{C}^r$-variété compacte est une $\mathscr{C}^r$-variété fermée ; le produit de $\mathscr{C}^r$-variétés de dimensions $n_1, \ldots, n_s$, toutes, sauf peut-être une, sans bord, est une $\mathscr{C}^r$-variété de dimension $n_1 + \ldots + n_s$; un sous-espace d'une $\mathscr{C}^r$-variété est une $\mathscr{C}^r$-variété.

Les sous-espaces d'une variété différentiable sont ses *sous-variétés*, et les sous-espaces propres, ses *sous-variétés propres*.

16. Les exemples fondamentaux de $\mathscr{C}^r$-variétés de dimension n pour $r \geqslant 1$ sont toujours les espaces R^n et R^n_- (voir *4*). Leurs sous-variétés fournissent une infinité d'autres exemples. Les plus simples sont les sous-variétés de l'espace R^n déterminées par le système d'équations $\varphi_{k+1}(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0$, où $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ définies sur un sous-ensemble ouvert de l'espace R^n et possédant, sur l'ensemble de tous leurs zéros communs, des gradients linéairement indépendants ; à ce système on peut ajouter l'inégalité $\varphi_1(x) \leqslant 0$, où φ_1 est une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ définie dans un voisinage de l'ensemble indiqué des zéros communs et possédant, aux points de cet ensemble où elle s'annule, un gradient linéairement indépendant des gradients des fonctions $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n$. Par exemple, l'équation de la sphère S^{n-1} dans les coordonnées usuelles est $x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 = 0$, tandis que la boule D^n se définit par l'inégalité $x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1 \leqslant 0$; ceci permet d'affirmer qu'elles sont des sous-variétés de l'espace R^n et, en particulier, se munissent de structures de $\mathscr{C}^a$-variétés.

Il est clair que R^k pour $k \leqslant n$ et S^k pour $k < n$ sont des sous-variétés propres de la variété R^n, tandis que R^k_- et D^k pour $k \leqslant n$ ne le sont pas ; en outre, R^k_- pour $k \leqslant n$ est une sous-variété propre de la variété R^n_- ; S^k pour $k \leqslant n$ une sous-variété propre de la variété S^n ; D^k pour $k \leqslant n$ une sous-variété propre de la variété D^n.

17. Notons pour conclure que chaque espace vectoriel réel de dimension n se munit pour tout r $(0 \leqslant r \leqslant a)$ d'une $\mathscr{C}^r$-structure naturelle qui en fait une $\mathscr{C}^r$-variété de dimension n ; cette structure est définie par des cartes linéaires, i.e. par des applications linéaires sur R^n.

3. Orientations

1. Nous allons désigner par Catl X l'atlas d'une $\mathscr{C}^r$-variété X constitué par toutes ses cartes à support connexe. Si φ, ψ sont deux cartes d'une variété différentiable X, alors $J(\varphi, \psi)$ désignera le jacobien de l'application loc (φ, ψ) id, i.e. de la composée des applications

$$\varphi(\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi) \xrightarrow{\operatorname{ab}\varphi^{-1}} \operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi \xrightarrow{\operatorname{ab}\psi} \psi(\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi).$$

On appelle *orientation* d'une variété différentiable X toute fonction Catl $X \to S^0$ dont les valeurs sur deux cartes quelconques non disjointes φ, ψ de Catl X s'obtiennent l'une de l'autre en multipliant par $[\operatorname{sign} J(\varphi, \psi)](y)$, où y est un point quelconque de $\varphi(\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi)$ (la fonction $\operatorname{sign} J(\varphi, \psi)$ doit ainsi être constante sur $\varphi(\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi)$). Une variété différentiable munie d'une orientation est dite *orientée*. Une variété différentiable qui admet une orientation est dite *orientable*.

Il est clair que l'orientation Catl $X \to S^0$ se définit par ses valeurs sur les cartes d'un sous-atlas arbitraire de l'atlas Catl X et que toute fonction qui applique un sous-atlas de l'atlas Catl X dans S^0 conformément à la condition de compatibilité précédente (les valeurs sur les cartes φ, ψ s'obtiennent l'une de l'autre par multiplication par $[\operatorname{sign} J(\varphi, \psi)](y)$ si $y \in \varphi(\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi)$) se prolonge en une orientation Catl $X \to S^0$.

Lorsqu'on augmente la $\mathscr{C}^r$-structure d'une $\mathscr{C}^r$-variété X à une $\mathscr{C}^q$-structure pour $q < r$, l'atlas Catl X devient sous-atlas de l'atlas Catl $\mathscr{C}^q X$. Lorsque $q \geqslant 1$, ceci établit une bijection entre les orientations des variétés X et $\mathscr{C}^q X$.

2. A chaque orientation ω : Catl $X \to S^0$ correspond l'orientation opposée $-\omega$. Ainsi une variété orientable non vide possède au moins deux orientations.

Quelles que soient deux orientations d'une variété X, l'ensemble recouvert de cartes sur lesquelles ces orientations coïncident et l'ensemble recouvert de cartes sur lesquelles elles ne coïncident pas sont ouverts, recouvrent X et sont disjoints, i.e. sont constitués par les

composantes entières de la variété X. Par conséquent, l'orientation d'une variété connexe se définit par sa valeur sur une des cartes; une variété orientable différentiable connexe possède précisément deux orientations; en général, une variété différentiable orientable s-connexe possède 2^s orientations.

On donne l'orientation d'une variété différentiable connexe en indiquant la carte où celle-ci est positive. Par exemple, R^n possède une orientation naturelle positive sur la carte id R^n.

3. Puisqu'un point d'une variété X de dimension nulle possède une seule carte de Catl X qui le recouvre, les variétés de dimension nulle sont toutes orientables et possèdent une orientation naturelle, identiquement égale à $+1$. Comme nous verrons par la suite (voir 5.3.1, 5.6.3.4), les variétés différentiables de dimension un sont également orientables, tandis que les variétés de dimension $\geqslant 2$ peuvent être orientables ou non.

Des conditions suffisantes efficaces de l'orientabilité d'une variété différentiable de dimension quelconque seront indiquées au chapitre 5 (voir p. 5.6.3). La moins fine d'entre elles est la connexité simple.

4. Si A est un sous-ensemble ouvert d'une variété différentiable X, on a Catl $A \subset$ Catl X, d'où l'on déduit que chaque orientation de la variété X se réduit à une orientation de la variété A ; en particulier, si X est orientable, A l'est également. Lorsqu'en même temps A coupe chacune des composantes de X, alors l'orientation de X se définit par l'orientation induite de la variété A.

Dans le cas $A = \operatorname{int} X$ on peut affirmer même que non seulement chaque orientation de la variété X se réduit à une orientation de la variété int X et se détermine par cette dernière, mais également toute orientation de la variété int X peut être augmentée à une orientation de la variété X. En effet, puisque la connexité d'un sous-ensemble ouvert U de la variété X implique la connexité de $\operatorname{int} U = U \cap \operatorname{int} X$ (voir 2.6 et 2.7), l'abréviation

$$\operatorname{ab} \varphi : \operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{int} X \to \varphi\,(\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{int} X)$$

d'une carte quelconque φ de Catl X appartient à Catl (int X) ce qui permet de prolonger l'orientation ω : Catl (int X) $\to S^0$ à une orientation Catl $X \to S^0$ en se servant de la formule $\varphi \mapsto \omega\,(\operatorname{ab} \varphi)$. Ainsi, en faisant correspondre à l'orientation Catl $X \to S^0$ sa restriction Catl (int X) $\to S^0$ on obtient une bijection entre les orientations de la variété différentiable X et celles de son intérieur int X. En particulier, l'orientabilité de int X implique celle de X.

D'après 2.7, à chaque carte φ d'une variété différentiable X correspond une carte

$$\operatorname{ab} \varphi : \operatorname{supp} \varphi \cap \partial X \to \varphi\,(\operatorname{supp} \varphi \cap \partial X)$$

de son bord ∂X ; il est clair que chaque carte appartenant à Catl ∂X se représente sous la forme ab φ pour $\varphi \in$ Catl X et que la formule

ab $\varphi \mapsto \omega(\varphi)$ définit correctement pour chaque orientation ω: Catl $X \to S^0$ de la variété X une certaine orientation Catl $\partial X \to S^0$ de son bord ∂X; en particulier, l'orientabilité de X implique celle de ∂X. Lorsque toutes les composantes de la variété X possèdent un bord, alors l'orientation de la variété X se définit par l'orientation induite de la variété ∂X.

Parmi les sous-variétés d'une variété différentiable orientée X, seules les sous-variétés de codimension 0 héritent de X une orientation bien déterminée. Cette dernière a déjà été décrite pour les sous-ensembles ouverts de la variété X; l'orientation induite dont se munit une sous-variété arbitraire A de codimension 0 se définit par l'orientation de son intérieur int A qui est ouvert dans X. En particulier, l'orientabilité de A découle de celle de X. Si A rencontre toutes les composantes de X, alors son orientation est donnée par l'orientation induite de A.

La variété $\mathbf{R}^n$ qui possède une orientation naturelle, en munit toutes ses sous-variétés de dimension n. En particulier, la boule D^n possède une orientation naturelle et, avec elle, son bord S^{n-1} se munit d'une orientation bien déterminée. Mise en garde: l'orientation de la sphère S^0 obtenue à partir de cette définition pour $n = 1$ diffère de l'orientation canonique que possède S^0 comme variété de dimension 0 (voir *3*).

Orientations et difféomorphismes

5. Tout difféomorphisme $f: X \to Y$ établit une bijection entre les orientations des variétés X et Y. Si les deux variétés sont orientées et f envoie la première orientation dans la deuxième (ou dans l'orientation opposée à celle de la deuxième), on dit que f *conserve* (resp. *inverse*) *l'orientation*.

On peut apprendre si le difféomorphisme $f: X \to Y$ conserve ou non l'orientation d'après ses représentations locales et, lorsque X et Y sont connexes, d'après une seule représentation locale. Soient ω_X, ω_Y les orientations de ces variétés connexes, φ une carte de Catl X, ψ une carte de Catl Y et x un point de supp $\varphi \cap f^{-1}$ (supp ψ); il est clair que f conserve l'orientation si le signe du jacobien de l'application loc $(\varphi, \psi)\, f$ au point $\varphi(x)$ coïncide avec le signe du produit $\omega_X(\varphi)\, \omega_Y(\psi)$ et inverse l'orientation dans le cas contraire.

6. Le cas où X est connexe et coïncide avec Y est d'un intérêt particulier. Il est évident que dans ce cas un difféomorphisme qui conserve (resp. inverse) l'orientation pour un certain choix de celle-ci, la conserve (resp. inverse) pour tout autre choix; ainsi, dans ce cas, on peut parler d'inversion ou de conservation d'orientation en général. En particulier, chaque (auto)difféomorphisme d'une variété différentiable orientable connexe soit conserve l'orientation, soit l'inverse.

En guise d'exemple, considérons une application linéaire non dégénérée $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. C'est un difféomorphisme qui conserve l'orientation lorsque $\det f > 0$ et l'inverse lorsque $\det f < 0$. Si f est une transformation orthogonale, on peut définir les applications $\mathrm{ab}\, f: D^n \to D^n$ et $\mathrm{ab}\, f: S^{n-1} \to S^{n-1}$; ce sont des difféomorphismes qui conservent l'orientation lorsque $\det f = 1$ et l'inversent lorsque $\det f = -1$ (la sphère S^0 se munit ici de l'orientation de ∂D^1). Si $f(x) = -x$, alors $\det f = (-1)^n$; ce difféomorphisme, ainsi que l'application antipodale $\mathrm{ab}\, f: S^{n-1} \to S^{n-1}$, conserve l'orientation lorsque n est pair et l'inverse lorsque n est impair.

Orientations et produits de variétés

7. D'après 2.7, le produit $\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_s$ des cartes $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ des variétés différentiables $X_1, \ldots, X_s$ de dimensions $n_1, \ldots, n_s$ *sans bord* peut être envisagé, une fois effectuées les identifications canoniques $\mathbf{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbf{R}^{n_s} = \mathbf{R}^{n_1 + \cdots + n_s}$ déterminées par la formule $((x_{11}, \ldots, x_{1n_1}), \ldots, (x_{s1}, \ldots, x_{sn_s})) \mapsto (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, \ldots, x_{s1}, \ldots, x_{sn_s})$ comme étant la carte du produit $X_1 \times \ldots \times X_s$. Définissons pour les orientations $\omega_1, \ldots, \omega_s$ des variétés $X_1, \ldots, X_s$ l'application de la famille de cartes $\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_s$ pour $\varphi_1 \in \mathrm{Catl}\, X_1, \ldots, \varphi_s \in \mathrm{Catl}\, X_s$ dans S^0 suivant la formule $\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_s \mapsto \omega_1(\varphi_1) \ldots \omega_s(\varphi_s)$.

Il est clair que cette famille est un sous-atlas de l'atlas $\mathrm{Catl}\,(X_1 \times \ldots \times X_s)$ et que cette application vérifie la condition de compatibilité indiquée dans *1*; par conséquent, elle se prolonge en une orientation de la variété $X_1 \times \ldots \times X_s$. Cette dernière s'appelle *produit des orientations* $\omega_1, \ldots, \omega_s$. Elle est définie également dans le cas où une des variétés $X_1, \ldots, X_s$ possède un bord; à savoir, elle est induite alors par l'orientation de son intérieur $\mathrm{int}\, X_1 \times \ldots \times \mathrm{int}\, X_s$. Ainsi, le produit de variétés différentiables orientées (dont au plus une possède un bord) est orienté, et le produit de variétés différentiables orientables est orientable.

Remarquons que l'orientabilité du produit $X_1 \times \ldots \times X_s$ implique celle des facteurs $X_1, \ldots, X_s$. Démontrons-le. Si ω est une orientation du produit et $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_s$ sont des cartes fixes extraites de $\mathrm{Catl}\,(\mathrm{int}\, X_1), \ldots, \mathrm{Catl}\,(\mathrm{int}\, X_{i-1})$, $\mathrm{Catl}\,(\mathrm{int}\, X_{i+1}), \ldots, \mathrm{Catl}\,(\mathrm{int}\, X_s)$, alors la fonction $\mathrm{Catl}\,(\mathrm{int}\, X_i) \to S^0$ définie par la formule

$$\varphi \mapsto \omega\,(\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_{i-1} \times \varphi \times \varphi_{i+1} \times \ldots \times \varphi_s)$$

est une orientation de la variété $\mathrm{int}\, X_i$.

8. *Si X_1, X_2 sont des variétés différentiables orientées de dimensions n_1, n_2 dont une est sans bord, le difféomorphisme canonique $X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$ conserve l'orientation lorsque $n_1 n_2$ est pair et l'inverse lorsqu'il est impair.*

Démonstration. Soient φ_1 une carte de Catl (int X_1) avec Im $\varphi_1 = \mathsf{R}^{n_1}$ et φ_2 une carte de Catl (int X_2) avec Im $\varphi_2 = \mathsf{R}^{n_2}$. Il est clair que la carte $\varphi_1 \times \varphi_2$ appartient à Catl (int $(X_1 \times X_2)$) et la carte $\varphi_2 \times \varphi_1$ à Catl (int $(X_2 \times X_1)$) et la représentation locale correspondante $\mathsf{R}^{n_1+n_2} \to \mathsf{R}^{n_1+n_2}$ du difféomorphisme canonique $X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$ se détermine par la formule

$$(x_1, \ldots, x_{n_1+n_2}) \mapsto (x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}, x_1, \ldots, x_{n_1}).$$

Par conséquent, le jacobien de cette représentation locale est égal à $(-1)^{n_1 n_2}$.

9. Si $X_1, \ldots, X_s$ sont des variétés différentiables orientées de dimensions $n_1, \ldots, n_s$ dont seulement une, à savoir X_i, possède un bord, alors l'orientation canonique du produit $X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times \partial X_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_s$ et l'orientation qu'il hérite comme bord $\partial (X_1 \times \ldots \times X_s)$ coïncident au facteur $(-1)^{n_1 + \cdots + n_{i-1}}$ près.

Démonstration. Il est clair que les orientations indiquées sont identiques lorsque $i = 1$. Le cas $i > 1$ se réduit au cas $i = 1$ à l'aide des difféomorphismes

$$X_1 \times \ldots \times X_s \to X_i \times X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times \\ \times X_{i+1} \times \ldots \times X_s,$$

$$X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times \partial X_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_s \to \\ \to \partial X_i \times X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_s,$$

dont le premier est le produit du difféomorphisme canonique

$$(X_1 \times \ldots \times X_{i-1}) \times X_i \to X_i \times (X_1 \times \ldots \times X_{i-1})$$

par id $(X_{i+1} \times \ldots \times X_s)$ et le deuxième le produit du difféomorphisme canonique

$$(X_1 \times \ldots \times X_{i-1}) \times \partial X_i \to \partial X_i \times (X_1 \times \ldots \times X_{i-1})$$

par id $(X_{i+1} \times \ldots \times X_s)$. Le facteur $(-1)^{n_1 + \cdots + n_{i-1}}$ tient compte du fait que le premier difféomorphisme conserve (inverse) l'orientation si le produit $(n_1 + \ldots + n_{i-1})\, n_i$ est pair (impair) et le deuxième, si le produit $(n_1 + \ldots + n_{i-1})\,(n_i - 1)$ est pair (impair); voir *8*.

Orientations dans le cas vectoriel

10. La définition de l'orientation donnée dans *1* est valable pour les espaces vectoriels réels, ceux-ci étant des variétés différentiables (voir 2.17). D'autre part, selon la définition vectorielle bien connue de l'orientation d'un espace vectoriel réel, c'est une application de l'ensemble de toutes les bases de l'espace dans S^0 telle que ses valeurs sur deux bases quelconques coïncident si et seulement si la matrice de passage d'une base à l'autre est positive.

Cette définition vectorielle ne contredit pas la définition donnée dans *1* ; elle est souvent plus commode.

En particulier, elle rend évidente la remarque suivante. Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel réel V sur un autre espace vectoriel réel. Fixons dans V un sous-espace V' qui s'applique bijectivement par f sur $\operatorname{Im} f$. Alors V se représente comme la somme directe des espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ et, par conséquent, l'orientation de deux quelconques de ces trois espaces V, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ déterminera l'orientation du troisième. Nous avons voulu souligner que cette relation entre les orientations des espaces V, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ ne dépend pas du choix de V', étant donc définie par l'application f.

4. Variété des vecteurs tangents

1. Soit X une variété de classe $\mathscr{C}^r$ (avec $r \geqslant 1$) et de dimension n. Nous allons désigner par $\operatorname{Atl}_x X$, où x est un point de X, la partie de l'atlas complet $\operatorname{Atl} X$ constituée des cartes qui contiennent x. Si φ, ψ sont deux cartes de $\operatorname{Atl}_x X$, alors au point $\varphi(x)$ est définie la différentielle du difféomorphisme

$$\operatorname{loc}(\varphi, \psi)\,\mathrm{id}: \varphi(\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi) \to \psi(\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi)$$

[c'est l'application linéaire $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ dont la matrice est le jacobien de l'application $\operatorname{loc}(\varphi, \psi)\,\mathrm{id}$ au point $\varphi(x)$]. Cette différentielle sera désignée par $d_x(\varphi, \psi)$.

Considérons l'espace vectoriel réel de toutes les applications de l'ensemble $\operatorname{Atl}_x X$ dans R^n (muni des opérations naturelles). Il est évident que les applications $v: \operatorname{Atl}_x X \to \mathsf{R}^n$ qui vérifient, pour des cartes arbitraires $\varphi, \psi \in \operatorname{Atl}_x X$, la relation $v(\psi) = d_x(\varphi, \psi)\, v(\varphi)$ constituent un sous-espace de cet espace vectoriel, i.e. forment elles-mêmes un espace vectoriel réel. Ce dernier s'appelle *espace tangent à X au point x* ; on le désigne par $\operatorname{Tang}_x X$; les applications qui constituent cet espace sont appelées *vecteurs tangents à X au point x.*

Il est clair qu'un vecteur tangent se détermine par ses valeurs dans une carte arbitraire de $\operatorname{Atl}_x X$ et, quels que soient la carte $\varphi \in \operatorname{Atl}_x X$ et le vecteur $u \in \mathsf{R}^n$, il existe un vecteur $v \in \operatorname{Tang}_x X$ tel que $v(\varphi) = u$. Par conséquent, l'application $\varphi_\# : \operatorname{Tang}_x X \to \mathsf{R}^n$, définie sur la carte $\varphi \in \operatorname{Atl}_x X$ par la formule $\varphi_\#(v) = v(\varphi)$, est bijective. Cette application étant en outre linéaire, elle sera un isomorphisme linéaire, et en particulier $\dim \operatorname{Tang}_x X = n$. La base de l'espace $\operatorname{Tang}_x X$ en laquelle l'isomorphisme $\varphi_\#^{-1}$ applique la base canonique $\mathrm{ort}_1, \ldots, \mathrm{ort}_n$ de l'espace R^n est appelée *φ-base*. Les coordonnées du vecteur $v \in \operatorname{Tang}_x X$ relativement à la φ-base coïncident avec les coordonnées usuelles du vecteur $v(\varphi)$; on les appelle *φ-coordonnées* du vecteur v.

2. La réunion $\bigcup_{x \in X} \operatorname{Tang}_x X$, i.e. l'ensemble de tous les vecteurs tangents à X, est désignée par $\operatorname{Tang} X$. L'application $\operatorname{Tang} X \to X$

qui applique $\mathrm{Tang}_x X$ dans x est appelée *projection*; on la désigne par pr. Ainsi $\mathrm{pr}^{-1}(x) = \mathrm{Tang}_x X$.

L'ensemble Tang X possède une topologie naturelle qui en fait une variété topologique et, pour $r \geqslant 2$, le munit d'une structure différentielle naturelle. Ces structures peuvent être décrites de la manière suivante. Définissons d'après une carte φ de la variété X l'application

$$\mathrm{tn}\,\varphi : \mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{supp}\,\varphi) \to \mathrm{Im}\,\varphi \times \mathsf{R}^n$$

par la formule

$$\mathrm{tn}\,\varphi\,(v) = (\varphi \circ \mathrm{pr}\,(v),\ \varphi_{\#}\,(v)).$$

L'identification usuelle $\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n = \mathsf{R}^{2n}$, qui transforme $\mathrm{Im}\,\varphi \times \times \mathsf{R}^n$ en un sous-ensemble ouvert de l'espace R^{2n} ou du demi-espace R^{2n}_-, permet d'envisager $\mathrm{tn}\,\varphi$ comme une carte de dimension $2n$ dans Tang X ; il est clair que si ψ est une autre carte de la variété X, alors la composée des applications

$$\varphi\,(\mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi) \times \mathsf{R}^n =$$

$$= \mathrm{tn}\,\varphi\,(\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{supp}\,\varphi) \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{supp}\,\psi)) \xrightarrow{\mathrm{ab}(\mathrm{tn}\,\varphi)^{-1}}$$

$$\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{supp}\,\varphi) \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{supp}\,\psi) \xrightarrow{\mathrm{ab}\,\mathrm{tn}\,\psi}$$

$$\mathrm{tn}\,\psi\,(\mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{supp}\,\varphi) \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathrm{supp}\,\psi)) = \psi\,(\mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi) \times \mathsf{R}^n \qquad (1)$$

se définit par la formule

$$(a,\ u) \mapsto (\mathrm{loc}\,(\varphi,\ \psi)\ \mathrm{id}\,(a),\ d_{\varphi^{-1}(a)}\,(\varphi,\ \psi)\ u)$$

ou, ce qui revient au même, par la formule en coordonnées

$$(a_1,\ \ldots,\ a_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_n) \mapsto (b_1,\ \ldots,\ b_n;\ v_1,\ \ldots,\ v_n),$$

où

$$\left.\begin{aligned} b_j &= l_j\,(a_1,\ \ldots,\ a_n), \\ v_j &= \sum_{i=1}^{n} D_i l_j\,(a_1,\ \ldots,\ a_n)\,u_i, \end{aligned}\right\} \quad j = 1,\ \ldots,\ n, \qquad (2)$$

les $l_1, \ldots, l_n$ étant les fonctions de coordonnées de l'application $\mathrm{loc}\,(\varphi, \psi)\ \mathrm{id}$. ($D_i$ désigne la dérivation relativement à la i-ème coordonnée.) Les formules (2) montrent que les cartes $\mathrm{tn}\,\varphi$, $\mathrm{tn}\,\psi$ sont $\mathscr{C}^{r-1}$-compatibles (nous posons $\mathscr{C}^{\infty-1} = \mathscr{C}^{\infty}$, $\mathscr{C}^{a-1} = \mathscr{C}^{a}$); il est évident que les cartes $\mathrm{tn}\,\varphi$ avec $\varphi \in \mathrm{Atl}\,X$ recouvrent Tang X ; ainsi, les cartes $\mathrm{tn}\,\varphi$, $\varphi \in \mathrm{Atl}\,X$, constituent un $\mathscr{C}^{r-1}$-atlas de l'ensemble Tang X. Cet atlas possède un sous-atlas dénombrable (puisque Atl X possédait un sous-atlas dénombrable) et contient, pour deux vecteurs quelconques de Tang X, une carte ou une paire de cartes disjointes qui les recouvrent (car pour deux points arbitraires de X Atl X contient une carte ou une paire de cartes disjointes qui les recouvrent). Ainsi, il transforme Tang X en une $\mathscr{C}^{r-1}$-variété de dimension $2n$.

Cette dernière est appelée *variété totale des vecteurs tangents de la variété* X.

Il est évident que la projection $\operatorname{Tang} X \to X$, les inclusions $\operatorname{Tang}_x X \to \operatorname{Tang} X$ et l'application naturelle $X \to \operatorname{Tang} X$, qui fait correspondre au point $x \in X$ l'élément nul de l'espace $\operatorname{Tang}_x X$, sont des $\mathscr{C}^{r-1}$-applications.

Les formules (2) montrent que pour $r \geqslant 2$ le jacobien de l'application composée (1) au point (a, u) est égal au carré du jacobien de l'application loc (φ, ψ) id au point a. D'où l'on déduit que pour $r \geqslant 2$ la variété $\operatorname{Tang} X$ est toujours orientable et possède même une orientation canonique, positive sur les cartes tn φ avec $\varphi \in \operatorname{Catl} X$.

Remarquons aussi que pour deux variétés différentiables arbitraires X_1, X_2 (avec $\partial X_2 = \varnothing$) et des points quelconques $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ il existe entre les espaces $\operatorname{Tang}_{(x_1, x_2)}(X_1 \times X_2)$ et $\operatorname{Tang}_{x_1} X_1 \oplus \operatorname{Tang}_{x_2} X_2$ un isomorphisme vectoriel naturel et que les isomorphismes correspondant à tous les couples (x_1, x_2) constituent un difféomorphisme entre les espaces $\operatorname{Tang}(X_1 \times X_2)$ et $\operatorname{Tang} X_1 \times \operatorname{Tang} X_2$.

Différentielle d'une application différentiable

3. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^r$ d'une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété X de dimension m dans une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété Y de dimension n pour $r \geqslant 1$. Pour un point $x \in X$ et des cartes $\varphi \in \operatorname{Atl}_x X$, $\psi \in \operatorname{Alt}_{f(x)} Y$, désignons par $d_x(f; \varphi, \psi)$ la différentielle de l'application loc $(\varphi, \psi) f$ au point $\varphi(x)$ (i.e. l'application linéaire $\mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^n$ dont la matrice est le jacobien de l'application loc $(\varphi, \psi) f$ au point $\varphi(x)$). Si φ', ψ' sont d'autres cartes quelconques de $\operatorname{Atl}_x X$, $\operatorname{Atl}_{f(x)} Y$, on a

$$d_x(f; \varphi', \psi') = d_{f(x)}(\psi, \psi') \circ d_x(f; \varphi, \psi) \circ d_x(\varphi', \varphi),$$

d'où il découle d'après les égalités

$$d_x(\varphi', \varphi) = \varphi_{\#} \circ (\varphi'_{\#})^{-1}, \quad d_{f(x)}(\psi, \psi') = \psi'_{\#} \circ \psi_{\#}^{-1}$$

que

$$(\psi'_{\#})^{-1} \circ d_x(f; \varphi', \psi') \circ \varphi'_{\#} = \psi_{\#}^{-1} \circ d_x(f; \varphi, \psi) \circ \varphi_{\#},$$

i.e. l'application linéaire

$$\psi_{\#}^{-1} \circ d_x(f; \varphi, \psi) \circ \varphi_{\#} : \operatorname{Tang}_x X \to \operatorname{Tang}_{f(x)} Y$$

ne dépend pas du choix des cartes φ, ψ. Cette application linéaire s'appelle *différentielle de l'application f au point x*; on la désigne par $d_x f$; l'application de la variété totale $\operatorname{Tang} X$ dans la variété totale $\operatorname{Tang} Y$ qui coïncide sur $\operatorname{Tang}_x X$ avec $d_x f$ est appelée *différentielle*

de l'application f ; on la désigne par df. Il est évident que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Tang} X \arrow[r, "df"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & \operatorname{Tang} Y \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Si l'on désigne par $l_1, \ldots, l_n$ les fonctions coordonnées de l'application loc $(\varphi, \psi)\, f$, la représentation locale loc $(\mathrm{tn}\, \varphi, \mathrm{tn}\, \psi)\, df$ de la différentielle df se définit par la formule en coordonnées $(a_1, \ldots, a_m ; u_1, \ldots, u_m) \mapsto (b_1, \ldots, b_n ; v_1, \ldots, v_n)$, où

$$\left.\begin{aligned} b_j &= l_j(a_1, \ldots, a_m), \\ v_j &= \sum_{i=1}^{m} D_i l_j(a_1, \ldots, a_m)\, u_i, \end{aligned}\right\} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ainsi df appartient à la classe $\mathscr{C}^{r-1}$.

Pour toute application différentiable h de la variété Y dans une troisième variété différentiable on a évidemment $d(h \circ f) = dh \circ df$ et $df = \mathrm{id}\,(\mathrm{Tang}\, X)$ lorsque $Y = X$ et $f = \mathrm{id}\, X$. Il est également évident que si f est un difféomorphisme, alors df est un difféomorphisme pour $r \geqslant 2$ et un homéomorphisme pour $r = 1$.

Dans le cas où X est un sous-ensemble ouvert de l'espace R^m ou du demi-espace R^m_- et Y un sous-ensemble ouvert de l'espace R^n ou du demi-espace R^n_-, il existe, en chaque point $x \in X$, en plus de la différentielle $d_x f : \mathrm{Tang}_x X \to \mathrm{Tang}_{f(x)} Y$, la différentielle classique de l'application f définie comme l'application linéaire $\mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^n$ dont la matrice est la matrice de Jacobi de l'application f au point x. Lorsqu'on identifie l'espace $\mathrm{Tang}_x X$ avec R^m et l'espace $\mathrm{Tang}_{f(x)} Y$ avec R^n à l'aide des isomorphismes linéaires $(\mathrm{id}\, X)_\#$: $\mathrm{Tang}_x X \to \mathsf{R}^m$ et $(\mathrm{id}\, Y)_\#$: $\mathrm{Tang}_{f(x)} Y \to \mathsf{R}^n$, $d_x f$ devient cette différentielle classique.

4. Si A est une sous-variété ou le bord d'une variété différentiable X, la différentielle $d_x \mathrm{in} : \mathrm{Tang}_x A \to \mathrm{Tang}_x X$ de l'inclusion $A \to X$ est évidemment un monomorphisme en chaque point $x \in A$. Ceci permet d'identifier les espaces tangents $\mathrm{Tang}_x A$ avec les sous-espaces $d_x \mathrm{in}\, (\mathrm{Tang}_x A)$ des espaces tangents $\mathrm{Tang}_x X$ et $\mathrm{Tang}\, A$ avec $d\, \mathrm{in}\, (\mathrm{Tang}\, A)$.

Si A est une sous-variété de R^n, on peut ajouter à l'identification $\mathrm{Tang}_x A = d_x \mathrm{in}\, (\mathrm{Tang}_x A)$ l'identification $\mathrm{Tang}_x \mathsf{R}^n = \mathsf{R}^n$ par l'isomorphisme linéaire canonique $(\mathrm{id}\, \mathsf{R}^n)_\#$: $\mathrm{Tang}_x \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$, de sorte que l'espace tangent $\mathrm{Tang}_x A$ s'avère être un sous-espace de l'espace R^n. Il n'est pas difficile de donner ce sous-espace explicitement lorsque A est défini dans un voisinage du point x par des fonctions indépendantes $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n$ suivant le schéma de 2.12 : il

se compose des vecteurs de l'espace R^n orthogonaux aux $n - k$ vecteurs grad $\varphi_{k+1}(x)$, . . ., grad $\varphi_n(x)$. Par exemple, $\mathrm{Tang}_x S^{n-1}$ est le sous-espace de l'espace R^n constitué des vecteurs orthogonaux à x.

Champs de vecteurs

5. On appelle *champs de vecteurs* sur une variété différentiable X toute application continue $X \to \mathrm{Tang}\, X$ qui fait correspondre à chaque point de X un vecteur tangent en ce point. Un exemple trivial est donné par le *champ de vecteurs nul* dont la valeur en chaque point $x \in X$ est le zéro de l'espace $\mathrm{Tang}_x X$ (cf. *2*).

Une variété différentiable X de dimension n et de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r+1}$ est dite *$\mathscr{C}^r$-parallélisable* s'il existe des champs de vecteurs $f_1, \ldots, f_n$: $X \to \mathrm{Tang}\, X$ de classe $\mathscr{C}^r$ tels que les vecteurs $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ constituent pour chaque point $x \in X$ une base de l'espace $\mathrm{Tang}_x X$. Par exemple, l'espace R^n (envisagé comme une $\mathscr{C}^a$-variété) est $\mathscr{C}^a$-parallélisable ; il peut être parallélisé par les champs de vecteurs qui font correspondre au point $x \in \mathsf{R}^n$ la (id R^n)-base de l'espace $\mathrm{Tang}_x \mathsf{R}^n$.

La $\mathscr{C}^0$-parallélisabilité est *parallélisabilité* tout court. Nous montrerons au chapitre 4 (voir 4.6.4.3) que la parallélisabilité d'une $\mathscr{C}^{\geqslant r+1}$-variété compacte pour $r \leqslant \infty$ implique sa $\mathscr{C}^r$-parallélisabilité.

I n f o r m a t i o n. Toute $\mathscr{C}^{\geqslant r+1}$-variété parallélisable est $\mathscr{C}^r$-parallélisable également dans le cas non compact, ainsi que pour $r = a$.

6. Lorsqu'une variété différentiable X est parallélisée par les champs de vecteurs $f_1, \ldots, f_n$: $X \to \mathrm{Tang}\, X$ de classe $\mathscr{C}^r$, la formule $(x, (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto y_1 f_1(x) + \ldots + y_n f_n(x)$ définit un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme du produit $X \times \mathsf{R}^n$ sur $\mathrm{Tang}\, X$. En effet, la formule $v \mapsto (\mathrm{pr}(v), (y_1, \ldots, y_n))$, où $y_1, \ldots, y_n$ sont les coordonnées du vecteur v relativement à la base $f_1(\mathrm{pr}(v)), \ldots, f_n(\mathrm{pr}(v))$ de l'espace $\mathrm{Tang}_{\mathrm{pr}(v)} X$, définit l'application inverse $\mathrm{Tang}\, X \to X \times \mathsf{R}^n$ et il est clair que les deux applications appartiennent à la classe $\mathscr{C}^r$. Ainsi, *la variété totale des vecteurs tangents d'une variété différentiable $\mathscr{C}^r$-parallélisable X de dimension n est $\mathscr{C}^r$-difféomorphe au produit $X \times \mathsf{R}^n$.*

Il découle de cette remarque, en particulier, qu'*une variété différentiable $\mathscr{C}^1$-parallélisable est orientable*. En effet, la variété $\mathrm{Tang}\, X$ est orientable pour toute $\mathscr{C}^r$-variété X lorsque $r \geqslant 2$ (voir *2*) tandis que l'orientabilité du produit $X \times \mathsf{R}^n$ implique celle de X (voir 3.7).

7 (Exemples). Pour n impair, la sphère S^n possède des champs de vecteurs qui ne s'annulent en aucun point. Tel sera, par exemple, le champ de vecteurs qui applique le point $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ dans le vecteur $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathsf{R}^{n+1}$, où $y_{2k-1} = -x_{2k}$, $y_{2k} = x_{2k-1}$ $(k = 1, \ldots (n+1)/2)$, envisagé comme un vecteur de $\mathrm{Tang}_x S^n$ (voir *4*).

Remarquons que ce même champ peut être défini par une formule complexe plus compacte $x \mapsto xi$ si l'on envisage R^{n+1} comme étant $\mathsf{C}^{(n+1)/2}$. Lorsque $n+1$ est divisible par 4, on peut envisager R^{n+1} comme étant $\mathsf{H}^{(n+1)/4}$ et les formules

$$x \mapsto x\,\mathrm{ort}_2, \quad x \mapsto x\,\mathrm{ort}_3, \quad x \mapsto x\,\mathrm{ort}_4$$

(où ort_2, ort_3, ort_4 sont considérés comme les unités imaginaires des quaternions) définissent sur S^n trois champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point. Si $n+1$ est divisible par 8, alors R^{n+1} peut être envisagé comme étant $\mathsf{Ca}^{(n+1)/8}$, et les formules $x \mapsto x\,\mathrm{ort}_2, \ldots, x \mapsto x\,\mathrm{ort}_8$ (où $\mathrm{ort}_2, \ldots, \mathrm{ort}_8$ sont considérés comme les unités imaginaires de Cayley) déterminent sur S^n sept champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point. Puisque tous les champs considérés sont analytiques, cette construction montre en particulier que les sphères S^1, S^3 et S^7 sont $\mathscr{C}^a$-parallélisables.

Information. Pour $n \neq 0, 1, 3, 7$ la sphère S^n n'est pas parallélisable. On trouve une démonstration dans [1] et [2].

5. Plongements, immersions et submersions

1. Une application f d'une variété différentiable X dans une variété différentiable Y est appelée *$\mathscr{C}^r$-plongement* si $f(X)$ est une $\mathscr{C}^r$-sous-variété de la variété Y et ab $f\colon X \to f(X)$ est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme. En guise d'exemple signalons l'inclusion dans une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété d'une de ses sous-variétés. Puisque chaque application $f\colon X \to Y$ se représente comme la composée de son abréviation ab $f\colon X \to f(X)$ et de l'inclusion $f(X) \to Y$, tout $\mathscr{C}^r$-plongement appartient effectivement à la classe $\mathscr{C}^r$ d'applications.

Les $\mathscr{C}^1$-plongements sont appelés autrement *plongements différentiables*. Comme il découle du théorème *3* démontré ci-dessous, un plongement différentiable appartenant à la classe $\mathscr{C}^r$ est un $\mathscr{C}^r$-plongement. Il va de soi que les plongements différentiables sont des plongements topologiques. Ces derniers sont parfois appelés $\mathscr{C}^0$-plongements.

Un plongement différentiable $f\colon X \to Y$ est appelé *propre* si $f(X)$ est une sous-variété propre de la variété Y. En guise d'exemple, citons l'inclusion d'une sous-variété propre d'une variété différentiable dans cette variété. Il est clair que si $\dim X = \dim Y$, Y est connexe et X n'est pas vide, tout plongement différentiable propre $X \to Y$ est un difféomorphisme.

Il est évident que pour tout $\mathscr{C}^r$-plongement $f\colon X \to Y$ et pour tout point $x \in X$ il existe des cartes $\varphi \in \mathrm{Atl}_x \mathscr{C}^r X$, $\psi \in \mathrm{Atl}_{f(x)} \mathscr{C}^r Y$ telles que $\mathrm{loc}\,(\varphi, \psi)\, f$ coïncide avec une des inclusions $\mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^n$, $\mathsf{R}^m_- \to \mathsf{R}^n$, $\mathsf{R}^m_- \to \mathsf{R}^n_-$, où $m = \dim X$, $n = \dim Y$, la deuxième éventualité étant exclue dans le cas où f est propre.

Immersions

2. Une application différentiable f d'une variété différentiable X dans une variété différentiable Y est appelée *immersion* lorsque: (i) $d_x f$: $\mathrm{Tang}_x X \to \mathrm{Tang}_{f(x)} Y$ est un monomorphisme pour chaque point $x \in X$; (ii) $(df)^{-1}(\mathrm{Tang}\, \partial Y) \subset \mathrm{Tang}\, \partial X$.

Remarquons que la condition (i) implique l'inégalité $\dim X \leqslant \dim Y$, tandis que la condition (ii) implique l'inclusion $f(\mathrm{int}\, X) \subset \mathrm{int}\, Y$, la condition (ii) étant satisfaite automatiquement lorsque Y est sans bord.

La composée de deux immersions est évidemment une immersion.

En guise d'exemple d'immersions, citons des plongements différentiables.

3. Si f: $X \to Y$ est une immersion de classe $\mathscr{C}^r$, alors chaque point de X possède un voisinage sur lequel f est un $\mathscr{C}^r$-plongement.

Démonstration. Soit x_0 un point arbitraire de la variété X; posons $\dim X = m$, $\dim Y = n$, choisissons deux cartes quelconques $\varphi \in \mathrm{Atl}_{x_0} X$, $\psi \in \mathrm{Atl}_{f(x_0)} Y$ et désignons par $l_1, \ldots, l_n$ les fonctions coordonnées de l'application loc $(\varphi, \psi)\, f$. D'après la condition *2* (i), le rang de la matrice de Jacobi de l'application loc $(\varphi, \psi)\, f$, calculée au point $\varphi(x_0)$, est égal à m, tandis que la condition *2*(ii) permet de supposer non nul le mineur M de cette matrice constitué par les m premières lignes. [Si $f(x_0) \in \mathrm{int}\, Y$, la condition *2*(ii) n'est plus nécessaire. On peut obtenir l'inégalité $M \neq 0$ en renumérotant les coordonnées locales $\psi_1, \ldots, \psi_n$ correspondant à la carte ψ, i.e. en changeant de place les lignes de la matrice. Si $f(x_0) \in \partial Y$, alors *2*(ii) implique que tous les éléments de la première ligne de la matrice, sauf le premier, sont nuls; ceci permet d'obtenir l'inégalité $M \neq 0$ par renumérotation des coordonnées $\psi_2, \ldots, \psi_n$.] Il découle de théorème sur les fonctions implicites qu'il existe un voisinage W du point $(\psi_1(f(x_0)), \ldots, \psi_m(f(x_0)))$ dans R^m et un $\mathscr{C}^r$-plongement h: $W \to \mathrm{Im}\, \varphi$ tels que pour $i = 1, \ldots, m$ on a

$$h_i(\psi_1(f(x_0)), \ldots, \psi_m(f(x_0))) = \varphi_i(x_0),$$

$$l_i(h_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, h_m(y_1, \ldots, y_m)) = y_i,$$

$$(y_1, \ldots, y_m) \in W,$$

où $h_1, \ldots, h_m$ sont les fonctions coordonnées de l'application h. On trouve que: $N = \varphi^{-1}(h(W))$ est un voisinage du point x_0; $f(N)$ se détermine dans $\psi^{-1}(W \times \mathsf{R}^{n-m})$ par les équations

$$\psi_j - l_j(h_1(\psi_1, \ldots, \psi_m), \ldots, h_m(\psi_1, \ldots, \psi_m)) = 0$$

et peut-être par l'inégalité $h_1(\psi_1, \ldots, \psi_m) \leqslant 0$, étant donc une $\mathscr{C}^r$-sous-variété de la variété Y; la composée des applications

$$f(N) \xrightarrow{\mathrm{ab}\,\psi} \psi(f(N)) \to W \xrightarrow{h} h(W) \xrightarrow{(\mathrm{ab}\,\varphi)^{-1}} N,$$

où la deuxième flèche figure l'abréviation de la projection orthogonale $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$, appartient à la classe $\mathscr{C}^r$, tout en étant inverse de l'application ab $f\colon N \to f(N)$. Ainsi $f|_N$ est un $\mathscr{C}^r$-plongement.

4 (Corollaire). *Si une immersion de classe $\mathscr{C}^r$ est un plongement topologique, elle sera un $\mathscr{C}^r$-plongement. En particulier, chaque $\mathscr{C}^r$-immersion injective d'une variété compacte est un $\mathscr{C}^r$-plongement.*

5. Soient $f\colon X \to Y$ une application différentiable telle que $(df)^{-1}(\mathrm{Tang}\,\partial Y) \subset \mathrm{Tang}\,\partial X$, et A un sous-ensemble compact de la variété X. Si $f|_A$ est injective et la différentielle $d_x f$ est non dégénérée aux points $x \in A$, alors dans un certain voisinage de A l'application f est un plongement différentiable; en particulier, si dans les conditions précédentes on a $\dim X = \dim Y$ *et $f(\partial X) \subset \partial Y$, alors f est un difféomorphisme qui applique un voisinage de l'ensemble A sur un voisinage de l'ensemble $f(A)$.*

Démonstration. Fixons pour chaque point $x \in A$ un voisinage U_x sur lequel f est un $\mathscr{C}^r$-plongement (voir *3*) et recouvrons A par un nombre fini de tels voisinages, mettons par les voisinages $U_{x_1}, \ldots, U_{x_s}$. L'ensemble $Y \times Y \setminus \mathrm{diag}\,Y$ étant ouvert dans $Y \times Y$ (voir 1.2.2.4), son image inverse W par l'application $f \times f\colon X \times X \to Y \times Y$ est également ouverte, tandis que l'injectivité de l'application f sur A implique que l'ensemble $W \cup \left[\bigcup_{i=1}^{s} (U_{x_i} \times U_{x_i})\right]$ contient l'ensemble $A \times A$ et se trouve donc être son voisinage. Munissons l'espace X d'une métrique (voir 1.1.12) et par suite l'espace $X \times X$ (voir 1.2.2.9); posons

$$B = \{x \in X \mid \mathrm{Dist}\,(A, x) < \mathrm{Dist}\,((X \times X) \setminus W, A \times A)/2\}.$$

Puisque B est ouvert et contient A (voir 1.1.7.15), l'intersection $B \cap (\bigcup_{i=1}^{s} U_{x_i})$ est également ouverte et contient A; mais comme A est compact, il possède un voisinage U à adhérence compacte contenu dans cette intersection. En outre, $B \times B \subset W$, d'où l'on tire que f est injective sur B. Par conséquent $f|_{\mathrm{Cl}\,U}$ est un plongement topologique et $f|_U$ un plongement différentiable (voir *4*).

Submersions

6. Une application différentiable f d'une variété différentiable X dans une variété différentiable Y est appelée *submersion* si (i) $d_x f\colon \mathrm{Tang}_x X \to \mathrm{Tang}_{f(x)} Y$ est un épimorphisme pour chaque point $x \in X$; (ii) $d_x f\,(\mathrm{Tang}_x\,\partial X) = \mathrm{Tang}_{f(x)} Y$ pour chaque point $x \in \partial X \cap f^{-1}(\mathrm{int}\,Y)$; (iii) l'intersection $\partial X \cap f^{-1}(\mathrm{int}\,Y)$ est constituée des composantes entières de la variété ∂X.

Remarquons que la condition (i) implique l'inégalité $\dim X \geqslant \dim Y$ et les conditions (ii), (iii) sont automatiquement satisfaites lorsque X n'a pas de bord.

En guise d'exemples, considérons les fonctions réelles différentiables $f: X \to \mathbf{R}$. Comme dans l'Analyse, nous dirons que le point $x \in X$ et la valeur correspondante $f(x)$ sont *critiques* pour f si $d_x f = 0$. Il est clair que f est une submersion si et seulement si aucune des fonctions f, $f|_{\partial X}$ ne possède de points critiques.

D'autres exemples de submersions sont donnés par les projections du produit de deux variétés différentiables (dont une sans bord) sur chacun des facteurs.

7. Une application f d'une variété différentiable X de dimension m dans une variété différentiable Y de dimension n est une submersion de classe $\mathscr{C}^r$ si et seulement si pour chaque point $x \in X$ il existe des cartes $\varphi \in \mathrm{Atl}_x \mathscr{C}^r X$, $\psi \in \mathrm{Atl}_{f(x)} \mathscr{C}^r Y$ telles que $f(\mathrm{supp}\, \varphi) \subset \mathrm{supp}\, \psi$; le couple $(\mathrm{Im}\, \varphi, \mathrm{Im}\, \psi)$ *coïncide avec un des trois couples* $(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, $(\mathbf{R}^m_-, \mathbf{R}^n)$, $(\mathbf{R}^m_-, \mathbf{R}^n_-)$ *et dans les trois cas on a* $\varphi(x) = 0$ *et* $\psi(f(x)) = 0$; *la représentation locale correspondante* $\mathrm{loc}(\varphi, \psi) f$ *peut être décrite dans le premier cas comme étant la projection du produit* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n}$ *sur le premier facteur, dans le deuxième cas comme la projection du produit* $\mathbf{R}^{m-n}_- \times \mathbf{R}^n$ *sur le deuxième facteur et dans le troisième cas comme la projection du produit* $\mathbf{R}^n_- \times \mathbf{R}^{m-n}$ *sur le premier facteur.*

La suffisance de cette condition est évidente; démontrons-en la nécessité. Soient φ^1, ψ^1 des cartes arbitraires de $\mathrm{Atl}_x X$, $\mathrm{Atl}_{f(x)} Y$ telles que $f(\mathrm{supp}\, \varphi^1) = \mathrm{supp}\, \psi^1$ et $\varphi^1(x) = 0$, $\psi^1(f(x)) = 0$; désignons par $\varphi^1_1, \ldots, \varphi^1_m$ et $\psi^1_1, \ldots, \psi^1_n$ les fonctions coordonnées correspondantes et par $l_1, \ldots, l_n$ les fonctions coordonnées de l'application $\mathrm{loc}(\varphi^1, \psi^1) f$. Nous allons distinguer trois cas: $x \in \mathrm{int}\, X$, $f(x) \in \mathrm{int}\, Y$; $x \in \partial X$, $f(x) \in \mathrm{int}\, Y$; $f(x) \in \partial Y$. La condition *6* (i) signifie que le rang de la matrice de Jacobi de l'application $\mathrm{loc}(\varphi^1, \psi^1) f$ calculé au point 0 est égal à n dans tous les trois cas; d'autre part, selon la condition *6* (ii), dans le deuxième cas, ce rang ne deviendra pas plus petit si nous éliminons la première colonne de la matrice. Ainsi on peut supposer que, dans le premier et dans le troisième cas, le mineur constitué par les n premières colonnes n'est pas nul et dans le deuxième cas, le mineur constitué par les n dernières colonnes n'est pas nul. En outre, dans le troisième cas, le point 0 est un point frontière pour $\mathrm{Im}\, \varphi^1$ dans $\mathbf{R}^m$ et la fonction l_1 s'annule sur $\varphi^1(\partial X \cap \mathrm{Im}\, \varphi^1)$ dans un voisinage de ce point. La première assertion découle du fait que la fonction l_1 étant non positive, possède au point 0 une valeur nulle et un gradient différent de zéro; ceci dit, la deuxième assertion découle de *6* (iii).

Pour passer des cartes φ^1, ψ^1 aux cartes envisagées φ, ψ, on doit se servir des cartes auxiliaires $\varphi^2 \in \mathrm{Atl}_x \mathscr{C}^r X$, $\psi^2 \in \mathrm{Atl}_{f(x)} Y$. Dans le premier et le troisième cas, φ^2 est une carte dont les coordonnées locales sont les restrictions des fonctions $l_1 \circ \varphi^1, \ldots, l_n \circ \varphi^1$, $\varphi^1_{n+1}, \ldots, \varphi^1_m$ à un voisinage suffisamment petit U_2 du point x, tandis que pour ψ^2 on prend $\mathrm{ab}\, \psi^1: V_2 \to \psi^1(V_2)$, où $V_2 = f(U_2)$. Dans le deuxième cas, φ^2 et ψ^2 se définissent de la même façon, sauf

qu'au lieu des fonctions $l_1 \circ \varphi^1, \ldots, l_n \circ \varphi^1, \varphi^1_{n+1}, \ldots, \varphi^1_m$ on prend les fonctions $\varphi^1_1, \ldots, \varphi^1_{m-n}, l_1 \circ \varphi^1, \ldots, l_n \circ \varphi^1$. Dans tous les cas on a $f(U_2) = V_2$ et l'application loc $(\varphi^2, \psi^2)\, f$ se définit dans le premier et le troisième cas dans les nouvelles coordonnées locales $\varphi^2_1, \ldots, \varphi^2_m$; $\psi^2_1, \ldots, \psi^2_n$ par les formules $\psi^2_1 = \varphi^2_1, \ldots$ $\ldots, \psi^2_n = \varphi^2_n$ et dans le deuxième cas, par les formules $\varphi^2_1 = \psi^2_{m-n+1}, \ldots, \varphi^2_n = \psi^2_m$. Fixons un nombre positif ε et définissons dans U_2, V_2 les ensembles U, V par les inégalités $|\varphi^2_i| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, m)$, $|\psi^2_j| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Il est clair que pour ε suffisamment petit les cartes φ, ψ telles que supp $\varphi = U$, supp $\psi = V$, de coordonnées locales

$$\varphi_i(y) = \frac{\varphi^2_i(y)}{\varepsilon - |\varphi^2_i(y)|} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\psi_j(z) = \frac{\psi^2_j(z)}{\varepsilon - |\psi^2_j(z)|} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

possèdent toutes les propriétés nécessaires.

8 (Corollaires). *Si $f\colon X \to Y$ est une submersion, on a f* (int X) $\subset$ $\subset$ int Y, $f^{-1}(\partial Y) \subset \partial X$ *et les applications* ab $f\colon$ int $X \to$ int Y, ab $f\colon f^{-1}(\partial Y) \to \partial Y$ *sont des submersions.*

Si $f\colon X \to Y$ est une submersion de classe $\mathscr{C}^r$, alors $f^{-1}(y)$ est une $\mathscr{C}^r$-sous-variété propre de la variété X pour $y \in$ int Y *et une $\mathscr{C}^r$-sous-variété propre de la variété ∂X pour $y \in \partial Y$.*

Toute submersion est une application ouverte.

La composée de deux submersions est une submersion.

9. Une $\mathscr{C}^r$-application $f\colon X \to Y$ jouissant de la propriété 6 (iii) *sera une submersion si et seulement si pour chaque point $x_0 \in X$ il existe un voisinage V du point $f(x_0)$ et une $\mathscr{C}^r$-application $g\colon V \to X$ tels que $f(g(y)) = y$ pour $y \in V$ et $g(f(x_0)) = x_0$.*

La suffisance de cette condition est évidente, sa nécessité découle de *7*.

10. Soit $f\colon X \to Y$ une submersion de classe $\mathscr{C}^r$ telle que $f(X) = Y$; soit h une application de la variété Y dans une troisième variété différentiable. Lorsque la composée $h \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^r$, h est également de classe $\mathscr{C}^r$.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de *9*, pour chaque point de la variété Y, on peut trouver un voisinage V et une $\mathscr{C}^r$-application $g\colon V \to X$ tels que $f \circ g = [\mathrm{in}\colon V \to Y]$, et cette égalité implique $h|_V = (h \circ f) \circ g$.

6. Structures complexes

1. Rappelons qu'une application d'un sous-ensemble ouvert de l'espace $\mathbf{C}^m$ dans un sous-ensemble de l'espace $\mathbf{C}^n$ est dite *holomorphe* lorsque ses fonctions coordonnées sont holomorphes; elle est dite *biholomorphe* lorsqu'elle est bijective et holomorphe en même temps

que l'application inverse. Dans le dernier cas on a évidemment $m = n$ (voir 2.2).

Si $\mathbf{C}^m$ et $\mathbf{C}^n$ sont envisagés comme étant $\mathbf{R}^{2m}$ et $\mathbf{R}^{2n}$, les applications holomorphes deviennent des $\mathscr{C}^a$-applications, tandis que les applications biholomorphes deviennent des $\mathscr{C}^a$-difféomorphismes. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une application différentiable d'un sous-ensemble ouvert de l'espace $\mathbf{R}^{2m}$ dans un sous-ensemble de l'espace $\mathbf{R}^{2n}$ soit holomorphe relativement aux structures complexes définies dans $\mathbf{R}^{2m}$ et $\mathbf{R}^{2n}$ par les identifications $\mathbf{R}^{2m} = \mathbf{C}^m$, $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$ sont les conditions de Cauchy-Riemann; il est clair que l'application inverse d'un difféomorphisme vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann vérifie également ces conditions. Par conséquent, un difféomorphisme holomorphe est une application biholomorphe.

2. Si une application holomorphe d'un sous-ensemble de l'espace $\mathbf{C}^n$ dans un autre possède une différentielle non dégénérée en un certain point, alors elle conserve cette propriété en tant que $\mathscr{C}^a$-application; sa restriction à un certain voisinage du point indiqué est un difféomorphisme de celui-ci sur son image. Par conséquent, une application holomorphe qui possède en un certain point un jacobien non nul est une application biholomorphe d'un voisinage de ce point sur son image.

Cet énoncé est l'analogue exact du théorème réel sur l'inversion locale d'une application différentiable dont nous nous sommes servi pour déduire cet énoncé; exactement de la même manière, on peut transposer au cas complexe le théorème plus général de l'Analyse: le théorème sur les fonctions implicites. Soit f une application holomorphe d'un sous-ensemble ouvert A de l'espace $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$, qui applique le point $(z^0, w^0) \in A$ dans 0 et possède en ce point un jacobien non nul relativement au deuxième argument. Le théorème complexe sur les fonctions implicites affirme l'existence d'un voisinage U du point z^0 dans $\mathbf{C}^m$ et d'un voisinage V du point w^0 dans $\mathbf{C}^n$ et, enfin, d'une application holomorphe $g\colon U \to V$ tels que $U \times \times V \subset A$, l'application $f|_{U \times V}$ annulant précisément le graphe de l'application g.

3. Une transformation linéaire de l'espace $\mathbf{C}^n$ est également linéaire lorsqu'on l'envisage comme une transformation de l'espace $\mathbf{R}^{2n}$, ce qui fait correspondre à chaque matrice complexe C de dimension $n \times n$ une certaine matrice réelle R de dimension $2n \times 2n$. Si $C = = A + iB$ et $z = x + iy$ sont les décompositions de la matrice C et du vecteur $z \in \mathbf{C}^n$ en parties réelles et imaginaires, on a

$$Cz = (Ax - By) + i\,(Bx + Ay)$$

de sorte que

$$R = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Il découle en particulier de cette formule que

$$\det R = |\det C|^2;$$

en effet, si l'on ajoute à la première ligne (en blocs) de la matrice R la deuxième multipliée par i, et ensuite à la deuxième colonne la première multipliée par $-i$, la matrice R se met sous la forme $\begin{bmatrix} C & 0 \\ B & \bar{C} \end{bmatrix}$.

Variétés complexes

4. On appelle *carte complexe* de dimension n dans un ensemble X toute application bijective d'un sous-ensemble de l'ensemble X sur un sous-ensemble ouvert de l'espace $\mathbf{C}^n$. Les cartes complexes φ, ψ sont dites *accordées*, ou *compatibles*, si l'ensemble φ (supp $\varphi \cap$ $\cap$ supp ψ) (supp se définit comme dans le cas réel) est ouvert dans Im φ, l'ensemble ψ (supp $\varphi \cap$ supp ψ) est ouvert dans Im ψ et les bijections composées

$$\varphi\,(\text{supp}\,\varphi \cap \text{supp}\,\psi) \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi^{-1}} \text{supp}\,\varphi \cap \text{supp}\,\psi \xrightarrow{\text{ab}\,\psi} \psi\,(\text{supp}\,\varphi \cap \text{supp}\,\psi),$$

$$\psi\,(\text{supp}\,\varphi \cap \text{supp}\,\psi) \xrightarrow{\text{ab}\,\psi^{-1}} \text{supp}\,\varphi \cap \text{supp}\,\psi \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi} \varphi\,(\text{supp}\,\varphi \cap \text{supp}\,\psi)$$

sont holomorphes. Du fait que les cartes non disjointes de dimensions m, n sont compatibles on déduit que $m = n$.

Une famille de cartes complexes est appelée *atlas holomorphe de dimension n de l'ensemble X* si ces cartes recouvrent X, sont de dimension n et sont compatibles deux à deux. Deux atlas holomorphes sont dits *holomorphiquement équivalents* si toutes leurs cartes sont compatibles deux à deux. La partition de la famille de tous les atlas holomorphes de dimension n de l'ensemble X est constituée par des classes disjointes d'atlas holomorphiquement équivalents entre eux. Ces classes sont appelées *structures complexes de dimension n sur X*.

5. Une carte complexe de dimension n peut être envisagée comme une carte réelle de dimension $2n$, i.e. comme une carte de dimension $2n$ dans le sens de 2.3. Alors les cartes complexes compatibles se transforment en cartes réelles $\mathscr{C}^a$-compatibles, les atlas holomorphes, en $\mathscr{C}^a$-atlas, et les atlas holomorphiquement équivalents, en $\mathscr{C}^a$-atlas $\mathscr{C}^a$-équivalents. Ainsi une structure complexe de dimension n sur un ensemble X induit une $\mathscr{C}^a$-structure de dimension $2n$ sur X. Le cas le plus important est celui où la $\mathscr{C}^a$-structure transforme X en une variété, i.e. lorsque la topologie qu'elle détermine est une topologie de Hausdorff à base dénombrable. Un ensemble X muni d'une structure complexe de dimension n qui possède cette propriété est appelé *variété complexe de dimension n*.

L'atlas complet d'une variété complexe X, i.e. l'ensemble de toutes les cartes de tous les atlas de sa structure complexe, est désigné par Atl X.

6. Une application continue f d'une variété complexe X dans une variété complexe Y est dite *holomorphe* lorsque toutes ses représentations locales, i.e. les applications

$$\varphi\,(\operatorname{supp}\varphi \cap f^{-1}(\operatorname{supp}\psi)) \to \operatorname{Im}\psi$$

définies pour les cartes $\varphi \in \operatorname{Atl} X$, $\psi \in \operatorname{Atl} Y$ par la formule $x \mapsto \psi\,(f\,(\varphi^{-1}\,(x)))$ sont holomorphes. L'application $f\colon X \to Y$ est dite *biholomorphe* lorsqu'elle est holomorphe et bijective, l'application inverse étant également holomorphe. Les variétés complexes que l'on peut lier par une application biholomorphe sont dites *biholomorphiquement équivalentes.*

Si l'on envisage les variétés complexes comme étant des $\mathscr{C}^a$-variétés, alors les applications holomorphes deviennent des $\mathscr{C}^a$-applications et les applications biholomorphes, des $\mathscr{C}^a$-difféomorphismes.

7. Un sous-ensemble A d'une variété complexe X de dimension n est appelé *sous-variété de dimension k* si chaque point $x \in A$ est recouvert par une carte $\varphi \in \operatorname{Atl} X$ telle que $\varphi\,(\operatorname{supp}\varphi \cap A) = \operatorname{Im}\varphi \cap \mathbf{C}^k$. Les cartes ab $\varphi\colon \operatorname{supp}\varphi \cap A \to \operatorname{Im}\varphi \cap \mathbf{C}^k$ construites d'après les cartes $\varphi \in \operatorname{Atl} X$ constituent un atlas holomorphe de dimension k de l'ensemble A qui transforme A en une variété complexe.

La définition de l'indépendance des fonctions donnée dans 2.12 est valable également dans le cas complexe ; le théorème sur les fonctions implicites implique qu'un sous-ensemble A d'une variété complexe X de dimension n est sa sous-variété de dimension k si et seulement si, pour chaque point $x_0 \in A$, il existe un voisinage U dans X et des fonctions holomorphes $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n\colon U \to \mathbf{C}$ indépendantes au point x_0 tels que l'intersection $A \cap U$ se détermine dans U par les équations $\varphi_{k+1}(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0$ (voir 2.12).

Si une variété complexe X est envisagée comme une $\mathscr{C}^a$-variété, alors les sous-variétés resteront des sous-variétés, tandis que la $\mathscr{C}^a$-structure qu'elles héritent de X coïncide avec la $\mathscr{C}^a$-structure induite par leur propre structure complexe.

Si A est une sous-variété d'une variété complexe X, alors l'inclusion $A \to X$ est une application holomorphe.

Une application f d'une variété complexe X dans une variété complexe Y est appelée *plongement holomorphe* si ab $f\colon X \to f\,(X)$ est une application biholomorphe de la variété X sur une sous-variété de la variété Y. Puisque dans ce cas f est la composée de l'application biholomorphe $X \to f\,(X)$ et de l'inclusion $f\,(X) \to Y$, un plongement holomorphe est une application holomorphe.

8. Si $X_1, \ldots, X_s$ sont des variétés complexes de dimensions $n_1, \ldots, n_s$, alors les produits $\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_s$ des cartes $\varphi_i \in \operatorname{Atl} X_i$ constituent un atlas holomorphe de dimension $(n_1 + \ldots + n_s)$ de l'ensemble $X_1 \times \ldots \times X_s$, qui fait de cet ensemble une variété

complexe de dimension $n_1 + \ldots + n_s$. Envisagée comme une $\mathscr{C}^a$-variété, cette dernière coïncide avec le produit des variétés $X_1, \ldots, X_s$ considérées comme étant des $\mathscr{C}^a$-variétés.

9. Les définitions des vecteurs tangents, des espaces vectoriels tangents, de la variété totale des vecteurs tangents et de la différentielle d'une application (voir *4*) se transposent mot pour mot au cas complexe. L'espace $\mathrm{Tang}_x X$, tangent à la variété complexe X de dimension n au point x, est un espace vectoriel complexe de dimension n, la variété totale $\mathrm{Tang}\, X$ est une variété complexe de dimension $2n$ et la projection $\mathrm{Tang}\, X \to X$ est une application holomorphe. La différentielle $d_x f$ d'une application holomorphe f: $X \to Y$ au point $x \in X$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathrm{Tang}_x X$ dans l'espace vectoriel $\mathrm{Tang}_{f(x)} Y$, tandis que la différentielle df est une application holomorphe de la variété $\mathrm{Tang}\, X$ dans $\mathrm{Tang}\, Y$.

Les espaces tangents $\mathrm{Tang}_x X$ et la variété totale $\mathrm{Tang}\, X$, envisagés respectivement comme des espaces vectoriels réels et comme une $\mathscr{C}^a$-variété, coïncident avec les espaces tangents et la variété totale des vecteurs tangents à la variété X, envisagée comme une $\mathscr{C}^a$-variété. Considérée comme une $\mathscr{C}^a$-application, la différentielle de l'application holomorphe f coïncide avec la différentielle de l'application f, considérée comme une $\mathscr{C}^a$-application.

10. Les premiers exemples des variétés complexes sont les espaces $\mathbf{C}^n$ eux-mêmes. Une quantité illimitée d'autres exemples peut être obtenue en déterminant, à l'aide de systèmes d'équations, des sous-variétés de ces espaces (voir 2.16). Il s'avère néanmoins qu'il est impossible de construire par cette méthode une variété compacte de dimension positive: *toute sous-variété compacte de l'espace* $\mathbf{C}^n$ *est de dimension nulle.*

Pour le vérifier, il suffit d'établir que sur une variété connexe compacte les seules fonctions holomorphes sont des constantes. Ceci se déduit facilement du théorème d'Analyse bien connu qui affirme qu'une fonction holomorphe sur un sous-ensemble ouvert de la droite complexe $\mathbf{C}$ et qui prend sa valeur maximale absolue est constante. Soient X une variété complexe connexe, f: $X \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et c la valeur absolue maximale de cette fonction. Si $x \in X$ est un point tel que $f(x) = c$, alors pour chaque carte φ de $\mathrm{Atl}\, X$ vérifiant $\mathrm{supp}\, \varphi \ni x$, $\mathrm{Im}\, \varphi = \mathrm{Int}\, D^{2\dim X}$ et chaque point $y \in \mathrm{supp}\, \varphi$ les nombres complexes z tels que le point $(1 - z)\, \varphi(x) + z\varphi(y)$ est contenu dans $\mathrm{Im}\, \varphi$, constituent un domaine circulaire ouvert de centre 0 et de rayon supérieur à 1, tandis que la formule

$$z \mapsto f(\varphi^{-1}((1 - z)\, \varphi(x) + z\varphi(y)))$$

définit dans ce domaine une fonction holomorphe qui admet au point 0 une valeur absolue maximale. Puisqu'une telle fonction doit être constante, en posant $z = 0$ et $z = 1$, on obtient $f(y) = c$; par

conséquent, l'ensemble $f^{-1}(c)$ est ouvert ; étant en même temps fermé et non vide, il coïncide avec X.

Des exemples de variétés complexes compactes apparaîtront au § 2.

Variétés d'origine complexe

11. Une variété de classe $\mathscr{C}^a$ qui apparaît lorsqu'on transforme une variété complexe en une variété réelle de la manière indiquée dans *5* est appelée *variété d'origine complexe.*

Il est clair que les variétés d'origine complexe sont de dimension paire et n'ont pas de bord. Elles sont orientables ; si la structure complexe est connue, elles en héritent une orientation canonique, à savoir une orientation positive sur des cartes connexes (envisagées comme réelles) de l'atlas complet de la structure complexe. (Il découle de *3* que la condition de compatibilité des cartes indiquée dans 3.1 est ici satisfaite.) Il est tout aussi évident que le produit de variétés d'origine complexe est une variété d'origine complexe.

7. Exercices

1. Démontrer qu'une variété différentiable fermée de dimension $n > 0$ ne peut être appliquée par immersion dans R^n.

2. Démontrer que l'équation $z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 1$ définit dans C^n une sous-variété $\mathscr{C}^a$-difféomorphe à Tang S^{n-1}.

3. Démontrer que l'application $f : S^2 \to \mathsf{R}^4$, définie par la formule

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3),$$

est une immersion et que $f(S^2)$ est une sous-variété (de l'espace R^4) homéomorphe à $\mathsf{R}P^2$.

4. Démontrer que si un des nombres $n_1, \ldots, n_s$ est impair et $s > 1$, la variété $S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_s}$ est parallélisable.

§ 2. VARIÉTÉS DE STIEFEL ET DE GRASSMANN

1. Variétés de Stiefel

1. Nous allons désigner par $\mathsf{R}V(n, k)$ ou plus brièvement par $V(n, k)$ (où $0 \leqslant k \leqslant n$) l'ensemble des applications linéaires isométriques de l'espace R^k dans R^n. Une telle application se définit par les images des vecteurs $\mathrm{ort}_1, \ldots, \mathrm{ort}_k \in \mathsf{R}^k$, i.e. par un k-repère orthonormé de l'espace R^n. Les coordonnées des vecteurs de ce repère constituent la matrice de l'application considérée qui comporte n lignes et k colonnes. Ainsi $V(n, k)$ peut être interprété comme l'ensemble des k-repères orthonormés de l'espace R^n ou comme l'ensemble

des $(n \times k)$-matrices $\| v_{si} \|$ telles que

$$\sum_{s=1}^{n} v_{si} v_{sj} = \delta_{ij} \qquad (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k). \tag{1}$$

Nous allons envisager la matrice $\| v_{si} \|$ comme un point de l'espace R^{nk} en ordonnant ses éléments par ordre lexicographique. $V(n, k)$ devient alors le sous-ensemble, défini par les équations (1), de l'espace R^{nk}. Un calcul rapide montre que les gradients des premiers membres des équations (1) ne sont pas nuls sur ce sous-ensemble et sont deux à deux orthogonaux. Ainsi $V(n, k)$ est une $\mathscr{C}^a$-sous-variété sans bord de dimension $nk - k(k+1)/2$ de l'espace R^{nk} (voir 1.2.12). On l'appelle *variété de Stiefel.*

Il est évident que $V(n, 0)$ est un point, $V(n, 1)$ la sphère S^{n-1} et $V(n, 2)$ la sous-variété de la variété Tang S^{n-1} constituée par les vecteurs de longueur 1.

2. Les points de la variété $V(n, n)$ sont les transformations orthogonales de l'espace R^n ou les matrices orthogonales d'ordre n; on désigne généralement cette variété par $O(n)$. L'opération de composition des transformations (la multiplication des matrices) munit $O(n)$ d'une structure de groupe. Le sous-groupe de ce groupe constitué des matrices à déterminant $+1$ est désigné par $SO(n)$. Les ensembles $SO(n)$ et $O(n) \setminus SO(n)$ sont ouverts dans $O(n)$ et sont par conséquent des $\mathscr{C}^a$-variétés. Elles sont $\mathscr{C}^a$-difféomorphes: on établit le difféomorphisme en multipliant par une matrice quelconque de $O(n) \setminus SO(n)$. D'autre part, la variété $SO(n)$ est canoniquement $\mathscr{C}^a$-difféomorphe à $V(n, n-1)$: le difféomorphisme ajoute à toute matrice de $V(n, n-1)$ la colonne qui la transforme en une matrice de $SO(n)$, i.e. construit à partir d'un $(n-1)$-repère orthonormé de l'espace R^n un n-repère orthonormé positif.

Remarquons que $SO(2) = V(2, 1) = S^1$ et que la structure de groupe de $SO(2)$ coïncide avec la structure de groupe sur le cercle S^1 envisagé comme groupe multiplicatif des nombres complexes unimodulaires.

3. L'inclusion $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^{n+q}$ détermine un $\mathscr{C}^a$-plongement $V(n, k) \to V(n+q, k)$ qui associe à une application $\varphi : \mathsf{R}^k \to \mathsf{R}^n$ la composée des applications $\mathsf{R}^k \xrightarrow{\varphi} \mathsf{R}^n \xrightarrow{\text{in}} \mathsf{R}^{n+q}$. Il existe également un $\mathscr{C}^a$-plongement canonique $V(n, k) \to V(n+q, k+q)$ qui associe à l'application $\varphi : \mathsf{R}^k \to \mathsf{R}^n$ l'application

$$\mathsf{R}^{k+q} = \mathsf{R}^k \times \mathsf{R}^q \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{id}} \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^q = \mathsf{R}^{n+q}.$$

Enfin, l'inclusion $\mathsf{R}^{k-q} \to \mathsf{R}^k$ détermine une $\mathscr{C}^a$-submersion $V(n, k) \to V(n, k-q)$ qui associe à l'application $\varphi : \mathsf{R}^k \to \mathsf{R}^n$ la composée des applications $\mathsf{R}^{k-q} \xrightarrow{\text{in}} \mathsf{R}^k \xrightarrow{\varphi} \mathsf{R}^n$, i.e. applique le repère $(v_1, \ldots, v_k)$ sur le repère $(v_1, \ldots, v_{k-q})$. Le fait que c'est effecti-

vement une submersion se déduit sans difficulté du théorème 1.5.9 en indiquant explicitement comme le nécessite le théorème, pour le repère donné $(v_1^0, \ldots, v_k^0) \in V(n, k)$, un voisinage V du repère $(v_1^0, \ldots, v_{k-q}^0)$ dans $V(n, k-q)$ et une $\mathscr{C}^a$-application $g: V \to V(n, k)$. On peut prendre en guise de V l'ensemble des repères $(v_1, \ldots, v_{k-q})$ de $V(n, k-q)$ tels que les vecteurs $v_1, \ldots, v_{k-q}, v_{k-q+1}^0, \ldots, v_k^0$ sont linéairement indépendants, et en guise de $g(v_1, \ldots, v_{k-q})$ pour $(v_1, \ldots, v_{k-q}) \in V$ le repère obtenu du repère $(v_1, \ldots, v_{k-q}, v_{k-q+1}^0, \ldots, v_k^0)$ par l'orthogonalisation usuelle.

Ajoutons que la sous-variété de la variété $V(n, k)$ qui est l'image inverse d'un repère arbitraire $(v_1^0, \ldots, v_{k-q}^0) \in V(n, k-q)$ par cette submersion, est constituée de tous les repères de la forme $(v_1^0, \ldots, v_{k-q}^0, v_{k-q+1}, \ldots, v_k)$, où $(v_{k-q+1}, \ldots, v_k)$ est un q-repère orthonormé du sous-espace de dimension $(n-k+q)$ de l'espace R^n, orthogonal aux vecteurs $v_1^0, \ldots, v_{k-q}^0$; en particulier, elle est difféomorphe à $V(n-k+q, q)$.

4. On voit des équations (1) que l'ensemble $V(n, k)$ est borné et fermé dans R^{nk}. Ainsi les variétés $V(n, k)$ sont compactes.

La variété $V(n, n-1) = SO(n)$ est connexe: toute matrice de $SO(n)$ se met sous la forme $cu(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)c^{-1}$, où

$$u(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & & & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos\varphi_r & -\sin\varphi_r & & \\ & & & \sin\varphi_r & \cos\varphi_r & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(avec $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathsf{R}$) tandis que c est une matrice orthogonale et grâce à ce fait elle peut être jointe à la matrice unité comme suit:

$$t \mapsto cu((1-t)\varphi_1, \ldots, (1-t)\varphi_r)c^{-1}.$$

Etant les images continues de la variété $V(n, n-1)$ pour $k < n-1$ (voir *3*), les variétés $V(n, k)$ sont également connexes. La variété $V(n, n) = O(n)$ pour $n > 0$ est constituée de deux composantes: $SO(n)$ et $O(n) \setminus SO(n)$.

Le cas complexe

5. Nous désignerons par $\mathsf{C}V(n, k)$, où $0 \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble des applications linéaires isométriques de l'espace C^k dans C^n ou, ce qui revient au même, l'ensemble des k-repères orthonormés de l'espace C^n ou, ce qui revient toujours au même, l'ensemble des

$(n \times k)$-matrices $\| v_{si} \|$ telles que

$$\sum_{s=1}^{n} v_{si}\bar{v}_{sj} = \delta_{ij} \qquad (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k).$$

Ces équations déterminent $\mathbf{C}V(n, k)$ comme un sous-espace de l'espace $\mathbf{C}^{nk} = \mathbf{R}^{2nk}$. En le décomposant en ses parties réelle et imaginaire, nous obtenons k^2 équations réelles dont les gradients des premiers membres ne sont pas nuls et sont deux à deux orthogonaux dans $\mathbf{C}V(n, k)$. Ainsi $\mathbf{C}V(n, k)$ est une $\mathscr{C}^a$-sous-variété sans bord de dimension $2nk - k^2$ de l'espace $\mathbf{R}^{2nk}$. On l'appelle *variété complexe de Stiefel.*

Mise en garde : la variété $\mathbf{C}V(n, k)$ n'est pas une variété complexe dans le sens de 1.6.5. La définition précédente ne la munit pas d'une structure complexe et, en fait, on ne peut pas la munir d'une telle structure dans le cas général, car pour k impair elle est de dimension impaire.

Il est évident que $\mathbf{C}V(n, 0)$ est un point, $\mathbf{C}V(n, 1)$ est la sphère S^{2n-1}. Les points de la variété $\mathbf{C}V(n, n)$ sont les transformations unitaires de l'espace $\mathbf{C}^n$, et cette variété est généralement désignée par $U(n)$. De même que $O(n)$, $U(n)$ est un groupe pour l'opération $\circ$. Le sous-groupe de ce groupe constitué des matrices à déterminant 1 se désigne par $SU(n)$; c'est une $\mathscr{C}^a$-sous-variété de la variété $U(n)$ canoniquement difféomorphe à $\mathbf{C}V(n, n-1)$ (voir *2*).

La variété $U(n)$ est canoniquement difféomorphe à $SU(n) \times S^1$: le difféomorphisme fait correspondre au couple $(u, z) \in SU(n) \times S^1$ la matrice en laquelle se transforme la matrice u si l'on multiplie les éléments de sa première ligne par z. Mise en garde : ce difféomorphisme n'est pas un isomorphisme de groupe entre le produit direct des groupes $SU(n)$, S^1 et le groupe $U(n)$.

De même que dans le cas réel, on définit les $\mathscr{C}^a$-plongements $\mathbf{C}V(n, k) \to \mathbf{C}V(n+q, k)$, $\mathbf{C}V(n, k) \to \mathbf{C}V(n+q, k+q)$ et la $\mathscr{C}^a$-submersion $\mathbf{C}V(n, k) \to \mathbf{C}V(n, k-q)$. En outre, le fait que les applications linéaires isométriques de l'espace $\mathbf{C}^k$ dans $\mathbf{C}^n$ peuvent être envisagées comme les applications linéaires isométriques de l'espace $\mathbf{R}^{2k}$ dans $\mathbf{R}^{2n}$ permet de définir un $\mathscr{C}^a$-plongement $\mathbf{C}V(n, k) \to \mathbf{R}V(2n, 2k)$.

Les variétés $\mathbf{C}V(n, k)$ sont compactes. Elles sont toutes connexes : la variété $\mathbf{C}V(n, n) = U(n)$ est connexe puisque toute matrice unitaire se met sous la forme $cu(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)c^{-1}$, où $u(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une matrice diagonale à éléments diagonaux $e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}$ $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbf{R})$, et c, une matrice unitaire qui peut donc être jointe à la matrice unité par le chemin

$$t \mapsto cu((1-t)\varphi_1, \ldots, (1-t)\varphi_n)c^{-1};$$

les variétés $\mathbf{C}V(n, k)$ pour $k < n$ sont connexes, étant les images continues de la variété $\mathbf{C}V(n, n)$.

Le cas des quaternions

6. On peut répéter presque mot pour mot ce qui a été dit dans *5* en remplaçant le corps des nombres complexes par le corps non commutatif des quaternions. (Rappelons que H^n est considéré comme un espace vectoriel à gauche (voir 1.2.5.4) ; ainsi une application linéaire $\mathsf{H}^k \to \mathsf{H}^n$ sera définie comme une application linéaire à gauche et le produit scalaire des vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ se définit par la formule $\sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$.) On obtient ainsi une $\mathscr{C}^a$-variété $\mathsf{H}V(n, k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, sans bord de dimension $4nk - (2k^2 - k)$, appelée *variété quaternionique de Stiefel* ; des $\mathscr{C}^a$-plongements $\mathsf{H}V(n, k) \to \mathsf{H}V(n+q, k)$, $\mathsf{H}V(n, k) \to \mathsf{H}V(n+q, k+q)$ et $\mathsf{H}V(n, k) \to \mathsf{C}V(2n, 2k)$ et une $\mathscr{C}^a$-submersion $\mathsf{H}V(n, k) \to \mathsf{H}V(n, k-q)$.

Il est évident que $\mathsf{H}V(n, 0)$ est un point, tandis que $\mathsf{H}^n(n, 1)$ est la sphère S^{4n-1}. La variété $\mathsf{H}V(n, n)$ est généralement désignée par $Sp(n)$; ses points sont les transformations isométriques linéaires de l'espace H^n et la composition des transformations munit $Sp(n)$ d'une structure de groupe.

Toutes les variétés $\mathsf{H}V(n, k)$ sont compactes et connexes. La démonstration de la connexité qui répète ce qui a été dit dans *4* et *5* se base sur la forme normale des matrices de $Sp(n)$, or cette forme n'étant pas aussi universellement connue que la forme normale des matrices de $SO(n)$ ou $U(n)$, au chapitre 5 nous établirons la connexité par une autre méthode (voir 5.2.7.4).

Variétés de Stiefel non compactes

7. Nous désignons par $\mathsf{R}V'(n, k)$, ou plus brièvement par $V'(n, k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble des monomorphismes linéaires $\mathsf{R}^k \to \mathsf{R}^n$ ou, ce qui revient au même, l'ensemble des k-repères non dégénérés de l'espace R^n ou, ce qui revient toujours au même, l'ensemble des $(n \times k)$-matrices réelles de rang k. Il est clair que cet ensemble est ouvert dans l'espace R^{nk} de toutes les $(n \times k)$-matrices réelles. Ainsi $V'(n, k)$ est une $\mathscr{C}^a$-variété de dimension nk contenant $V(n, k)$ en guise de sous-variété.

Désignons par $T(k, \mathsf{R})$, ou plus brièvement par $T(k)$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre k à éléments diagonaux positifs. Il est évident que cet ensemble est ouvert dans l'espace $\mathsf{R}^{k(k+1)/2}$ de toutes les matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre k ; il est difféomorphe à $\mathsf{R}^{k(k+1)/2}$. Si l'on applique à un k-repère non dégénéré de l'espace R^n le procédé usuel d'orthogonalisation, la matrice de ce repère sera mise sous la forme ut, où $u \in V(n, k)$ et $t \in T(k)$; il est clair que cette représentation est unique et détermine un difféomorphisme $V'(n, k) \to V(n, k) \times T(k)$ qui applique $V(n, k)$ dans une fibre de $V(n, k) \times E$, où E est la matrice

unité. Ainsi la variété $V'(n, k)$ est $\mathscr{C}^a$-difféomorphe à $V(n, k) \times \times \mathsf{R}^{k(k+1)/2}$ et $V(n, k)$ est son rétracte de déformation stricte. En particulier, les variétés $V'(n, k)$ avec $k < n$ sont connexes, tandis que $V'(n, n)$ a deux composantes.

$V'(n, 0)$ est évidemment un point, tandis que $V'(n, 1)$ coïncide avec $\mathsf{R}^n \setminus 0$. La variété $V'(n, n)$ est généralement désignée par $GL(n, \mathsf{R})$; ses points sont les transformations linéaires non dégénérées de l'espace R^n ou les matrices non dégénérées d'ordre n et la composition des transformations (la multiplication des matrices) la munit d'une structure de groupe. Le sous-groupe de ce groupe constitué des matrices à déterminant positif est désigné par $GL_+(n, \mathsf{R})$. Les ensembles $GL_+(n, \mathsf{R})$ et $GL(n, \mathsf{R}) \setminus GL_+(n, \mathsf{R})$ sont ouverts dans $GL(n, \mathsf{R})$ et sont $\mathscr{C}^a$-difféomorphes à $SO(n) \times \mathsf{R}^{n(n+1)/2}$; ils sont précisément les composantes de la variété $GL(n, \mathsf{R})$.

Si l'on fait correspondre au monomorphisme $\varphi : \mathsf{R}^k \to \mathsf{R}^n$ les applications composées

$$\mathsf{R}^k \xrightarrow{\varphi} \mathsf{R}^n \xrightarrow{\text{in}} \mathsf{R}^{n+q}, \quad \mathsf{R}^{k+q} \xrightarrow{\text{id}} \mathsf{R}^k \times \mathsf{R}^q \xrightarrow{\varphi \times \text{id}} \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^q \xrightarrow{\text{id}} \mathsf{R}^{n+q}$$

et

$$\mathsf{R}^{k-q} \xrightarrow{\text{in}} \mathsf{R}^k \xrightarrow{\varphi} \mathsf{R}^n,$$

on obtient des $\mathscr{C}^a$-plongements $V'(n, k) \to V'(n+q, k)$, $V'(n, k) \to V'(n+q, k+q)$ et une $\mathscr{C}^a$-submersion $V'(n, k) \to V'(n, k-q)$ (voir *3*).

8. Désignons par $\mathsf{C}V'(n, k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble des monomorphismes linéaires $\mathsf{C}^k \to \mathsf{C}^n$ ou, ce qui revient au même, l'ensemble des k-repères non dégénérés de l'espace C^n ou, ce qui revient toujours au même, l'ensemble des $n \times k$-matrices complexes d'ordre k. Il est clair que cet ensemble est ouvert dans l'espace C^{nk} de toutes les $(n \times k)$-matrices complexes. Ainsi $\mathsf{C}V'(n, k)$ est une $\mathscr{C}^a$-variété de dimension $2nk$ dont $\mathsf{C}V(n, k)$ est une sous-variété.

En répétant ce qui a été dit dans *7* (avec des modifications évidentes) nous obtenons un $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme

$$\mathsf{C}V'(n, k) \to \mathsf{C}V(n, k) \times T(k, \mathsf{C}),$$

où $T(k, \mathsf{C})$ est la variété des matrices triangulaires supérieures complexes d'ordre k à éléments diagonaux positifs. Evidemment $T(k, \mathsf{C})$ est $\mathscr{C}^a$-difféomorphe à R^{k^2} de sorte que $\mathsf{C}V'(n, k)$ est $\mathscr{C}^a$-difféomorphe à $\mathsf{C}V(n, k) \times \mathsf{R}^{k^2}$. En particulier, toutes les variétés $\mathsf{C}V'(n, k)$ sont connexes. $\mathsf{C}V'(n, 0)$ est un point ; $\mathsf{C}V'(n, 1)$ coïncide avec $\mathsf{C}^n \setminus 0$. La variété $\mathsf{C}V'(n, n)$ est généralement désignée par $GL(n, \mathsf{C})$; elle se compose des transformations linéaires non dégénérées de l'espace C^n et possède une structure de groupe pour l'opération $\circ$. On a également des $\mathscr{C}^a$-plongements naturels $\mathsf{C}V'(n, k) \to \mathsf{C}V'(n+q, k)$, $\mathsf{C}V'(n, k) \to \mathsf{C}V'(n+q, k+q)$ et une $\mathscr{C}^a$-submersion naturelle $\mathsf{C}V'(n, k) \to \mathsf{C}V'(n, k-q)$.

9. En remplaçant dans les définitions précédentes les corps R et C par le corps non commutatif H nous obtenons de la même manière une $\mathscr{C}^a$-variété $\mathsf{H}V'(n, k)$ de dimension $4nk$ constituée des monomorphismes linéaires $\mathsf{H}^k \to \mathsf{H}^n$, ainsi qu'un $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme $\mathsf{H}V'(n, k) \to \mathsf{H}V(n, k) \times \mathsf{R}^{2k^2-k}$, des $\mathscr{C}^a$-plongements $\mathsf{H}V'(n, k) \to \mathsf{H}V'(n+q, k)$, $\mathsf{H}V'(n, k) \to \mathsf{H}V'(n+q, k+q)$ et une $\mathscr{C}^a$-submersion $\mathsf{H}V'(n, k) \to \mathsf{H}V'(n, k-q)$. Il est évident que $\mathsf{H}V'(n, 0)$ est un point, tandis que $\mathsf{H}V'(n, 1)$ coïncide avec $\mathsf{H}^n \setminus 0$. La variété $\mathsf{H}V'(n, n)$ se compose des transformations linéaires non dégénérées de l'espace H^n, c'est un groupe (pour l'opération $\circ$) que l'on désigne généralement par $GL(n, \mathsf{H})$.

2. Variétés de Grassmann

1. Nous désignerons par $\mathsf{R}\,G(n, k)$, ou plus brièvement par $G(n, k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble des plans de dimension k de l'espace R^n qui passent par 0. Soit γ un tel plan, U_γ désignera l'ensemble des plans de $G(n, k)$ dont les projections sur γ ne sont pas dégénérées. Fixons dans γ une base orthonormée $e = \{e_1, \ldots, e_k\}$ que nous pouvons compléter par le repère $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k}\}$ de manière à obtenir une base orthonormée de l'espace R^n. Si $\gamma' \in U_\gamma$, alors γ' possède un repère unique $u_1, \ldots, u_k$ qui se projette dans e; en le décomposant par rapport aux vecteurs $e_1, \ldots, e_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k}$ nous obtiendrons

$$u_i = e_i + \sum_{s=1}^{n-k} c_{is}\varepsilon_s \qquad (i = 1, \ldots, k;\ c_{is} \in \mathsf{R}).$$

Ceci définit une certaine application $\varphi(e, \varepsilon)$ de l'ensemble U_γ dans l'espace $\mathsf{R}^{k(n-k)}$ des $k \times (n-k)$-matrices réelles; il est clair que cette application est bijective et que les applications $\varphi(e, \varepsilon)$, pour tous les e et ε possibles, constituent un $\mathscr{C}^a$-atlas de l'ensemble $G(n, k)$. Comme évidemment deux plans quelconques de $G(n, k)$ sont contenus dans U_γ, la topologie définie par l'atlas $\{\varphi(e, \varepsilon)\}$ est une topologie de Hausdorff. Comme en outre cet atlas possède des sous-atlas finis, par exemple le sous-atlas constitué des cartes $\varphi(e, \varepsilon)$ dont les repères e, ε sont des sous-repères du repère standard $\mathrm{ort}_1, \ldots, \mathrm{ort}_n$ de l'espace R^n, la topologie indiquée est à base dénombrable. Ainsi, l'atlas $\{\varphi(e, \varepsilon)\}$ transforme $G(n, k)$ en une $\mathscr{C}^a$-variété de dimension $k(n-k)$. On l'appelle *variété de Grassmann.*

Il est évident que $G(n, 0)$ et $G(n, n)$ sont des points, tandis que $G(n, 1)$ s'identifie, en tant qu'ensemble et en tant qu'espace topologique, avec $\mathsf{R}P^{n-1}$. Ceci veut dire que nous avons muni l'espace $\mathsf{R}P^{n-1}$ d'une $\mathscr{C}^a$-structure compatible avec sa topologie, qui en fait une $\mathscr{C}^a$-variété de dimension $n-1$. Remarquons que cette $\mathscr{C}^a$-structure admet une description très commode en coordonnées homo-

gènes : l'atlas fini indiqué ci-dessus de la variété $G(n, k)$ est constitué, pour $k = 1$, de n cartes $\varphi_1 : U_1 \to \mathbf{R}^{n-1}, \ldots, \varphi_n : U_n \to \mathbf{R}^{n-1}$ définies en coordonnées homogènes par les formules

$$U_i = \{(x_1 : \ldots : x_n) \mid x_i \neq 0\},$$

$$\varphi_1((x_1 : \ldots : x_n)) = (x_1/x_i, \ldots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \ldots, x_n/x_i).$$

Il est clair également que cette $\mathscr{C}^a$-structure fait de l'homéomorphisme canonique $\mathbf{R}P^1 \to S^1$ (voir 1.2.5.6) un $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme.

2. La définition de la variété $G(n, k)$ admet une modification évidente qui consiste à remplacer les plans non orientés par des plans orientés. En plus de détail : l'ensemble $G(n, k)$ est remplacé par l'ensemble $G_+(n, k)$ de tous les plans orientés de dimension k de l'espace $\mathbf{R}^n$ passant par le point 0 ; l'ensemble modifié U_γ se définit comme celui des plans de $G_+(n, k)$ qui se projettent sur le plan $\gamma \in G_+(n, k)$ bijectivement en conservant l'orientation ; les applications $\varphi(e, \varepsilon) : U_\gamma \to \mathbf{R}^{k(n-k)}$ se définissent de même que dans *1* et constituent un $\mathscr{C}^a$-atlas qui possède des sous-atlas finis ; le fait que la topologie définie par l'atlas $\{\varphi(e, \varepsilon)\}$ est une topologie de Hausdorff découle du fait que deux points quelconques de l'ensemble $G_+(n, k)$ sont contenus dans un ensemble de la forme $U_\gamma \cup U_{\bar{\gamma}}$, où $\bar{\gamma}$ est un plan qui diffère de γ seulement par son orientation (évidemment $U_\gamma \cap U_{\bar{\gamma}} = \varnothing$). La $\mathscr{C}^a$-variété de dimension $k(n-k)$ ainsi obtenue s'appelle *variété de Grassmann supérieure.*

Les variétés $G_+(n, 0)$ et $G_+(n, n)$ sont canoniquement homéomorphes à la sphère S^0, tandis que la variété $G_+(n, 1)$ est canoniquement difféomorphe à la sphère S^{n-1} : le difféomorphisme applique le point $x \in S^{n-1}$ sur la droite orientée définie par le couple de points 0, x.

3. Si l'on fait correspondre à chaque plan $\gamma \in G(n, k)$ son complémentaire orthogonal $\gamma^\perp$, on obtient une application de la variété $G(n, k)$ sur $G(n, n-k)$ qui sera évidemment un $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme. De la même manière, on définit le $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme $G_+(n, k) \to G_+(n, n-k)$: l'orientation du complémentaire orthogonal $\gamma^\perp$ du plan γ se définit par l'orientation du plan γ suivant la règle classique selon laquelle il faut écrire une base du plan $\gamma^\perp$ qui engendre son orientation à droite d'une base du plan γ qui détermine l'orientation de celui-ci pour obtenir une base de l'espace $\mathbf{R}^n$ déterminant son orientation canonique (voir 1.3.10). En particulier, $G(n, n-1) = \mathbf{R}P^{n-1}$ et $G_+(n, n-1) = S^{n-1}$.

L'inclusion $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+q}$ engendre les $\mathscr{C}^a$-plongements $G(n, k) \to G(n+q, k)$ et $G_+(n, k) \to G_+(n+q, k)$. En outre, la formule $\gamma \mapsto \gamma \times \mathbf{R}^q$ définit les $\mathscr{C}^a$-plongements $G(n, k) \to G(n+q, k+q)$ et $G_+(n, k) \to G_+(n+q, k+q)$ (l'orientation du produit $\gamma \times \mathbf{R}^q$ est donnée par celles des facteurs, voir 1.3.7). Ces plongements forment avec les difféomorphismes précédents les diagrammes

commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} G(n, k) & \to & G(n+q, k) & G_+(n, k) & \to & G_+(n+q, k) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ G(n, n-k) & \to & G(n+q, n-k+q), & G_+(n, n-k) & \to & G_+(n+q, n-k+q). \end{array}$$

Si l'on fait correspondre à chaque plan orienté ce même plan démuni d'orientation, on obtient une application $G_+(n, k) \to G(n, k)$ qui est évidemment une $\mathscr{C}^a$-submersion. L'image inverse d'un point de la variété $G(n, k)$ par cette submersion est constituée de deux points. Pour $k = 1$, elle coïncide avec la projection $S^{n-1} \to \mathsf{R}P^{n-1}$.

Si l'on fait correspondre à chaque repère de $V(n, k)$ le plan orienté qu'il détermine, on obtient la $\mathscr{C}^a$-application $V(n, k) \to G_+(n, k)$ qui est également une submersion, ce qu'on déduit facilement du théorème 1.5.9 : il suffit d'indiquer explicitement, pour un repère donné $v^0 \in V(n, k)$, un voisinage V du plan orienté γ^0 engendré par v^0, ainsi qu'une application $g : V \to V(n, k)$; en guise de V on peut prendre U_{γ^0} (voir *3*) et en guise de $g(\gamma)$ pour $\gamma \in V$, le repère en lequel se transforme v^0 par projection orthogonale sur γ suivie de l'orthogonalisation usuelle. L'image inverse du plan orienté $\gamma \in G_+(n, k)$ par cette submersion se compose de tous les k-repères orthonormés positifs du plan γ ; en particulier, elle est difféomorphe à $SO(k)$.

L'application de la variété $V(n, k)$ sur $G(n, k)$ qui fait correspondre à tout repère le plan non orienté qu'il engendre est également une submersion. Cette submersion coïncide avec la composée des deux précédentes. L'image inverse du plan $\gamma \in G(n, k)$ par cette submersion se compose de tous les repères orthonormés du plan γ ; en particulier, elle est difféomorphe à $O(k)$.

Enfin, les applications $V'(n, k) \to G_+(n, k)$ et $V'(n, k) \to G(n, k)$ qui font correspondre à chaque repère respectivement le plan orienté et le plan non orienté qu'il engendre sont des submersions. Les images inverses des points de $G_+(n, k)$ et $G(n, k)$ par ses applications sont difféomorphes respectivement à $GL_+(k, \mathsf{R})$ et $GL(k, \mathsf{R})$.

4. Étant des images continues de la variété $V(n, k)$, les variétés $G(n, k)$ et $G_+(n, k)$ sont compactes et, à l'exclusion de $G_+(n, 0)$ et $G_+(n, n)$, connexes.

Parmi les variétés $G(n, k)$ (pour $k \neq 0, n$) certaines sont orientables, d'autres ne le sont pas : *la variété $G(n, k)$ pour $k \neq 0$ est orientable si n est pair et non orientable si n est impair.* Pour la démonstration, nous nous servirons de l'atlas constitué des cartes $\varphi(e, \varepsilon)$ pour lesquelles e et ε sont des sous-repères complémentaires l'un de l'autre de la base standard de l'espace R^n avec l'ordre de vecteurs hérité de cette base (cf. *1*). Numérotons les vecteurs du repè-

re e dans cette base par

$$j_1(e), \ldots, j_k(e) \qquad [1 \leqslant j_1(e) < \ldots < j_k(e) \leqslant n]$$

et appelons deux cartes, $\varphi(e, \varepsilon)$ et $\varphi(e', \varepsilon')$, *adjacentes* s'il existe un l tel que $j_l(e') = j_l(e) \pm 1$ et $j_p(e') = j_p(e)$ pour $p \neq l$. Il est clair que pour $k \neq 0, n$, des cartes adjacentes existent toujours et que deux cartes d'un atlas peuvent toujours être jointes par une chaîne finie de cartes de l'atlas dans laquelle deux cartes voisines quelconques sont adjacentes. Il est également clair que si c_{is} et c'_{is} sont les fonctions coordonnées des cartes adjacentes $\varphi(e, \varepsilon)$ et $\varphi(e', \varepsilon')$ pour $j_l(e') = j_l(e) + 1$, la coordonnée c_{lm} pour $m = j_l - l + 1$ ne s'annule pas aux points recouverts par les deux cartes et prend sur l'ensemble de tous ces points toutes les autres valeurs réelles. Un calcul très simple montre que

$$c'_{is} = \begin{cases} (c_{is}c_{lm} - c_{im}c_{ls})\, c_{lm}^{-1} & \text{si } i \neq l, \quad s \neq m, \\ c_{ls}c_{lm}^{-1} & \text{si } i = l, \quad s \neq m, \\ -c_{im}c_{lm}^{-1} & \text{si } i \neq l, \quad s = m, \\ -c_{lm}^{-1} & \text{si } i = l, \quad s = m, \end{cases}$$

de sorte que le jacobien $J(\varphi(e, \varepsilon), \varphi(e', \varepsilon'))$ (1.3.1) est égal à $(-1)^n c_{lm}^{-n}$. Pour n impair il prend, aux points recouverts par les deux cartes, des valeurs positives aussi bien que négatives, d'où l'on peut déjà tirer que si n est impair, la variété $G(n, k)$ est non orientable. Dans le cas où n est pair, la formule

$$\varphi(e, \varepsilon) \mapsto (-1)^{k[j_1(e) + \cdots + j_k(e)]}$$

détermine une application de l'atlas considéré dans S^0 qui vérifie la condition de compatibilité indiquée dans 1.3.1 : pour des cartes adjacentes ceci est évident, pour des cartes non adjacentes ceci découle de la compatibilité des cartes adjacentes. Ainsi pour n pair la variété $G(n, k)$ est orientable.

5. Les constructions ci-dessous déterminent des $\mathscr{C}^a$-plongements des variétés $G(n, k)$ et $G_+(n, k)$ dans les espaces euclidiens (voir également 4.8).

Commençons par $G_+(n, k)$. Pour toute matrice $v \in V'(n, k)$ désignons par $M_{i_1 \ldots i_k}(v)$ le plus grand mineur constitué des lignes de numéros $i_1, \ldots, i_k$ et posons

$$N_{i_1 \ldots i_k}(v) = M_{i_1 \ldots i_k}(v)/\mu(v),$$

où $\mu(v)$ est la racine carrée positive de la somme des carrés de tous les mineurs supérieurs. Les fonctions $N_{i_1 \ldots i_k} : V'(n, k) \to \mathsf{R}$ sont évidemment analytiques et, si les repères $v^1, v^2 \in V^1(n, k)$ sont contenus dans un même plan de dimension k qu'ils munissent de la

même orientation, alors

$$N_{i_1 \ldots i_k}(v^1) = N_{i_1 \ldots i_k}(v^2).$$

Par conséquent, l'application $N : V'(n, k) \to \mathsf{R}^{C_n^k}$ avec les fonctions coordonnées $N_{i_1 \ldots i_k}$ se représente comme la composée de la submersion canonique $V'(n, k) \to G_+(n, k)$ définie dans *3*, et d'une certaine $\mathscr{C}^a$-application $g_+ : G_+(n, k) \to \mathsf{R}^{C_n^k}$ (voir 1.5.10). Nous montrerons que g_+ est un $\mathscr{C}^a$-plongement.

D'après le théorème 1.5.4, il suffit pour cela d'établir que l'application g_+ est injective et que c'est une immersion. L'injectivité de l'application g_+ signifie que si $v^1, v^2 \in V'(n, k)$ et $N(v^1) = N(v^2)$, alors la $(n \times 2k)$-matrice constituée des matrices v^1 et v^2 juxtaposées est de rang k ; cette dernière condition découle du fait que, dans la $(n \times 2k)$-matrice indiquée, chaque $(k+1) \times (k+1)$-mineur avec k colonnes de v^1 et une colonne de v^2 est nul (ce fait s'établit en décomposant le mineur relativement à la colonne appartenant à v^2). Pour démontrer que g_+ est une immersion, il suffit de démontrer que la différentielle $d_{\gamma_0} g_+$ en chaque point $\gamma_0 \in G_+(n, k)$ est de rang $k(n - k)$; on le prouve en montrant que la différentielle $d_{v_0} N$ en chaque point $v_0 \in V'(n, k)$ est d'un rang non inférieur à $k(n - k)$; cette dernière condition sera démontrée si nous établissons que le rang de la différentielle $d_{v_0} M$, où M est l'application de la variété $V'(n, k)$ dans $\mathsf{R}^{C_n^k}$ définie par les fonctions coordonnées $M_{i_1 \ldots i_k}$, est en chaque point $v_0 \in V'(n, k)$ non inférieur à $k(n - k) + 1$. Soit A une sous-matrice $k \times k$ quelconque de la matrice $v \in V'(n, k)$ qui ne s'annule pas pour $v = v_0$; et soit $v_{i_0 j_0}$ un élément de cette matrice dont le complément algébrique, mettons α, est non nul pour $v = v_0$. Marquons les mineurs $M_{i_1 \ldots i_k}$ de la matrice v ayant au moins $k - 1$ lignes communes avec A et considérons la sous-matrice de la matrice de Jacobi de l'application M, composée des dérivées des mineurs marqués, relativement aux éléments de la matrice v qui n'appartiennent pas à A, et relativement à $v_{i_0 j_0}$. On obtient ainsi une matrice carrée d'ordre $k(n - k) + 1$ qui admet au voisinage du point v_0 (pour un numérotage approprié des lignes et des colonnes) la forme suivante

$$\left[\begin{array}{cccc|c} (A^t)^{-1} \det A & 0 & \ldots & 0 & \beta_1 \\ 0 & (A^t)^{-1} \det A & \ldots & 0 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (A^t)^{-1} \det A & \vdots \\ & & & & \beta_{k(n-k)} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{array}\right],$$

où t désigne la transposition. Le déterminant de cette matrice est égal à $\alpha (\det A)^{(n-k)(k-1)}$ et donc différent de zéro.

Si l'on considère maintenant $G(n, k)$, on peut prendre la composée du plongement g_+ et de l'application q: $\mathbf{R}^{C_n^k} \to \mathbf{R}^{C_n^k(C_n^k+1)/2}$ déterminée par la formule

$$q(x_1, \ldots, x_{C_n^k}) =$$
$$= (x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_1x_{C_n^k}, x_2^2, x_2x_3, \ldots, x_2x_{C_n^k}, \ldots, x_{C_n^k-1}x_{C_n^k}, x_{C_n^k}^2).$$

Il est clair que la restriction $q|_{\mathbf{R}^{C_n^k}\setminus 0}$ est une $\mathscr{C}^a$-immersion et que $q(x) = q(y)$ si et seulement si $x = \pm y$. En comparant ceci avec le fait évident que $g_+(\gamma') = -g_+(\gamma)$ si les plans γ, $\gamma' \in G_+(n, k)$ coïncident géométriquement mais possèdent des orientations opposées, nous voyons que $q \circ g_+$ est une $\mathscr{C}^a$-immersion de la variété $G_+(n, k)$ dans $\mathbf{R}^{C_n^k(C_n^k+1)/2}$ et que l'on a $q \circ g_+(\gamma') = q \circ g_+(\gamma)$ si et seulement si γ et γ' coïncident ou diffèrent seulement par leur orientation. Ainsi nous avons défini l'application

$$\text{fact}\,(q \circ g_+)\colon G(n, k) \to \mathbf{R}^{C_n^k(C_n^k+1)/2}$$

et cette application est une $\mathscr{C}^a$-immersion.

6 (Information). Les fonctions coordonnées $g^+_{i_1 \ldots i_k}$ d'une application g_+: $G_+(n, k)\,\mathbf{R}^{C_n^k}$ vérifient les relations

$$g^+_{i_1 \ldots i_k} g^+_{j_1 \ldots j_k} - \sum_{s=1}^{k} g^+_{i_1 \ldots i_{k-1} j_s} g^+_{j_1 \ldots j_{s-1} i_k j_{s+1} \ldots j_k} = 0.$$

Considérées comme des équations relativement aux coordonnées de $\mathbf{R}^{C_n^k}$, ces relations déterminent dans $\mathbf{R}^{C_n^k}$ un sous-ensemble qui coïncide précisément avec $g_+(G_+(n, k))$. Pour plus de détail voir [9].

Les nombres $g^+_{i_1 \ldots i_k}(\gamma)$ sont appelés *coordonnées de Grassmann-Plucker* du plan orienté γ.

Les cas des quaternions et des nombres complexes

7. L'adaptation au cas complexe de la définition de la variété $\mathbf{R}G(n, k)$ se réduit à remplacer les plans de dimension k de l'espace $\mathbf{R}^n$ passant par 0 par les plans de dimension k de l'espace $\mathbf{C}^n$ passant par 0. On définit ainsi une variété complexe $\mathbf{C}G(n, k)$ de dimension $k(n-k)$, appelée *variété complexe de Grassmann*.

Il est évident que $\mathbf{C}G(n, 0)$ et $\mathbf{C}G(n, n)$ sont des points, tandis que $\mathbf{C}G(n, 1)$ coïncide, en tant qu'espace topologique, avec $\mathbf{C}P^{n-1}$. Ce dernier fait signifie que nous avons muni l'espace $\mathbf{C}P^{n-1}$ d'une structure d'espace complexe, en accord avec sa topologie, qui en fait une variété complexe de dimension $n-1$. Cette structure se décrit

en coordonnées homogènes de la même manière que la $\mathscr{C}^a$-structure de la variété $\mathsf{R}P^{n-1}$ et transforme l'homéomorphisme canonique $\mathsf{C}P^1 \to S^2$ (voir 1.2.5.6) en un $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme.

Les applications

$$\mathsf{C}G(n, k) \to \mathsf{C}G(n, n-k), \qquad \mathsf{C}G(n, k) \to \mathsf{C}G(n+q, k),$$
$$\mathsf{C}G(n, k) \to \mathsf{C}G(n+q, k+q), \qquad \mathsf{C}V(n, k) \to \mathsf{C}G(n, k)$$

et

$$\mathsf{C}V'(n, k) \to \mathsf{C}G(n, k)$$

sont des analogues complexes des applications

$$G(n, k) \to G(n, n-k), \qquad G(n, k) \to G(n+q, k),$$
$$G(n, k) \to G(n+q, k+q), \qquad V(n, k) \to G(n, k)$$

et

$$V'(n, k) \to G(n, k)$$

définies dans *3*; la première d'entre elles est une application biholomorphe, la deuxième et la troisième sont des plongements holomorphes, la quatrième et la cinquième sont des $\mathscr{C}^a$-submersions. Indiquons encore les $\mathscr{C}^a$-plongements $\mathsf{C}G(n, k) \to G_+(2n, 2k)$ définis de la manière suivante: lorsqu'on passe de l'espace C^n à R^{2n}, les plans de dimension k deviennent des plans orientés de dimension $2k$.

Etant l'image continue de la variété $\mathsf{C}V(n, k)$, la variété $\mathsf{C}G(n, k)$ est compacte et connexe. Il est clair qu'il existe un plongement analytique de cette variété dans $\mathsf{R}^{C_{2n}^{2k}}$: la composée du plongement $\mathsf{C}G(n, k) \to G_+(2n, 2k)$ que nous venons de décrire et du plongement canonique $G_+(2n, 2k) \to \mathsf{R}^{C_{2n}^{2k}}$ sera un $\mathscr{C}^a$-plongement (voir également 4.8).

8. En remplaçant dans les définitions précédentes les nombres complexes par les quaternions, nous obtenons une $\mathscr{C}^a$-variété compacte connexe de dimension $4k(n-k)$, notée $\mathsf{H}G(n, k)$, que l'on appelle *variété quaternionique de Grassmann*. Pour $k = 0, n$ elle se réduit à un point, pour $k = 1, n-1$ elle coïncide, comme espace topologique, avec l'espace quaternionique projectif $\mathsf{H}P^{n-1}$. Grâce à ce dernier fait, $\mathsf{H}P^{n-1}$ devient une $\mathscr{C}^a$-variété et l'homéomorphisme canonique $\mathsf{H}P^1 \to S^4$ un $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme.

Les analogues quaternioniques des applications indiquées dans *3* et *7* sont des $\mathscr{C}^a$-applications; en particulier, il existe un $\mathscr{C}^a$-plongement canonique $\mathsf{H}G(n, k) \to G_+(4n, 4k)$. En prenant la composée de ce plongement avec le plongement canonique $G_+(4n, 4k) \to \mathsf{R}^{C_{4n}^{4k}}$, nous obtenons un $\mathscr{C}^a$-plongement $\mathsf{H}G(n, k) \to \mathsf{R}^{C_{4n}^{4k}}$ (voir également 4.8).

9. Les applications canoniques

$$S^{2n-1} = \mathbf{C}V(n, 1) \to \mathbf{C}G(n, 1) = \mathbf{C}P^{n-1},$$
$$S^{4n-1} = \mathbf{H}V(n, 1) \to \mathbf{H}G(n, 1) = \mathbf{H}P^{n-1},$$

définies dans *7* et *8*, coïncident évidemment avec les applications de Hopf correspondantes (voir 1.2.5.8). En particulier, ces dernières sont des $\mathscr{C}^a$-submersions, de même que l'application de Hopf $S^{15} \to S^8$ ce qu'on voit directement de la formule qui la détermine.

Plan projectif de Cayley

10. Le plan projectif de Cayley possède également une $\mathscr{C}^a$-structure naturelle qui en fait une $\mathscr{C}^a$-variété. Cette structure peut être décrite de la manière suivante.

En envisageant $\mathbf{R}^{16}$ comme étant $\mathbf{Ca}^2$, et $\mathbf{R}^{17}$ comme étant $\mathbf{Ca}^2 \times \mathbf{R}$, définissons trois applications de la boule D^{16} dans la sphère S^{16} par les formules

$$(y_1, y_2) \mapsto (2\sqrt{1-\rho^2}\, y_1,\ 2\sqrt{1-\rho^2}\, y_2,\ 2\rho^2-1),$$
$$(y_1, y^2) \mapsto (2\bar{y}_1 y_2,\ 2\sqrt{1-\rho^2}\, \bar{y}_1,\ 1-2|y_1|^2),$$
$$(y_1, y_2) \mapsto (2\sqrt{1-\rho^2}\, \bar{y}_2,\ 2\bar{y}_2 y_1,\ 1-2|y_2|^2),$$

où $y_1, y_2 \in \mathbf{Ca}$, tandis que $\rho = \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2}$ (la première application coïncide avec DS, mais ceci ne sera pas employé explicitement). Ensemble, ces formules définissent une certaine application F: $D^{16} \to S^{16} \times S^{16} \times S^{16}$ et une vérification immédiate montre que

$$\operatorname{zer} F = \operatorname{zer}[\operatorname{pr}: D^{16} \to \mathbf{Ca}P^2].$$

Puisque le quotient injectif de l'application F est un plongement topologique de l'espace quotient $D^{16}/\operatorname{zer}(F)$ dans $S^{16} \times S^{16} \times S^{16}$ (voir 1.1.7.10), tandis que cet espace quotient coïncide, d'après l'égalité précédente, avec $D^{16}/\operatorname{zer}(\operatorname{pr}) = \mathbf{Ca}P^2$, nous pouvons identifier $\mathbf{Ca}P^2$ à $F(D^{16})$. Munissons $\mathbf{Ca}P^2$ d'une $\mathscr{C}^a$-structure et montrons que $F(D^{16})$ est une sous-variété du produit $S^{16} \times S^{16} \times S^{16}$ dans le sens de $\mathscr{C}^a$.

Définissons les applications f, g: $S^{16} \setminus \operatorname{ort}_{17} \to S^{16}$ en posant

$$f(u_1, u_2, t) = \left(\frac{u_2\bar{u}_1}{1-t},\ \bar{u}_1,\ \frac{|u_2|^2}{1-t} - t\right),$$
$$g(u_1, u_2, t) = \left(\bar{u}_2,\ \frac{u_1\bar{u}_2}{1-t},\ \frac{|u_1|^2}{1-t} - t\right),\quad u_1, u_2 \in \mathbf{Ca},\ t \in \mathbf{R},$$

et les applications h_1, h_2, h_3: $S^{16} \setminus \operatorname{ort}_{17} \to S^{16} \times S^{16} \times S^{16}$ par les formules

$$h_1(x) = (x, f(x), g(x)),\ h_2(x) = (g(x), x, f(x)),$$
$$h_3(x) = (f(x), g(x), x).$$

f et g étant analytiques, les applications h_1, h_2, h_3 sont les plongements analytiques et une vérification immédiate montre que

$$F(D^{16}) \cap \mathrm{pr}_i^{-1}(S^{16} \setminus \mathrm{ort}_{17}) = h_i(S^{16} \setminus \mathrm{ort}_{17}).$$

Les intersections écrites dans le premier membre sont des sous-variétés du produit $S^{16} \times S^{16} \times S^{16}$ et il ne reste qu'à remarquer que

$$\bigcup_i \mathrm{pr}_i^{-1}(S^{16} \setminus \mathrm{ort}_{17}) = (S^{16} \times S^{16} \times S^{16}) \setminus (\mathrm{ort}_{17}, \mathrm{ort}_{17}, \mathrm{ort}_{17})$$

et que le point $(\mathrm{ort}_{17}, \mathrm{ort}_{17}, \mathrm{ort}_{17})$ n'appartient pas à $F(D^{16})$.

Variétés de Grassmann non compactes

11. L'ensemble de tous les plans de dimension k de l'espace R^n, passant ou non par l'origine, sera désigné par $\mathsf{R}G'(n, k)$ ou plus brièvement par $G'(n, k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Il est évident que pour chaque plan $\gamma' \in G'(n, k)$ il existe dans R^{n+1} un plan unique γ de dimension $(k+1)$ qui passe par 0 et par un plan de dimension k, obtenu de γ' par translation de ort_{n+1}. La formule $\gamma' \mapsto \gamma$ définit donc une application injective de l'ensemble $G'(n, k)$ dans $G(n+1, k+1)$ dont l'image est ouverte. Ceci permet d'envisager $G'(n, k)$ comme un sous-ensemble ouvert de la variété $G(n+1, k+1)$ et, en particulier, transforme $G'(n, k)$ en une $\mathscr{C}^a$-variété de dimension $(k+1) \times \times (n-k)$. Cette dernière est appelée *variété de Grassmann non compacte*.

La variété $G'(n, k)$ possède une application naturelle sur $G(n, k)$: le plan $\gamma' \in G'(n, k)$ est envoyé dans le plan parallèle $\gamma \in G(n, k)$. En vertu du théorème 1.5.9 cette application est une $\mathscr{C}^a$-submersion (on peut prendre pour voisinage V du plan γ dans $G(n, k)$ toute la variété $G(n, k)$, et en guise de g, une application qui fait correspondre à un plan de $G(n, k)$ le plan parallèle qui passe par un point arbitraire fixe du plan γ'). L'image inverse du plan $\gamma \in G(n, k)$ par cette submersion est constituée de tous les plans de dimension k de l'espace R^n parallèles à γ ; elle est canoniquement difféomorphe au complémentaire orthogonal $\gamma^\perp$ du plan γ (par chaque point du plan $\gamma^\perp$ passe un plan unique de dimension k parallèle à γ).

Toutes ces définitions s'étendent facilement au cas des variétés orientées, complexes et quaternioniques.

3. Quelques variétés de Stiefel et de Grassmann de petites dimensions

1. La variété $SO(3)$ est canoniquement $\mathscr{C}^a$-difféomorphe à $\mathsf{R}P^3$.

Pour décrire ce difféomorphisme, désignons par shi l'application de l'espace R^3 dans R^3_1 qui applique (y_1, y_2, y_3) dans $(0, y_1, y_2, y_3)$. Le $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme canonique $\mathsf{R}P^3 \to SO(3)$ fait correspondre à

toute droite de $\mathsf{R}P^3$ qui passe par le point $x \in \mathsf{R}^4 \setminus 0$ la transformation $\varphi\colon \mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^3$ définie par la formule quaternionique

$$\varphi(y) = \mathrm{shi}^{-1}(x\ \mathrm{shi}\ (y)\ x^{-1}).$$

Le difféomorphisme inverse $SO(3) \to \mathsf{R}P^3$ fait correspondre à la transformation $\varphi\colon \mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^3$ la droite constituée des quaternions de la forme

$$q - \mathrm{shi}\ (\varphi\ (\mathrm{ort}_1))\ q\ \mathrm{ort}_2 - \mathrm{shi}\ (\varphi\ (\mathrm{ort}_2))\ q\ \mathrm{ort}_3 - \mathrm{shi}\ (\varphi\ (\mathrm{ort}_3))\ q\ \mathrm{ort}_4,$$

où q est un quaternion quelconque, et ort_2, ort_3, ort_4 sont envisagées comme les unités quaternioniques. Il est immédiat que les quaternions de cette forme remplissent entièrement la droite et que les applications construites $\mathsf{R}P^3 \to SO(3)$, $SO(3) \to \mathsf{R}P^3$ sont inverses l'une de l'autre.

2. La variété $\mathsf{R}V(4, 2)$ *est canoniquement* $\mathscr{C}^a$*-difféomorphe à* $S^3 \times S^2$.

Le $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme canonique $S^3 \times S^2 \to \mathsf{R}V(4, 2)$ applique le couple $(x, y) \in S^3 \times S^2$ dans le repère $\{x, x\ \mathrm{shi}\ (y)\}$.

3. La variété $SO(4)$ *est canoniquement* $\mathscr{C}^a$*-difféomorphe à* $S^3 \times SO(3)$.

Le $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme canonique $S^3 \times SO(3) \to SO(4)$ est donné par la formule quaternionique

$$(x, \{y, z\}) \mapsto \{x, x\ \mathrm{shi}\ (y), x\ \mathrm{shi}\ (z)\}.$$

(dans laquelle les points des variétés $SO(3)$ et $SO(4)$ sont des repères).

4. La variété $G_+(4, 2)$ *est canoniquement* $\mathscr{C}^a$*-difféomorphe à* $S^2 \times S^2$.

Le $\mathscr{C}^a$-difféomorphisme canonique $G_+(4, 2) \to S^2 \times S^2$ fait correspondre au plan orienté engendré par le repère $\{x, y\} \in V(4, 2)$ le couple $(\mathrm{shi}^{-1}(xy^{-1}), \mathrm{shi}^{-1}(x^{-1}y))$. Le difféomorphisme inverse fait correspondre au couple $(u, v) \in S^2 \times S^2$ le plan de dimension deux constitué des quaternions de la forme $\mathrm{shi}\ (u)\ q + q\ \mathrm{shi}\ (v)$, où q est un quaternion quelconque. Il est immédiat que le couple $(\mathrm{shi}^{-1}(xy^{-1}), \mathrm{shi}^{-1}(x^{-1}y))$ se détermine par le plan orienté engendré par le repère $\{x, y\}$, que les quaternions de la forme $\mathrm{shi}\ (u)\ q + q\ \mathrm{shi}\ (v)$ remplissent exactement le plan de dimension deux et que les applications construites $G_+(4, 2) \to S^2 \times S^2$, $S^2 \times S^2 \to G_+(4, 2)$ sont inverses l'une de l'autre.

4. Exercices

1. Un polynôme homogène en $n + 1$ variables à coefficients réels (resp. complexes) est dit *non singulier* si ses dérivées partielles dans $\mathsf{R}^{n+1} \setminus 0$ (resp. dans $\mathsf{C}^{n+1} \setminus 0$) ne s'annulent pas toutes à la fois. Montrer que la projection $\mathsf{R}^{n+1} \setminus 0 \to \mathsf{R}P^n$ (resp. la projection $\mathsf{C}^{n+1} \setminus 0 \to \mathsf{C}P^n$) applique l'ensemble de ses zéros différents de 0

dans une sous-variété de la variété $\mathsf{R}P^n$ (resp. de la variété $\mathsf{C}P^n$).

2. Montrer que la sous-variété du plan projectif $\mathsf{R}P^2$ déterminée par l'équation $p(x_1, x_2, x_3) = 0$, où p est un polynôme homogène non singulier de degré k à coefficients réels, possède un voisinage orientable si et seulement si k est pair (voir *1*).

3. Montrer que la sous-variété du plan projectif $\mathsf{R}P^2$ déterminée par l'équation $p(x_1, x_2, x_3) = 0$, où p est un polynôme homogène non singulier de degré 3 à coefficients réels, est homéomorphe soit à S^1, soit à $S^1 \sqcup S^1$, les deux possibilités étant réalisables.

4. Montrer que l'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ détermine dans $\mathsf{C}P^2$ une sous-variété homéomorphe à S^2.

5. Montrer que l'équation $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ détermine dans $\mathsf{C}P^2$ une sous-variété homéomorphe à $S^1 \times S^1$.

6. Montrer que l'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ détermine dans $\mathsf{C}P^3$ une sous-variété homéomorphe à $S^2 \times S^2$.

7. Montrer que $\mathsf{R}G(n, k)$ admet un $\mathscr{C}^a$-plongement dans $\mathsf{R}P^{C_n^k - 1}$ et $\mathsf{C}G(n, k)$, un plongement holomorphe dans $\mathsf{C}P^{C_n^k - 1}$.

8. Montrer que l'application $\mathsf{R}G(n, k) \to \mathsf{R}^{n^2}$ qui fait correspondre à chaque plan $\gamma \in \mathsf{R}G(n, k)$ la matrice de l'application composée

$$\mathsf{R}^n \xrightarrow{\text{pr}} \gamma \xrightarrow{\text{in}} \mathsf{R}^n,$$

où pr est la projection orthogonale, est un $\mathscr{C}^a$-plongement ; montrer qu'il en est de même pour l'application $\mathsf{C}G(n, k) \to \mathsf{C}^{n^2}$, qui fait correspondre au plan $\gamma \in \mathsf{C}G(n, k)$ la matrice de l'application composée

$$\mathsf{C}^n \xrightarrow{\text{pr}} \gamma \xrightarrow{\text{in}} \mathsf{C}^n.$$

9. Montrer que la variété $\mathsf{R}V(8, k)$ est $\mathscr{C}^a$-difféomorphe à $S^7 \times \mathsf{R}V(7, k-1)$ $[1 \leqslant k \leqslant 8]$, tandis que la variété $\mathsf{C}V(4, k)$ est $\mathscr{C}^a$-difféomorphe à $S^7 \times \mathsf{C}V(3, k-1)$ $[1 \leqslant k \leqslant 4]$.

§ 3. DIGRESSION : TROIS THÉORÈMES D'ANALYSE

1. Approximation des fonctions par des polynômes

1. Le but du présent paragraphe est d'énoncer et de démontrer trois théorèmes d'Analyse, à savoir les théorèmes *4*, 2.3 et 3.3. De caractère différent, ils sont rassemblés ici parce que tous les trois nous seront nécessaires dans ce chapitre, et aucun d'entre eux n'est généralement énoncé dans les cours traditionnels d'Analyse.

Le théorème principal du présent sous-paragraphe, i.e. le théorème *4*, se déduit du lemme *3*. Le lemme *2* est nécessaire pour la démonstration du lemme *3*.

2 (Lemme). *Quel que soit* $\delta < 1$ *positif, on a*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{a_k} \int_{-\delta}^{\delta} (1 - t^2)^k \, dt = 1,$$

où

$$a_k = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^k \, dt. \tag{1}$$

Ceci découle des inégalités

$$0 < 1 - \frac{1}{a_k} \int_{-\delta}^{\delta} (1-t^2)^k \, dt < \frac{2(1-\delta)}{\delta} \left(\frac{1-\delta^2}{1-\frac{\delta^2}{4}} \right)^k$$

dont la première est évidente, la deuxième s'obtient des estimations

$$a_k - \int_{-\delta}^{\delta} (1-t^2)^k \, dt = 2 \int_{\delta}^{1} (1-t^2)^k \, dt < 2(1-\delta)(1-\delta^2)^k,$$

$$a_k > \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1-t^2)^k \, dt > \delta \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)^k.$$

3 (Lemme). *Il existe une suite* $\{p_k : \mathscr{C}(I^n, \mathsf{R}) \to \mathscr{C}(\mathsf{R}^n, \mathsf{R})\}_{k=1}^{\infty}$ *telle que*: (i) $p_k(f)$ *est un polynôme quels que soient* $f \in \mathscr{C}(I^n, \mathsf{R})$ *et* k; (ii) *si* f *s'annule sur* $\mathrm{Fr}\, I^n$, *alors la suite* $\{p_k(f)|_{I^n}\}$ *converge uniformément vers* f; (iii) *si* f *s'annule sur* $\mathrm{Fr}\, I^n$ *et possède une dérivée partielle continue* $D_i f$, *alors*

$$p_k(D_i f) = D_i p_k(f).$$

Démonstration. Pour $f \in \mathscr{C}(I^n, \mathsf{R})$, posons

$$[p_k(f)](x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{a_k^n} \int_{I^n} f(t_1, \ldots, t_n) \prod_{j=1}^{n} [1-(t_j - x_j)^2]^k \, dt_1 \ldots dt_n, \tag{2}$$

où a_k se détermine par la formule (1). Que $p_k(f)$ est un polynôme est évident. Vérifions les conditions (ii), (iii).

Pour vérifier (ii), prolongeons la fonction f à R^n en posant $f(x) = 0$ pour $x \in \mathsf{R}^n \setminus I^n$ et désignons par M la plus grande valeur absolue de la fonction f. Trouvons ensuite, à partir d'un nombre positif arbitraire ε, un nombre positif $\delta < 1$ tel que

$$|f(x_1', \ldots, x_n') - f(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon/2$$

lorsque $|x_1' - x_1| \leqslant \delta, \ldots, |x_n' - x_n| \leqslant \delta$, et puis un K tel que pour $k > K$ on ait

$$1 - \left[\frac{1}{a_k} \int_{-\delta}^{\delta} (1-t^2)^k \, dt \right]^n < \frac{\varepsilon}{4M}$$

(voir 2). Nous montrerons que si $x \in I^n$ et $k > K$, alors $|[p_k(f)] \times \times (x) - f(x)| < \varepsilon$.

Représentons $[p_k(f)](x) - f(x)$ sous la forme

$$\frac{1}{a_k^n} \int_{[-1,1]^n} (f(t_1+x_1, \ldots, t_n+x_n) - \\ - f(x_1, \ldots, x_n)) \prod_{j=1}^{n} (1-t_j^2)^k \, dt_1 \ldots dt_n$$

et remplaçons la fonction sous l'intégrale par sa valeur absolue et décomposons la nouvelle intégrale en deux, calculées l'une sur le cube $[-\delta, \delta]^n$ et l'autre, sur son complémentaire $[-1, 1]^n \setminus [-\delta, \delta]^n$; nous obtenons

$$|[p_k(f)](x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{a_k^n} \int_{[-\delta,\delta]^n} |f(t_1+x_1, \ldots, t_n+x_n) - \\ - f(x_1, \ldots, x_n)| \prod_{j=1}^{n} (1-t_j^2)^k \, dt_1 \ldots dt_n + \\ + \frac{1}{a_k^n} \int_{[-1,1]^n \setminus [-\delta,\delta]^n} |f(t_1+x_1, \ldots, t_n+x_n) - \\ - f(x_1, \ldots, x_n)| \prod_{j=1}^{n} (1-t_j^2)^k \, dt_1 \ldots dt_n.$$

Le premier terme est inférieur à $\varepsilon/2$, puisque

$$|f(t_1 + x_1, \ldots, t_n + x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon/2$$

pour $(t_1, \ldots, t_n) \in [-\delta, \delta]^n$ et

$$\frac{1}{a_k^n} \int_{[-\delta,\delta]^n} \prod_{j=1}^{n} (1-t_j^2)^k \, dt_1 \ldots dt_n = \left[\frac{1}{a_k} \int_{-\delta}^{\delta} (1-t^2)^k \, dt\right]^n < 1.$$

Le deuxième terme est également inférieur à $\varepsilon/2$, puisque

$$|f(t_1 + x_1, \ldots, t_n + x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant 2M$$

et

$$\frac{1}{a_k^n} \int\limits_{[-1,\,1]^n \setminus [-\delta,\,\delta]^n} \prod_{j=1}^{n} (1-t_j^2)^k \, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \frac{1}{a_k^n} \int\limits_{[-1,\,1]^n} \prod_{j=1}^{n} (1-t_j^2)^k \, dt_1 \ldots dt_n -$$

$$- \frac{1}{a_k^n} \int\limits_{[-\delta,\,\delta]^n} \prod_{j=1}^{n} (1-t_j^2)^k \, dt_1 \ldots dt_n = 1 - \left[\frac{1}{a_k} \int\limits_{-\delta}^{\delta} (1-t^2)^k \, dt \right]^n < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Ainsi $| [p_k (f)] (x) - f (x) | < \varepsilon$.

Pour vérifier (iii), remplaçons f par $D_i f$ dans la définition (2) et appliquons au deuxième membre le processus d'intégration par parties relativement à t_i. Nous obtenons

$$[p_k (D_i f)] (x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= - \frac{1}{a_k^n} \int\limits_{I^n} f (t_1, \ldots, t_n) \frac{\partial}{\partial t_i} \prod_{j=1}^{n} [1-(t_j - x_j)^2]^k \, dt_1 \ldots dt_n, \qquad (3)$$

et puisque l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \prod_{j=1}^{n} [1-(t_j - x_j)^2]^k = - \frac{\partial}{\partial x_i} \prod_{j=1}^{n} [1-(t_j - x_j)^2]^k,$$

le deuxième membre de la formule (3) est égal à $[D_i p_k (f)] (x_1, \ldots, x_n)$.

4. Soient X un ensemble compact dans R^n et f une fonction réelle définie et appartenant à la classe $\mathscr{C}^r$ dans un certain voisinage de l'ensemble X. Si $r \leqslant \infty$, alors quels que soient ε positif et un entier $s \leqslant r$, il existe un polynôme $g : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ tel que pour des entiers non négatifs quelconques $s_1, \ldots, s_n$ satisfaisant à $s_1 + \ldots + s_n \leqslant s$,

$$\max_{x \in X} | D_1^{s_1} \ldots D_n^{s_n} g (x) - D_1^{s_1} \ldots D_n^{s_n} f (x) | < \varepsilon.$$

D é m o n s t r a t i o n. On peut évidemment supposer que $X \subset \operatorname{Int} I^n$. Soient U le voisinage de l'ensemble X mentionné dans l'énoncé et $\beta : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ une $\mathscr{C}^r$-fonction quelconque qui s'annule sur D^n et prend la valeur un à l'extérieur d'une boule concentrique de rayon 2. Désignons par $d (y)$ pour $y \in (I^n \setminus U) \cup \operatorname{Fr} I^n$ la boule de rayon $\operatorname{Dist} (y, X)/4$ et de centre y ; recouvrons l'ensemble $(I^n \setminus U) \cup \operatorname{Fr} I^n$ par un nombre fini de boules ouvertes $\operatorname{Int} d (y)$, mettons parmi les boules $\operatorname{Int} d (y_1), \ldots, \operatorname{Int} d (y_s)$; définissons une fonction h :

$I^n \to \mathsf{R}$ par la formule

$$h(y) = \begin{cases} f(y) \prod_{i=1}^{s} \beta(4(y - y_s)/\mathrm{Dist}(y_s, X)) & \text{si } y \in U, \\ 0 & \text{si } y \notin U. \end{cases}$$

Cette fonction appartient à la classe $\mathscr{C}^r$, coïncide avec f sur X et s'annule dans un voisinage de l'ensemble $\mathrm{Fr}\, I^n$, ce qui permet de prendre $p_k(h)$ en guise de g, p_k étant celui du lemme *3* avec un k suffisamment grand.

2. Valeurs spéciales

1. Supposons donnés un sous-ensemble ouvert U de l'espace R^n et une $\mathscr{C}^\infty$-application $f\colon U \to \mathsf{R}^q$ pour $q \geqslant 1$. Soit F la partie de l'ensemble U constituée des points pour lesquels la matrice de Jacobi de l'application f est de rang inférieur à q. Nous nous proposons ici de démontrer le théorème *3*, qui sera nécessaire dans le paragraphe suivant (voir 4.7.4).

Introduisons deux autres notations: nous désignerons par f_j la j-ème fonction coordonnée de l'application f ($j = 1, \ldots, q$), et par F_s l'ensemble des points de U en lesquels toutes les dérivées partielles d'ordre $1, \ldots, s$ des fonctions f_j s'annulent. Il est clair que les ensembles F_s sont fermés dans U et que $F \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$

2 (Lemme). *Si $s > (n/q) - 1$, alors l'image $f(C)$ de toute partie compacte C de l'ensemble F_s est nulle part dense.*

Il suffit de montrer que, pour un cube $Q \in \mathsf{R}^n$ situé dans U, l'ensemble $f(C \cap Q)$ est nulle part dense. En effet, le compact C peut être recouvert par un nombre fini de tels cubes, or la réunion d'un nombre fini d'ensembles nulle part denses est également nulle part dense.

Soit a une arrête du cube Q. Décomposons Q de la manière usuelle en m^n cubes d'arrêtes a/m (m est un nombre entier naturel quelconque) et considérons le petit cube Q' qui coupe C. En vertu du théorème de Taylor appliqué aux fonctions f_j et du fait que sur Q leurs dérivées partielles d'ordre $s + 1$ sont bornées, il existe une constante b telle que pour $x \in F_s \cap Q$, $y \in Q$ arbitraires on a

$$\mathrm{dist}(f(x), f(y)) \leqslant b\,[\mathrm{dist}(x, y)]^{s+1}.$$

Puisque le diamètre du petit cube Q' est égal à $a\sqrt{n}/m$, cette inégalité nous montre que l'ensemble $f(Q')$ est contenu dans une boule de rayon $b(a\sqrt{n}/m)^{s+1}$. Ainsi $f(Q')$ est contenu dans un cube de l'espace R^q d'arrête $2b(a\sqrt{n}/m)^{s+1}$, tandis que $f(C \cap Q)$ est contenu dans la réunion d'au plus m^n tels cubes. Le volume de chacun d'eux est égal à $[2b(a\sqrt{n}/m)^{s+1}]^q$ et la somme de leurs volumes est inférieure ou

égale à

$$m^n [2b (a\sqrt{n}/m)^{s+1}]^q = cm^{n-q(s+1)},$$

où c ne dépend pas de m ; par conséquent elle converge vers zéro pour $m \to \infty$. Ceci signifie que l'ensemble $f(C \cap Q)$ ne peut pas avoir de points intérieurs et comme il est fermé, l'absence de points intérieurs veut dire qu'il est nulle part dense.

3. L'image $f(C)$ d'un compact C d'un ensemble F n'est nulle part dense.

La démonstration s'effectue par récurrence sur n. Puisque pour $n = 0$ il n'y a rien à démontrer, il suffit d'établir que le théorème est vrai pour $n = k + 1$ lorsqu'il est vrai pour $n = k$.

Commençons par un cas particulier. Supposons que $F_1 = \varnothing$. L'ensemble C étant compact, il suffit de trouver pour un point quelconque x de C un voisinage V dans U tel que l'ensemble $f(C \cap V)$ soit nulle part dense. Supposons que $D_{k+1}f_q(x) \neq 0$ (ce que l'on peut toujours admettre ayant numéroté convenablement les coordonnées de R^{k+1} et R^q) et considérons l'application $g: U \to \mathsf{R}^{k+1}$ définie par la formule

$$y = (y_1, \ldots, y_{k+1}) \mapsto (y_1, \ldots, y_k, f_q(y)).$$

Son jacobien ne s'annule pas au point x (il est égal à $D_{k+1}f_q$), de sorte que g, restreinte à un certain voisinage W du point x, est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme qui applique W sur un certain voisinage du point $g(x)$. Il s'avère qu'en guise de V on peut choisir un voisinage quelconque du point x à adhérence compacte contenue dans W. Pour l'établir, désignons par h l'application composée

$$g(W) \xrightarrow{(\mathrm{ab}\, g)^{-1}} W \xrightarrow{\mathrm{ab}\, f} \mathsf{R}^q.$$

Elle applique chaque point de $g(W)$ en un point qui a la même dernière coordonnée et, en particulier, quel que soit u réel, admet une abréviation

$$g(W) \cap [\mathsf{R}^k \times u] \to \mathsf{R}^{q-1} \times u.$$

Après l'identification standard du premier membre avec sa projection orthogonale sur R^k et du deuxième membre avec sa projection orthogonale sur R^{q-1}, cette application devient une $\mathscr{C}^\infty$-application h_u d'un sous-ensemble ouvert de R^k dans R^{q-1}. Il est clair que le jacobien de l'application h_u au point $(y_1, \ldots, y_k)$ peut être obtenu à partir du jacobien de l'application h au point $(y_1, \ldots, y_k, u)$ en éliminant la dernière ligne qui a la forme $0 \ldots 0\ 1$ et la dernière colonne. Par conséquent, le rang de la première matrice est inférieur à $q - 1$ si et seulement si le rang de la deuxième matrice est inférieur à q, i.e. lorsque $(y_1, \ldots, y_k, u) \in g(F \cap W)$. Appliquant l'hypothèse de récurrence aux applications h_u, nous concluons donc que l'intersection de l'ensemble $h(g(C \cap \mathrm{Cl}\, V))$ avec chacun des

hyperplans $\mathsf{R}^{q-1} \times u$ est un ensemble nulle part dense dans cet hyperplan. Mais alors l'ensemble $h\,(g\,(C \cap \mathrm{Cl}\, V))$ ne possède pas de points intérieurs dans R^q; il ne reste qu'à remarquer qu'il est fermé et coïncide avec $f\,(C \cap \mathrm{Cl}\, V)$.

Considérons maintenant un deuxième cas particulier: $C \subset F_s$ et $F_{s+1} = \varnothing$ (pour un certain s). Là encore il suffit de trouver, pour un point quelconque x de C, un voisinage V de U tel que l'ensemble $f\,(C \cap V)$ soit nulle part dense. Soit φ une dérivée d'ordre s d'une des fonctions f_j telle qu'une des dérivées $D_i\varphi$, mettons $D_{k+1}\varphi$, ne s'annule pas au point x. Considérons l'application $g\colon U \to \mathsf{R}^{k+1}$ définie par la formule

$$y = (y_1, \ldots, y_{k+1}) \mapsto (y_1, \ldots, y_k, \varphi\,(y)).$$

Son jacobien ne s'annule pas au point x (il est égal à $D_{k+1}\varphi$), de sorte que g est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme d'un certain voisinage W du point x sur un voisinage du point $g\,(x)$. Nous montrerons, en nous servant de l'application composée

$$g\,(W) \xrightarrow{(\mathrm{ab}\, g)^{-1}} W \xrightarrow{\mathrm{ab}\, f} \mathsf{R}^q \tag{4}$$

qu'en guise de V on peut choisir un voisinage quelconque du point x à adhérence compacte contenue dans W. Remarquons pour cela que $g\,(C) \subset \mathsf{R}^k$ et réduisons l'application (4) jusqu'à une application $h\colon g\,(W) \cap \mathsf{R}^k \to \mathsf{R}^q$. Il est clair que toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à s des fonctions coordonnées de l'application h s'annulent sur $g\,(C \cap W)$. Il en découle, d'après l'hypothèse de récurrence, que les compacts de l'ensemble $g\,(C \cap W)$ ont pour images par l'application h des ensembles nulle part denses; il reste à remarquer que $g\,(C \cap \mathrm{Cl}\, V)$ est un compact de l'ensemble $g\,(C \cap W)$, tandis que $h\,(g\,(C \cap \mathrm{Cl}\, V))$ coïncide avec $f\,(C \cap \mathrm{Cl}\, V)$.

Considérons enfin le cas général. D'après le lemme *2*, l'ensemble $f\,(C \cap F_r)$ est nulle part dense pour un certain r; nous effectuerons la démonstration par récurrence sur r, i.e. nous montrerons que si l'ensemble $f\,(C \cap F_r)$ est nulle part dense, alors pour $r = 1$ l'ensemble $f\,(C)$ est nulle part dense, tandis que pour $r > 1$ l'ensemble $f\,(C \cap F_{r-1})$ est nulle part dense. Soit G un sous-ensemble ouvert non vide de R^q. L'ensemble $C \cap F_r$ étant compact et l'ensemble $f\,(C \cap F_r)$ nulle part dense, $C \cap F_r$ possède dans R^n un voisinage N à adhérence $\mathrm{Cl}\, N$ compacte contenue dans U et tel que l'ensemble $f\,(\mathrm{Cl}\, N)$ ne recouvre pas G. Remplaçons l'application f par sa restriction à $U \setminus F_r$, et l'ensemble C, par l'ensemble

$$C' = \begin{cases} C \setminus N & \text{si } r = 1, \\ (C \setminus F_r) \setminus N & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Ce cas est déjà compris dans la démonstration du premier cas particulier lorsque $r = 1$, et du deuxième cas particulier lorsque $r > 1$,

d'où nous concluons que l'ensemble $f(C')$ ne recouvre pas $G \setminus f(\mathrm{Cl}\, N)$. Par conséquent, pour $r = 1$, l'ensemble $f(C)$ ne recouvre pas G, tandis que pour $r > 1$ l'ensemble $f(C \cap F_{r-1})$ ne recouvre pas G, ce qui termine la démonstration, les ensembles $f(C)$ et $f(C \cap F_{r-1})$ étant fermés.

4 (Information). La condition de $\mathscr{C}^\infty$-différentiabilité de l'application f est trop forte dans le théorème *3* : en fait, la démonstration utilise seulement le fait que f est de classe $\mathscr{C}^r$ où $r = 2 + \max(n - q, 0)$. Une analyse plus détaillée montre que l'on peut faire décroître r encore de 1 (voir par exemple [21]), mais on ne peut pas le diminuer davantage (pour $q = 1$ ceci est démontré dans [23], le cas $q > 1$ se réduit facilement au cas $q = 1$).

3. Points critiques non dégénérés

1. Un point critique y d'une fonction réelle f de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un sous-ensemble ouvert de l'espace R^n est dit *non dégénéré* si, en ce point, sa différentielle seconde (envisagée comme une forme quadratique) est de rang n. L'indice de la différentielle seconde (le nombre des carrés négatifs dans la représentation diagonale de la forme) est appelé *indice du point* y ; on le désigne par $\mathrm{ind}_f\, y$.

Remarquons que si φ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^2$ d'un ouvert U de l'espace R^n sur un autre ouvert de R^n et y un point critique non dégénéré de la fonction $f : U \to \mathsf{R}$, alors $\varphi(y)$ est un point critique non dégénéré de la fonction $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathsf{R}$ et $\mathrm{ind}_{f\circ\varphi^{-1}\varphi}(y) = \mathrm{ind}_f\, y$. Ces deux assertions sont également valables dans le cas plus général lorsque φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et la fonction $f \circ \varphi^{-1}$, de classe $\mathscr{C}^2$.

Considérons la fonction $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ définie par la formule

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 + c, \tag{5}$$

où c est un nombre réel ($0 \leqslant k \leqslant n$). Elle possède un point critique unique, à savoir 0, et il est clair que ce point est un point non dégénéré d'indice k. Le but principal du présent sous-paragraphe est de montrer que dans un système de coordonnées choisi de manière appropriée toute fonction suffisamment lisse se représente, dans le voisinage de tout point critique non dégénéré, sous la forme (5).

2 (Lemme). *Soient V une boule ouverte dans R^n de centre 0 et $f : V \to \mathsf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ avec $f(0) = 0$. Si $r \geqslant 1$, il existe alors des $\mathscr{C}^{r-1}$-fonctions $f_1, \ldots, f_n : V \to \mathsf{R}$ telles que pour chaque point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de V on a*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x). \tag{6}$$

Pour la démonstration, il suffit de poser

$$f_i(x) = \int_0^1 D_i f(tx)\, dt.$$

L'égalité (6) découle de l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx) = \sum_{i=1}^{n} x_i D_i f(tx).$$

3. Soit y un point critique non dégénéré d'une fonction f définie et appartenant à la classe $\mathscr{C}^r$ sur un ouvert de R^n. Si $r \geqslant 3$, il existe un difféomorphisme φ d'un voisinage U du point y sur un voisinage V du point 0 tel que la restriction $f|_U$ se représente comme la composée des applications $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{(5)} \mathsf{R}$ avec $k = \mathrm{ind}_f\, y$ et $c = f(y)$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $y = 0$, $f(y) = 0$. D'après le lemme *2*, dans un certain voisinage du point 0, on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)$$

pour des $\mathscr{C}^{r-1}$-fonctions f_i. Dérivons $f(x)$, il vient: $D_i f(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j D_i f_j(x)$, d'où $f_1(0) = \ldots = f_n(0) = 0$. En appliquant à nouveau le lemme *2*, on trouve que dans un certain voisinage V_0 du point 0

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_{ij}(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

les fonctions f_{ij} étant de classe $\mathscr{C}^{r-2}$, de sorte que pour $x \in V_0$, on a

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, x_i x_j,$$

où $g_{ij}(x) = [f_{ij}(x) + f_{ji}(x)]/2$. Il est évident que $g_{ij}(0) = D_i D_j f(0)/2$.

Les constructions suivantes sont le procédé usuel de réduction d'une forme quadratique à son expression canonique à l'aide de transformations linéaires. Nous construirons pour $p = 0, \ldots, n$ des voisinages V_p, W_p du point 0 dans R^n, des difféomorphismes φ_p: $W_p \to V_p$ de classe $\mathscr{C}^{r-2}$ et des fonctions $g_{ij}^p : V_p \to \mathsf{R}$ de classe $\mathscr{C}^{r-2}$ pour $i, j = p+1, \ldots, n$ tels que:

(i) $W_p \subset V_{p-1}$;
(ii) $\varphi_p(0) = 0$;

(iii) l'application composée

$$V_p \xrightarrow{\varphi_p^{-1}} W_p \xrightarrow{\text{in}} V_{p-1} \xrightarrow{\varphi_{p-1}^{-1}} \ldots \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} W_1 \xrightarrow{\text{in}} V_0 \xrightarrow{\text{ab}\, f} \mathsf{R}$$

se représente sous la forme

$$x \mapsto \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_p^2 + \sum_{i,\, j=p+1}^{n} g_{ij}^p(x)\, x_i x_j; \tag{7}$$

(iv) $g_{ij}^p = g_{ji}^p$.

Ces constructions termineront la démonstration. En guise de V on peut prendre

$$\varphi_1^{-1}(\ldots(\varphi_n^{-1}(V_n))\ldots)$$

et en guise de φ l'application composée

$$V \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi_1} \varphi_1(V) \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi_2} \varphi_2(\varphi_1(V)) \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi_3} \ldots \xrightarrow{\text{ab}\,\varphi_n} V_n \xrightarrow{\text{ab}\,\pi} \pi(V_n),$$

où π est une permutation appropriée des coordonnées standards dans R^n, et enfin, en guise de U on prendra l'ensemble $\varphi^{-1}(V)$.

Nous avons déjà choisi le voisinage V_0. Posons $W_0 = V_0$, $\varphi_0 = \mathrm{id}\, V_0$, $g_{ij}^0 = g_{ij}$ et admettons que V_p, W_p, φ_p et g_{ij}^p vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) pour $p \leqslant q$ sont déjà construits. Il est clair que 0 est un point critique non dégénéré de la fonction (7) avec $p = q$; par conséquent, la matrice $G = \| g_{ij}^q(0) \|_{i,\, j=q+1}^n$ est non dégénérée et il existe une $(n-q) \times (n-q)$-matrice non dégénérée réelle A telle que l'élément supérieur gauche de la matrice $A^t G A$ est non nul. Désignons par l l'application linéaire de l'espace R^n de matrice $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$, où E est la matrice unité de type $q \times q$. La composée du difféomorphisme ab l: $l^{-1}(V_q) \to V_q$ et de la fonction (3) se représente sous la forme

$$x \mapsto \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_q^2 + \sum_{i,\, j=q+1}^{n} h_{ij}(x)\, x_i x_j,$$

avec $h_{ij} = h_{ji}$ et $h_{q+1,\, q+1}(0) \neq 0$; introduisons le sous-ensemble L de l'ensemble $l^{-1}(V_q)$ constitué des points dans lesquels $h_{q+1,\, q+1}$ ne s'annule pas et a le même signe que $h_{q+1,\, q+1}(0)$; déterminons ensuite l'application ψ: $L \to \mathsf{R}^n$ par la formule $\psi(x) = (x_1, \ldots, x_q, \xi \sqrt{|h_{q+1,\, q+1}(x)|}, x_{q+2}, \ldots, x_n)$, où

$$\xi = x_{q+1} + \sum_{s>q+1} x_s \frac{h_{s,\, q+1}(x)}{h_{q+1,\, q+1}(x)}.$$

Des calculs simples montrent que le jacobien de l'application ψ au point 0 n'est pas nul. Par conséquent, l'abréviation de cette application à un certain voisinage M du point 0 avec pour image $\psi(M)$ est un $\mathscr{C}^{r-2}$-difféomorphisme; une vérification directe montre

que les ensembles $V_{q+1} = \psi(M)$ et $W_{q+1} = l(M)$, l'application $\varphi_{q+1}: W_{q+1} \to V_{q+1}$ définie par la formule $\varphi_{q+1}(x) = \psi(l^{-1}(x))$, et les fonctions $g_{ij}^{q+1}: V_{q+1} \to \mathsf{R}$ définies par la formule

$$g_{ij}^{q+1}(x) = h_{ij}(x) - \frac{h_{i,q+1}(x)\, h_{j,q+1}(x)}{h_{q+1,q+1}(x)},$$

possèdent les propriétés (i), (ii), (iii), (iv).

§ 4. PLONGEMENTS. IMMERSIONS. LISSAGES. APPROXIMATIONS

1. Espaces d'applications différentiables

1. Soient X, X' des variétés de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ $(0 \leqslant r \leqslant a)$. Nous désignerons par $\mathscr{C}^r(X, X')$ l'ensemble de toutes les $\mathscr{C}^r$-applications $X \to X'$ que nous munirons pour $r \leqslant \infty$ d'une *$\mathscr{C}^r$-topologie* qui en fait un espace topologique et se définit de la manière suivante. Choisissons des cartes quelconques $\varphi \in \operatorname{Atl} X$, $\varphi' \in \operatorname{Atl} X'$, une suite de nombres entiers non négatifs $r_1, \ldots, r_n$ avec $n = \dim X$ et $r_1 + \ldots + r_n \leqslant r$, un sous-ensemble compact A de l'ensemble $\operatorname{Im} \varphi$ et un sous-ensemble ouvert A' de l'espace $\mathsf{R}^{n'}$ avec $n' = \dim X'$; envisageons le sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{C}^r(X, X')$ constitué des applications f pour lesquelles

$$[D_1^{r_1} \ldots D_n^{r_n} \operatorname{loc}(\varphi, \varphi') f](A) \subset A'.$$

Les sous-ensembles de ce type constituent une prébase de la $\mathscr{C}^r$-topologie dans $\mathscr{C}^r(X, X')$.

Evidemment, $\mathscr{C}^0(X, X') = \mathscr{C}(X, X')$ et la $\mathscr{C}^0$-topologie est simplement la topologie compacte ouverte (voir 1.2.7.1). Il est également clair que pour $s < r$ l'inclusion $\mathscr{C}^r(X, X') \to \mathscr{C}^s(X, X')$ est une application continue. Il découle immédiatement de la définition de la $\mathscr{C}^r$-topologie que tous les espaces $\mathscr{C}^r(X, X')$ sont réguliers. Remarquons également que les ensembles fermés (resp. ouverts) dans $\mathscr{C}^\infty(X, X')$ sont précisément les ensembles fermés (resp. ouverts) relativement à toutes les $\mathscr{C}^r$-topologies pour r fini.

A chaque couple de $\mathscr{C}^r$-applications $f: Y \to X$, $f': X' \to Y'$ correspond une application $\mathscr{C}^r(X, X') \to \mathscr{C}^r(Y, Y')$, définie par la formule $g \mapsto f' \circ g \circ f$ et désignée par $\mathscr{C}^r(f, f')$. Il est clair que $\mathscr{C}^0(f, f') = \mathscr{C}(f, f')$ (voir 1.2.7.1), que $\mathscr{C}^r(f, f') = \operatorname{ab} \mathscr{C}^s(f, f')$ pour $s < r$ et que l'application $\mathscr{C}^r(f, f')$ est continue si $r \leqslant \infty$.

Enumérons certains sous-ensembles de l'ensemble $\mathscr{C}^r(X, X')$ qui vont jouer un rôle important par la suite. Il s'agit des ensembles des $\mathscr{C}^r$-plongements, des $\mathscr{C}^r$-immersions, des $\mathscr{C}^r$-submersions et des $\mathscr{C}^r$-difféomorphismes $X \to X'$, désignés respectivement par $\operatorname{Emb}^r(X, X')$, $\operatorname{Imm}^r(X, X')$, $\operatorname{Subm}^r(X, X')$, $\operatorname{Diff}^r(X, X')$ $(1 \leqslant r \leqslant a)$. Les ensembles des $\mathscr{C}^r$-applications $f: X \to X'$ telles que $f(\partial X) \subset$

$\subset \partial X'$ et $d_x f(\mathrm{Tang}_x X) \not\subset (\mathrm{Tang}_{f(x)}(\partial X')$, si $x \in \partial X$, sont désignés par $\mathscr{C}^r_\partial(X, X')$. A la place de $\mathrm{Diff}^r(X, X)$ on écrit généralement $\mathrm{Diff}^r X$.

Il est évident que pour $1 \leqslant r \leqslant \infty$ l'application de l'espace $\mathscr{C}^r_\partial(X, X')$ dans $\mathscr{C}^r(\partial X, \partial X')$ définie par la formule $f \mapsto \mathrm{ab}\, f$ est continue et que l'application de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ dans $\mathscr{C}^{r-1}(\mathrm{Tang}\, X, \mathrm{Tang}\, X')$ définie par la formule $f \mapsto df$ est un plongement topologique.

2. Si X est compact, alors l'ensemble $\mathrm{Imm}^r(X, X')$ *est ouvert dans* $\mathscr{C}^r(X, X')$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$.

Nous devons indiquer pour chaque $\mathscr{C}^r$-immersion donnée f_0: $X \to X'$ son voisinage dans $\mathscr{C}^r(X, X')$ constitué seulement d'immersions. Fixons pour chaque point $x \in X$ des cartes $\varphi_x \in \mathrm{Atl}_x X$, $\varphi'_x \in \mathrm{Atl}\, X'$ telles que $f_0(\mathrm{supp}\, \varphi_x) \subset \mathrm{supp}\, \varphi'_x$ et $\mathrm{loc}(\varphi_x, \varphi'_x) f$ coïncide avec une des inclusions $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^{n'}$, $\mathsf{R}^n_- \to \mathsf{R}^{n'}$, $\mathsf{R}^n_- \to \mathsf{R}^{n'}_-$ (voir 1.5.3 et 1.5.1; ici $n = \dim X$, $n' = \dim X'$). Recouvrons ensuite X par un nombre fini d'ensembles $U_x = \varphi_x^{-1}(\mathrm{Int}\, D^n)$, mettons par les ensembles $U_{x_1}, \ldots, U_{x_s}$, et désignons par $\mathscr{U}_i$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ constituée des applications f pour lesquelles $f(\mathrm{Cl}\, U_{x_i}) \subset \mathrm{supp}\, \varphi'_{x_i}$, le mineur supérieur de dimension $n \times n$ de la matrice de Jacobi de l'application $\mathrm{loc}(\varphi_{x_i}, \varphi'_{x_i}) f$ ne s'annulant jamais sur D^n. L'intersection $\mathscr{U}_1 \cap \ldots \cap \mathscr{U}_s$ sera justement le voisinage cherché de l'application f_0.

3. Si X est compact et X' sans bord, l'ensemble $\mathrm{Subm}^r(X, X')$ *est ouvert dans* $\mathscr{C}^r(X, X')$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$.

Nous devons indiquer, pour la $\mathscr{C}^r$-submersion f_0: $X \to X'$ donnée, son voisinage dans $\mathscr{C}^r(X, X')$ entièrement constitué de submersions. Fixons pour chaque point $x \in X$ des cartes $\varphi_x \in \mathrm{Atl}_x X$, $\varphi'_x \in \mathrm{Atl}\, X'$ telles que $f_0(\mathrm{supp}\, \varphi_x) \subset \mathrm{supp}\, \varphi'_x$ et $\mathrm{loc}(\varphi_x, \varphi'_x) f_0$ coïncide avec une des projections orthogonales $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^{n'}$, $\mathsf{R}^n_- \to \mathsf{R}^{n'}$ (voir 1.5.7). Recouvrons ensuite X par un nombre fini d'ensembles $U_x = \varphi_x^{-1}(\mathrm{Int}\, D^n)$, mettons par les ensembles $U_{x_1}, \ldots, U_{x_s}$, et désignons par $\mathscr{U}_i$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ constituée par les applications f pour lesquelles $f(\mathrm{Cl}\, U_{x_i}) \subset \mathrm{supp}\, \varphi'_{x_i}$, le mineur gauche de dimension $n' \times n'$ de la matrice de Jacobi de l'application $\mathrm{loc}(\varphi_{x_i}, \varphi'_{x_i}) f$ ne s'annulant jamais sur D^n. L'intersection $\mathscr{U}_1 \cap \ldots \cap \mathscr{U}_s$ sera justement le voisinage cherché de l'application f_0.

4. Si X est compact, alors l'ensemble $\mathrm{Emb}^r(X, X')$ *est ouvert dans* $\mathscr{C}^r(X, X')$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après le théorème *2* et 1.5.4, il suffit d'indiquer, pour le $\mathscr{C}^r$-plongement f_0: $X \to X'$ donné, son voisinage dans $\mathscr{C}^r(X, X')$ constitué entièrement d'applications injectives. Fixons pour chaque point x de X des cartes $\varphi_x \in \mathrm{Atl}_x X$, $\varphi'_x \in \mathrm{Atl}\, X'$ telles que $f_0(\mathrm{supp}\, \varphi_x) \subset \mathrm{supp}\, \varphi'_x$ et $\mathrm{loc}(\varphi_x, \varphi'_x) f_0$ coïncide avec une des inclusions $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^{n'}$, $\mathsf{R}^n_- \to \mathsf{R}^{n'}$, $\mathsf{R}^n_- \to \mathsf{R}^{n'}_-$

(voir 1.5.1). Recouvrons ensuite X par un nombre fini d'ensembles $U_x = \varphi_x^{-1}(\mathrm{Int}\, D^n)$, mettons par les ensembles $U_{x_1}, \ldots, U_{x_s}$, et désignons par $\mathcal{U}_i$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ constituée des applications f telles que $f(\mathrm{Cl}\, U_{x_i}) \subset \mathrm{supp}\, \varphi'_{x_i}$ et tous les mineurs principaux de la matrice de Jacobi supérieure symétrisée de dimension $n \times n$ de l'application $\mathrm{loc}\,(\varphi_{x_i}, \varphi'_{x_i}) f$, calculée aux points de la boule D^n, sont positifs. (Rappelons que les mineurs principaux sont des mineurs supérieurs gauches; la matrice symétrisée est la demi-somme de la matrice donnée avec la matrice transposée.) Enfin, désignons par $\mathcal{U}$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ constituée des applications pour lesquelles les images inverses de chaque point sont contenues dans un des ensembles U_{x_i}. Nous montrerons que l'intersection $\mathscr{V} = \mathcal{U}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{U}_s \cap \mathcal{U}$ est le voisinage cherché de l'application f_0. Puisque l'inclusion $f_0 \in \mathscr{V}$ est évidente, de même que le fait que tous les ensembles $\mathcal{U}_i$ sont ouverts, il suffit de démontrer que : (i) l'ensemble $\mathcal{U}$ est ouvert ; (ii) les applications appartenant à $\mathcal{U}_i$ sont injectives sur U_{x_i}.

Pour démontrer (i), remarquons que $\mathcal{U}$ est l'image inverse de l'ensemble

$$\mathscr{W} = \mathscr{C}(X \times X, (X \times X) \setminus \bigcup_i (U_{x_i} \times U_{x_i});$$
$$X' \times X', (X' \times X') \setminus \mathrm{diag}\,(X'))$$

par l'application continue $\mathscr{C}^r(X, X') \to \mathscr{C}(X \times X, X' \times X')$ définie par la formule $f \mapsto f \times f$. Puisque l'ensemble $(X \times X) \setminus \bigcup_i (U_{x_i} \times U_{x_i})$ est compact, tandis que l'ensemble $(X' \times X') \setminus \mathrm{diag}\,(X')$ est ouvert dans $X' \times X'$ (voir 1.2.2.4), $\mathscr{W}$ est ouvert dans $\mathscr{C}(X \times X, X' \times X')$ et $\mathcal{U}$ est ouvert dans $\mathscr{C}^r(X, X')$.

Pour démontrer (ii) étant donné $f \in \mathcal{U}_i$ et deux points quelconques distincts $y, z \in U_{x_i}$, désignons par s une fonction $I \to \mathsf{R}$ qui fait correspondre à chaque point $t \in I$ le produit scalaire (calculé dans $\mathsf{R}^{n'}$) du vecteur $v = \varphi_{x_i}(z) - \varphi_{x_i}(y)$ par le vecteur

$$[\mathrm{loc}\,(\varphi_{x_i}, \varphi'_{x_i}) f]\,((1-t)\,\varphi_{x_i}(y) + t\varphi_{x_i}(z)) - \mathrm{loc}\,(\varphi_{x_i}, \varphi'_{x_i}) f\,(y).$$

Désignons ensuite par $J(u)$ la partie supérieure symétrisée de dimension $n \times n$ de la matrice de Jacobi de l'application $\mathrm{loc}\,(\varphi_{x_i}, \varphi'_{x_i}) f$ calculée au point $u \in \mathrm{Int}\, D^n$, et par q_t la forme bilinéaire $\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ de la matrice $J((1-t)\,\varphi_{x_i}(y) + t\varphi_{x_i}(z))$. La fonction s est différentiable, sa dérivée au point t est égale à $q_t(v, v)$ et ce nombre (d'après la définition de $\mathcal{U}_i$) est certainement positif. Puisqu'en outre $s(0) = 0$, on a $s(1) > 0$, i. e. $f(y) \neq f(z)$.

5. *Si X est compact, alors l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-plongements $X \to X'$ propres est ouvert dans $\mathscr{C}^r_\partial(X, X')$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$.*

Ceci découle de 4, puisque l'ensemble indiqué coïncide avec $\mathrm{Emb}^r(X, X') \cap \mathscr{C}^r_\partial(X, X')$.

6. *Si X est compact, alors l'ensemble* $\mathrm{Diff}^r(X, X')$ *est ouvert dans* $\mathscr{C}^r_\partial(X, X')$ $[1 \leqslant r \leqslant \infty]$.

Ceci découle de 5 (voir 1.5.1).

2. Théorèmes élémentaires de plongement

1. Une variété compacte de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, admet un $\mathscr{C}^r$-plongement dans un espace euclidien de dimension suffisamment grande.

Démonstration. Soit n la dimension de la variété X qu'il faut plonger et α: $\mathbf{R}^n \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^r$, égale à 1 sur D^n, inférieure à 1 en dehors de D^n et nulle à l'extérieur d'une boule concentrique de rayon 2. Fixons, pour chaque point x de X, une carte $\varphi_x \in \mathrm{Atl}_x X$ avec $\mathrm{Im}\,\varphi_x = \mathbf{R}^n$ ou $\mathrm{Im}\,\varphi_x = \mathbf{R}^n_-$ et $\varphi_x(x) = 0$; définissons l'application j_x: $X \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ par la formule

$$j_x(y) = \begin{cases} (\alpha(\varphi_x(y)), \alpha(\varphi_x(y))\,\varphi_x(y)) & \text{si } y \in \operatorname{supp}\varphi_x, \\ (0, 0) & \text{si } y \in X \setminus \operatorname{supp}\varphi_x. \end{cases}$$

Recouvrons ensuite X par un nombre fini d'ensembles $U_x = \varphi_x^{-1}(\mathrm{Int}\,D^n)$, mettons par les ensembles $U_{x_1}, \ldots, U_{x_s}$, et définissons l'application

$$j\colon X \to (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n) \times \ldots \times (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^{s(n+1)}$$

par la formule $j(y) = (j_{x_1}(y), \ldots, j_{x_s}(y))$. Cette application appartient à la classe $\mathscr{C}^r$; elle est injective puisque l'inclusion $y \in U_{x_i}$ implique $j_{x_i}(y') \neq j_{x_i}(y)$ si $y' \neq y$. (Ce dernier fait découle de ce que $y' \notin U_{x_i}$ implique $\alpha(\varphi_{x_i}(y')) < 1$ alors que $\alpha(\varphi_{x_i}(y)) = 1$, tandis que $y' \in U_{x_i}$ implique $\alpha(\varphi_{x_i}(y'))\,\varphi_{x_i}(y') = \varphi_{x_i}(y') \neq \varphi_{x_i}(y) = \alpha(\varphi_{x_i}(y))\,\varphi_{x_i}(y)$.) En outre, j est une immersion, puisque j_{x_i} est une immersion sur U_{x_i} (la deuxième composante $X \to \mathbf{R}^n$ de l'application j_{x_i} coïncide avec φ_{x_i} sur U_{x_i}). Par conséquent, j est un $\mathscr{C}^r$-plongement (voir 1.5.4).

Complément dans le cas d'un bord non vide

2 (Lemme). *Sur chaque variété compacte X de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, il existe une $\mathscr{C}^r$-fonction réelle h qui s'annule sur ∂X, est positive sur* $\mathrm{int}\,X$ *et ne possède pas de points critiques sur ∂X.*

Démonstration. Soit α: $\mathbf{R}^n \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ avec $n = \dim X$, égale à 1 sur D^n et à 0 à l'extérieur d'une boule concentrique de rayon 2. Fixons pour chaque point $x \in \partial X$ une carte $\varphi_x \in \mathrm{Atl}_x X$ pour laquelle $\mathrm{Im}\,\varphi_x = \mathbf{R}^n_-$ et $\varphi_x(x) = 0$; définissons

les fonctions f_x, g_x: $X \to \mathsf{R}$ par les formules :

$$f_x(y) = \begin{cases} 1 - \alpha(\varphi_x(y)) & \text{si } y \in \operatorname{supp} \varphi_x, \\ 1 & \text{si } y \in X \setminus \operatorname{supp} \varphi_x; \end{cases}$$

$$g_x(y) = \begin{cases} -\beta(\varphi_x(y)) & \text{si } y \in \operatorname{supp} \varphi_x, \\ 0 & \text{si } y \in X \setminus \operatorname{supp} \varphi_x, \end{cases}$$

où β est la fonction sur R^n définie par la formule

$$\beta(t_1, \ldots, t_n) = t_1 \alpha(t_1, \ldots, t_n).$$

En recouvrant ∂X par un nombre fini d'ensembles $U_x = \varphi_x^{-1}(\operatorname{Int} D^n)$, mettons par les ensembles $U_{x_1}, \ldots, U_{x_s}$ et en posant

$$h(y) = \prod_{i=1}^{s} f_{x_i}(y) + \sum_{i=1}^{s} g_{x_i}(y),$$

nous obtiendrons la fonction h: $X \to \mathsf{R}$ cherchée. En effet : h s'annule sur ∂X puisque f_{x_i} s'annule sur U_{x_i} et tous les g_{x_i} s'annulent sur ∂X ; h est positive sur int X puisque toutes les f_{x_i}, g_{x_i} sont non négatives et g_{x_i} est positive sur int X partout où f_{x_i} s'annule ; h ne possède pas de points critiques sur ∂X puisque $\sum g_{x_i}$ n'en possède pas sur ∂X (la représentation locale loc $(\varphi_{x_k}, \mathrm{id}\, \mathsf{R})\, g_{x_i}$ de la fonction g_{x_i}, i. e. la composée $(g_{x_i} \mid_{\operatorname{supp} \varphi_{x_k}}) \circ \varphi_{x_k}^{-1}$, possède une dérivée négative relativement à la première coordonnée sur $D^n \cap \mathsf{R}_1^{n-1}$ pour $k = i$ et non positive sur $D^n \cap \mathsf{R}_1^{n-1}$ quel que soit k), tandis que Πf_{x_i} s'annule sur $\bigcup U_{x_i}$.

3. Toute variété compacte de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ pour $1 \leqslant r \leqslant \infty$ possède un $\mathscr{C}^r$-plongement propre dans un demi-espace euclidien de dimension suffisamment grande.

Un tel plongement dans $\mathsf{R}_-^{q+1} = \mathsf{R}_-^1 \times \mathsf{R}^q$ sera, par exemple, celui déterminé par la formule $x \mapsto (-h(x), j(x))$, où j est un $\mathscr{C}^r$-plongement dans R^q (voir *1*), et h, la fonction de *2*.

4 (Information). Dans les énoncés *1*, *3* la condition de compacité et la condition $r \neq a$ sont superflues : chaque variété différentiable de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$, compacte ou non compacte, pour $r \leqslant \infty$ aussi bien que pour $r = a$, admet un $\mathscr{C}^r$-plongement dans un espace euclidien, et chaque variété différentiable de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ compacte ou non compacte, pour $r \leqslant \infty$ aussi bien que pour $r = a$, admet un $\mathscr{C}^r$-plongement propre dans un demi-espace euclidien. On trouvera les démonstrations dans [22], [8].

Remarquons que le cas $r = a$ est exclu des théorèmes *1*, *3* par suite des complications qu'il entraînerait. Par la suite, cette exclusion influencera plusieurs énoncés : voir par exemple 4.2, 5.3, 6.5, 4.6.2.7.

3. Transversalisations et tubes

1. Dans ce sous-paragraphe, nous étudions la structure des voisinages de l'image d'une variété différentiable fermée par plongement différentiable dans l'espace euclidien. Les résultats sont contenus dans les théorèmes *4*, *5*, *7* et constituent le fondement technique du présent sous-paragraphe.

2. Soit j un plongement différentiable d'une variété différentiable fermée de dimension n dans $\mathbf{R}^q$. On appelle *transversalisation* du plongement j toute application continue τ: $X \to G(q, q-n)$ telle que pour chaque point $x \in X$ le plan $\tau(x)$ est transversal au plan $d_x j(\mathrm{Tang}_x X)$ (i.e. le coupe en un seul point). L'exemple fondamental est la *transversalisation normale* qui applique chaque point $x \in X$ dans le plan normal correspondant (i.e. dans le complémentaire orthogonal du plan $d_x j(\mathrm{Tang}_x X)$ dans $\mathbf{R}^q$); si j est de classe $\mathscr{C}^r$, alors la transversalisation normale appartient évidemment à la classe $\mathscr{C}^{r-1}$ (voir 1.4.2).

On associe de manière naturelle à la transversalisation τ: $X \to G(q, q-n)$ du plongement j: $X \to \mathbf{R}^q$ l'application $\tilde{\tau}$: $X \to G'(q, q-n)$ qui fait correspondre au point x le plan $j(x) + \tau(x)$ (passant par $\tau(x)$ parallèlement à $j(x)$). La boule et la sphère de ce plan de centre $j(x)$ et de rayon ρ sont désignées par $d_\tau(x, \rho)$ et $s_\tau(x, \rho)$. Les réunions $\bigcup_{x \in X} d_\tau(x, \rho)$ et $\bigcup_{x \in X} (d_\tau(x, \rho) \setminus s_\tau(x, \rho))$ sont appelées *tube* et *tube ouvert* de rayon ρ de la transversalisation τ; on les désigne par $\mathrm{Tub}_\tau \rho$ et $\mathrm{tub}_\tau \rho$.

Le tube $\mathrm{Tub}_\tau \rho$ est dit *propre* si pour un certain $\sigma > \rho$: (i) les boules ouvertes $d_\tau(x, \sigma) \setminus s_\tau(x, \sigma)$ sont disjointes deux à deux et le tube ouvert $\mathrm{tub}_\tau \sigma$ qu'elles constituent est un voisinage de l'ensemble $j(X)$ dans $\mathbf{R}^q$; (ii) l'application de ce voisinage sur X qui envoie $d_\tau(x, \sigma) \setminus s_\tau(x, \sigma)$ dans x est différentiable. Les restrictions de cette application à $\mathrm{Tub}_\tau \rho$ et $\mathrm{tub}_\tau \rho$ (qui ne dépendent évidemment pas du choix de σ) sont appelées projections et désignées par pr_τ.

Il est clair que si le tube $\mathrm{Tub}_\tau \rho$ est propre, alors tous les tubes $\mathrm{Tub}_\tau \rho'$ pour $\rho' < \rho$ le sont également.

Mise en garde : la transversalisation normale peut ne pas posséder de tube propre ni même de tube à boules $d_\tau(x, \rho)$ disjointes; voir exercice 11.4.

3. La construction suivante permet de représenter un tube propre comme l'image de son modèle idéal ; nous nous en servirons pour démontrer les théorèmes *4* et *5*. Désignons par Tu_τ le sous-ensemble du produit $X \times \mathbf{R}^q$ constitué des couples (x, t) tels que $t \in \tau(x)$, et par $\mathrm{Tu}_\tau \rho$ et $\mathrm{tu}_\tau \rho$, $\rho > 0$, les parties de l'ensemble Tu_τ avec respectivement $\mathrm{dist}(0, t) \leqslant \rho$ et $\mathrm{dist}(0, t) < \rho$. Désignons, ensuite par nat l'application de l'ensemble Tu_τ dans $\mathbf{R}^q$ définie par la formule $\mathrm{nat}(x, t) = j(x) + t$. Il est évident que nat applique isométriquement chaque plan $x \times \tau(x)$ sur le plan correspondant $j(x) + \tau(x)$

et applique $\mathrm{Tu}_\tau\rho$ exactement sur $\mathrm{Tub}_\tau\rho$, et $\mathrm{tu}_\tau\rho$ sur $\mathrm{tub}_\tau\rho$. Il est également clair que nat est injective sur $\mathrm{Tu}_\tau\rho$ si et seulement si les boules $d_\tau(x, \rho)$ sont deux à deux disjointes, et sur $\mathrm{tu}_\tau\rho$ lorsque les boules ouvertes $d_\tau(x, \rho)\setminus s_\tau(x, \rho)$ sont deux à deux disjointes. Dans le premier cas nat applique la restriction de la projection pr_1: $X \times \mathbf{R}^q \to X$ à $\mathrm{Tu}_\tau\rho$ dans la projection pr_τ: $\mathrm{Tub}_\tau\rho \to X$; dans le deuxième cas elle applique la restriction de la projection pr_1 à $\mathrm{tu}_\tau\rho$ dans la projection pr_τ: $\mathrm{tub}_\tau\rho \to X$.

Nous nous intéresserons seulement aux transversalisations τ différentiables. Si j et τ appartiennent à la classe $\mathscr{C}^r$, $r \geqslant 1$, alors $X \times \mathbf{R}^q$ est une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété, Tu_τ sa sous-variété de dimension q sans bord et nat une application de classe $\mathscr{C}^r$. Dans ce cas $\mathrm{Tu}_\tau\rho$ est une sous-variété compacte de dimension q de la variété Tu_τ avec $\mathrm{int}(\mathrm{Tu}_\tau\rho) = \mathrm{tu}_\tau\rho$, tandis que la restriction de la projection pr_1: $X \times \mathbf{R}^q \to X$ à chacune des variétés Tu_τ, $\mathrm{Tu}_\tau\rho$, $\mathrm{tu}_\tau\rho$ est une $\mathscr{C}^r$-submersion.

4. Supposons que j et τ sont de classe $\mathscr{C}^r$ pour $r \geqslant 1$. Si le tube $\mathrm{Tub}_\tau\rho$ est propre, c'est une $\mathscr{C}^r$-sous-variété de l'espace $\mathbf{R}^q$ avec $\mathrm{int}(\mathrm{Tub}_\tau\rho) = \mathrm{tub}_\tau\rho$, tandis que pr_τ: $\mathrm{Tub}_\tau\rho \to X$ est une $\mathscr{C}^r$-submersion.

Démonstration. Soit σ un nombre supérieur à ρ et vérifiant les conditions (i), (ii) de *2*. D'après *3*, l'application ab nat: $\mathrm{tu}_\tau\sigma \to \mathrm{tub}_\tau\sigma$ est bijective; il est clair que l'application inverse ab nat^{-1}: $\mathrm{tub}_\tau\sigma \to \mathrm{tu}_\tau\sigma$ se décrit par la formule $y \mapsto (\mathrm{pr}_\tau(y), y - j \circ \mathrm{pr}_\tau(y))$. Cette formule nous montre que ab nat^{-1} est une application différentiable; ainsi ab nat est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme et les propriétés du tube $\mathrm{Tub}_\tau\rho$ et de la projection pr_τ: $\mathrm{Tub}_\tau\rho \to X$ qu'il faut établir découlent de celles de leurs modèles $\mathrm{Tu}_\tau\rho$ et ab pr_1: $\mathrm{Tu}_\tau\rho \to X$ déjà établies dans *3*.

5. Chaque transversalisation différentiable possède un tube propre.

Démonstration. Soit τ une transversalisation différentiable du plongement j: $X \to \mathbf{R}^q$. La transversalité des plans $\tau(x)$, $d_x j(\mathrm{Tang}_x X)$ signifie que la différentielle $d_{(x,\,t)}$ nat est non dégénérée si $t = 0$, et donc l'application nat, restreinte à un voisinage U de l'ensemble $X \times 0$ dans Tu_τ, est un difféomorphisme de U sur un voisinage de l'ensemble $j(X)$ (voir 1.5.5). Il est clair que si $\mathrm{Tu}_\tau\rho \subset U$, alors $\mathrm{Tub}_\tau\rho$ est un tube propre de la transversalisation τ.

6 (Lemme). *Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Si X' admet un $\mathscr{C}^r$-plongement dans un espace euclidien avec une $\mathscr{C}^r$-transversalisation, alors l'ensemble $\mathscr{C}^r(X, X')$ est dense dans $\mathscr{C}(X, X')$.*

Démonstration. Fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement j: $X \to \mathbf{R}^q$ et un $\mathscr{C}^r$-plongement j': $X' \to \mathbf{R}^{q'}$ avec une $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ'; il suffit de démontrer que, quels que soient une application continue f: $X \to X'$ et un ε positif, il existe une $\mathscr{C}^r$-application

$g\colon X \to X'$ telle que

$$\max_{x \in X} \operatorname{dist}(j' \circ f(x), j' \circ g(x)) < \varepsilon$$

(voir 1.2.7.3). Construisons un tube propre $\mathrm{Tub}_{\tau'}\, \rho'$ avec $\rho' \leqslant \varepsilon/2$ et désignons par δ le plus petit des nombres $\varepsilon/2$, $\operatorname{Dist}(j'(X'), \mathbf{R}^{q'} \setminus \mathrm{tub}_{\tau'}\rho')$; remarquons que $\delta > 0$ (voir 1.1.7.15). D'après 1.1.5.12, l'application composée

$$j(X) \xrightarrow{(\mathrm{ab}\, j)^{-1}} X \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{j} \mathbf{R}^{q'};$$

se prolonge en une application continue $f_1\colon \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^{q'}$; d'après le théorème 3.1.4, il existe une application $g_1\colon \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^{q'}$ qui s'exprime en coordonnées par des polynômes telle que

$$\max_{x \in X} \operatorname{dist}(f_1 \circ j(x),\ g_1 \circ j(x)) < \delta.$$

Cette dernière inégalité montre que $g_1 \circ j(X) \subset \mathrm{tub}_{\tau'}\, \rho'$, donc la formule $g(x) = \mathrm{pr}_{\tau'}(g_1 \circ j(x))$ définit l'application cherchée $g\colon X \to X'$.

7. Tout $\mathscr{C}^r$-plongement d'une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété fermée, $1 \leqslant r \leqslant a$, dans un espace euclidien admet une $\mathscr{C}^r$-transversalisation.

Pour $r = a$, ∞, telle sera la transversalisation normale. Pour $1 \leqslant r < \infty$, l'existence même d'une transversalisation normale fait que l'ensemble des transversalisations d'un $\mathscr{C}^r$-plongement $X \to \mathbf{R}^q$ donné est non vide, et comme cet ensemble est ouvert dans $\mathscr{C}(X, G(q, q - \dim X))$ (ce qui d'ailleurs est évident), il suffit d'établir que l'ensemble $\mathscr{C}^r(X, G(q, q - \dim X))$ est dense dans $\mathscr{C}(X, G(q, q - \dim X))$. Mais ceci découle du lemme *6*, puisque $G(q, q - \dim X)$ se plonge analytiquement dans l'espace euclidien (voir 2.2.5).

4. Lissage des applications dans le cas fermé

1. Nous abordons le sujet principal du présent sous-paragraphe : l'approximation des applications d'une variété différentiable dans une autre par des applications qui sont dans un certain sens plus régulières ; par exemple, elles sont plus lisses ou sont des plongements ou des immersions.

Les approximations considérées dans le présent sous-paragraphe augmentent seulement le degré de différentiabilité de l'application sans en améliorer les autres propriétés. Par ailleurs, nous considérons le cas le plus simple, celui des variétés fermées.

2. Si $r \leqslant \infty$, alors pour chaque couple de $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées X, X', l'ensemble $\mathscr{C}^r(X, X')$ est dense dans $\mathscr{C}^s(X, X')$ quel que soit $s < r$. Il en est de même pour $r = a$, si X et X' admettent des $\mathscr{C}^a$-plongements dans l'espace euclidien.

Nous devons montrer qu'un voisinage $\mathscr{U}$ d'une application donnée f contient dans $\mathscr{C}^s(X, X')$ une $\mathscr{C}^r$-application. Fixons les

$\mathscr{C}^r$-plongements $j: X \to \mathsf{R}^q$, $j': X' \to \mathsf{R}^{q'}$, leurs $\mathscr{C}^r$-transversalisations τ, τ' et les tubes propres $\mathrm{Tub}_\tau\rho$, $\mathrm{Tub}_{\tau'}\rho'$; considérons l'application

$$\mathscr{C}^s(\mathrm{ab}\, j,\ \mathrm{pr}_{\tau'}): \mathscr{C}^s(\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2),\ \mathrm{tub}_{\tau'}\rho') \to \mathscr{C}^s(X,\ X'),$$

où $\mathrm{ab}\, j = [\mathrm{ab}\, j: X \to \mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)]$ (voir 1.1). Puisque cette application transforme les $\mathscr{C}^r$-applications en $\mathscr{C}^r$-applications, il suffit d'établir que l'intersection de l'image inverse $\mathscr{V}$ de l'ensemble $\mathscr{U}$ avec $\mathscr{C}^r(\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2),\ \mathrm{tub}_{\tau'}\rho')$ n'est pas vide. Mais l'ensemble $\mathscr{V}$ est ouvert et contient la restriction à $\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)$ de l'application composée

$$\mathrm{tub}_\tau\rho \xrightarrow{\mathrm{pr}_\tau} X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{\mathrm{ab}\, j'} \mathrm{tub}_{\tau'}\rho'; \tag{1}$$

l'image de cette restriction est compacte et se trouve donc à une distance positive de $\mathsf{R}^{q'} \setminus \mathrm{tub}_{\tau'}\rho'$. Par conséquent, il existe un nombre positif ε tel que si aux points de l'ensemble $\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)$ les fonctions coordonnées de l'application $g \in \mathscr{C}^s(\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2),\ \mathsf{R}^{q'})$ possèdent des dérivées partielles d'ordres $0, 1, \ldots, s$ égales à celles des fonctions coordonnées de l'application (1) à ε près, alors $g(\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)) \subset \mathrm{tub}_{\tau'}\rho'$ et $[\mathrm{ab}\, g: \mathrm{Tub}_\tau(\rho/2) \to \mathrm{tub}_{\tau'}\rho'] \in \mathscr{V}$. En appliquant le théorème 3.1.4. aux fonctions coordonnées de l'application (1), nous voyons qu'il existe une application g, exprimée en coordonnées par des polynômes, avec la même propriété des dérivées partielles, d'où il est immédiat que l'intersection $\mathscr{V} \cap \mathscr{C}^r(\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2),\ \mathrm{tub}_{\tau'}\rho')$ n'est pas vide.

3. En comparant le théorème 2 aux théorèmes 1.2, 1.3, 1.4 et 1.6, nous voyons que pour $r \leqslant \infty$ et $1 \leqslant s < r$, l'ensemble $\mathrm{Imm}^r(X,\ X')$ est dense dans $\mathrm{Imm}^s(X,\ X')$, l'ensemble $\mathrm{Subm}^r(X,\ X')$ est dense dans $\mathrm{Subm}^s(X,\ X')$, l'ensemble $\mathrm{Emb}^r(X,\ X')$ est dense dans $\mathrm{Emb}^s(X,\ X')$ et l'ensemble $\mathrm{Diff}^r(X,\ X')$ est dense dans $\mathrm{Diff}^s(X,\ X')$ quelles que soient les $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées X, X'. Il en est de même pour $r = a$, lorsque X et X' admettent des $\mathscr{C}^a$-plongements dans des espaces euclidiens.

4 (Corollaire). *Si deux $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées, pour $1 \leqslant r \leqslant \infty$, sont difféomorphes, alors elles sont $\mathscr{C}^r$-difféomorphes. Il en est de même pour $r = a$, lorsqu'elles admettent des $\mathscr{C}^a$-plongements dans des espaces euclidiens.*

5 (Information). Des $\mathscr{C}^a$-variétés fermées homéomorphes ne sont pas nécessairement difféomorphes. Chronologiquement, le premier exemple était donné par des $\mathscr{C}^a$-variétés homéomorphes mais non difféomorphes à la sphère S^7 ; voir [15].

Complément au théorème 2

6. Pour $r \leqslant \infty$, $s < r$, l'ensemble $\mathscr{C}^r(X,\ X')$ est dense dans $\mathscr{C}^s(X,\ X')$ également dans le cas plus général où X est une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété fermée et X' un ouvert d'une certaine $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété Y fermée. Il

en est de même pour $r = a$, lorsque X et Y admettent des $\mathscr{C}^a$-plongements dans des espaces euclidiens.

Pour la démonstration il suffit de remarquer que l'application

$$\mathscr{C}^s(\mathrm{id}, \mathrm{in}) : \mathscr{C}^s(X, X') \to \mathscr{C}^s(X, Y)$$

est un plongement topologique à image ouverte qui applique $\mathscr{C}^r(X, X')$ dans l'intersection de cette image avec $\mathscr{C}^r(X, Y)$. Comme $\mathscr{C}^r(X, Y)$ est dense dans $\mathscr{C}^s(X, Y)$, l'intersection indiquée est dense dans cette image et $\mathscr{C}^r(X, X')$ est dense dans $\mathscr{C}^s(X, X')$.

7 (Lemme). *Pour tout couple de sous-ensembles fermés disjoints d'une $\mathscr{C}^r$-variété fermée, il existe une fonction d'Urysohn de classe $\mathscr{C}^r$, quel que soit $r \leqslant \infty$.*

Démonstration. Soit $\varphi : X \to I$ une fonction d'Urysohn du couple envisagé A, B. D'après le théorème *6*, il existe une $\mathscr{C}^r$-fonction $\psi : X \to \mathsf{R}$ telle que $\max_{x \in X} | \psi(x) - \varphi(x) | < 1/3$; il est clair que si $\lambda : \mathsf{R} \to I$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ vérifiant $\lambda(y) = 0$ pour $y \leqslant 1/3$ et $\lambda(y) = 1$ pour $y \geqslant 2/3$, alors $\lambda \circ \psi$ est une $\mathscr{C}^r$-fonction d'Urysohn du couple A, B.

8. Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées et A un sous-ensemble fermé de X. Pour $0 \leqslant s < r \leqslant \infty$, la partie de l'espace $\mathscr{C}^s(X, X')$ constituée des $\mathscr{C}^r$-prolongements de l'application donnée $\varphi : A \to X'$ est dense dans la partie de cet espace constituée des prolongements de l'application φ de classe $\mathscr{C}^r$ dans un voisinage de l'ensemble A (chacun dans son voisinage).

Nous devons montrer que le voisinage donné $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{C}^s(X, X')$ de l'application f donnée qui prolonge φ et appartient à la classe $\mathscr{C}^r$ dans un certain voisinage U de l'ensemble A, contient un $\mathscr{C}^r$-prolongement de l'application φ. Fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement $j' : X \to \mathsf{R}^{q'}$, sa $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ' et son tube propre $\mathrm{Tub}_{\tau'}\rho'$; désignons par $\mathscr{V}$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^s(X, X')$ constituée des applications g pour lesquelles

$$\max_{x \in X} \mathrm{dist}\,(j' \circ f(x), j' \circ g(x)) < \mathrm{Dist}\,(j'(X), \mathsf{R}^{q'} \setminus \mathrm{tub}_{\tau'}\rho').$$

Il est clair que l'ensemble $\mathscr{V}$ est ouvert et que pour des $g \in \mathscr{V}$, $x \in X$ quelconques le segment à extrémités $j' \circ f(x)$, $j' \circ g(x)$ est contenu dans $\mathrm{tub}_{\tau'}\rho'$. Construisons une $\mathscr{C}^r$-fonction d'Urysohn ψ du couple A, $X \setminus U$ (voir *7*) et considérons l'application $\Phi : \mathscr{V} \to \mathscr{C}^s(X, X')$ qui envoie g dans l'application

$$x \mapsto \mathrm{pr}_\tau\,((1 - \psi(x))\, j' \circ f(x) + \psi(x)\, j' \circ g(x)).$$

Une vérification immédiate montre que Φ est continue; il est évident que $\Phi(f) = f$. Il découle de ces propriétés de Φ que l'ensemble $\Phi^{-1}(\mathscr{U})$ est ouvert et non vide, d'où on tire, en appliquant le théorème *2*, qu'il contient une $\mathscr{C}^r$-application. Il reste à remarquer que Φ applique les $\mathscr{C}^r$-applications dans des $\mathscr{C}^r$-prolongements de l'application φ.

9. Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées, A une sous-variété de la variété X, fermée en tant que variété indépendante; supposons que $\varphi : A \to X'$ est une application de classe $\mathscr{C}^r$. Pour $0 \leqslant s < r \leqslant \infty$, la partie de l'espace $\mathscr{C}^s(X, X')$ constituée des $\mathscr{C}^r$-prolongements de l'application φ est dense dans la partie de cet espace constituée de tous les $\mathscr{C}^s$-prolongements de l'application φ.

Nous devons montrer que le voisinage donné $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{C}^s(X, X')$ du prolongement donné de l'application φ contient un $\mathscr{C}^r$-prolongement de cette application. Fixons les $\mathscr{C}^r$-plongements $j : X \to \mathbf{R}^q$ et $j' : X' \to \mathbf{R}^{q'}$; la $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ du plongement $j|_A : A \to \mathbf{R}^q$ et la $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ' du plongement j'; les tubes propres $\mathrm{Tub}_\tau \rho$ et $\mathrm{Tub}_{\tau'} \rho'$. Désignons ensuite par $\mathscr{V}$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^s(X, X')$ constituée des applications g qui vérifient

$$\max_{x \in A} \mathrm{dist}\,(j' \circ \varphi(x), j' \circ g(x)) < \mathrm{Dist}\,(j'(X'), \mathbf{R}^{q'} \setminus \mathrm{tub}_{\tau'} \rho').$$

Il est clair que l'ensemble $\mathscr{V}$ est ouvert et contient tous les $\mathscr{C}^s$-prolongements de l'application φ à X. Construisons une $\mathscr{C}^r$-fonction d'Urysohn quelconque du couple $(X \setminus j^{-1}(\mathrm{tub}_\tau \rho))$, A et considérons l'application $\Phi : \mathscr{V} \to \mathscr{C}^s(X, X')$ qui envoie l'application g dans l'application

$$x \mapsto \begin{cases} \mathrm{pr}_{\tau'}(j' \circ g(x) + \psi(x)\,[j' \circ \varphi \circ \mathrm{pr}_\tau\,(j(x)) - \\ \quad - j' \circ g \circ \mathrm{pr}_\tau\,(j(x))]) & \text{si } j(x) \in \mathrm{Tub}_\tau \rho, \\ g(x) & \text{si } j(x) \notin \mathrm{Tub}_\tau \rho. \end{cases}$$

Il est évident que Φ est continue et que $\Phi(g) = g$, si g prolonge φ. Il découle de ses propriétés de Φ que l'ensemble $\Phi^{-1}(\mathscr{U})$ est ouvert et non vide d'où l'on tire, en vertu du théorème *2*, qu'il contient une $\mathscr{C}^r$-application. Il reste à remarquer que Φ applique les $\mathscr{C}^r$-applications dans des $\mathscr{C}^r$-prolongements de l'application φ.

5. Recollement différentiable de variétés

1. Le but principal de ce sous-paragraphe est de préparer la généralisation des théorèmes d'approximation 4.2 à 4.4, dans leur partie non analytique, aux variétés compactes à bord. On procédera par construction des doubles des variétés compactes différentiables, opération qui les rend fermées. Il nous sera plus commode d'étudier tout de suite une opération plus générale, également nécessaire dans d'autres questions : le recollement différentiable de variétés compactes différentiables. Il faudra commencer par l'étude de la structure des variétés compactes différentiables à proximité de leurs bords.

Cols

2. On appelle *col* d'une $\mathscr{C}^r$-variété compacte X, $0 \leqslant r \leqslant a$, le $\mathscr{C}^r$-plongement du cylindre $\partial X \times I$ dans X qui applique $(x, 0)$ dans x pour tout point $x \in \partial X$. L'image du cylindre $\partial X \times I$ par un col est également appelée *col*.

Dans le cas où X est différentiable ($r \geqslant 1$), le col est un plongement différentiable et son image, une sous-variété de codimension 0. Le bord de cette dernière variété est constitué par ∂X et par une sous-variété (de la variété int X) difféomorphe à ∂X.

3. Pour $1 \leqslant r \leqslant \infty$ *chaque* $\mathscr{C}^r$*-variété compacte admet un col.*

Démonstration. Soit X la variété envisagée. Fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement propre $j: X \to \mathbf{R}^q_-$ (voir 2.3), une $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ du plongement composé $\partial X \xrightarrow{\mathrm{ab}\, j} \mathbf{R}^q_- \xrightarrow{\mathrm{in}} \mathbf{R}^q$ et un tube propre $\mathrm{Tub}_\tau \rho$; considérons l'application $\varphi: j^{-1}(\mathrm{tub}_\tau \rho) \to \partial X \times \mathbf{R}^1_-$ définie par la formule $x \mapsto (\mathrm{pr}_\tau (j(x)), j_1(x))$, où j_1 est la première fonction coordonnée du plongement j. Il découle du fait que j est propre que la différentielle $d_x\varphi$ est non dégénérée pour $x \in \partial X$, de sorte que φ est un difféomorphisme d'un certain voisinage du bord ∂X sur un certain voisinage de l'ensemble $\partial X \times 0$ (voir 1.5.5). Soit ε un nombre positif si petit que le produit $\partial X \times [-\varepsilon, 0]$ est contenu dans le voisinage indiqué; il est clair que la formule $(x, t) \mapsto \varphi^{-1}(x, -\varepsilon t)$ détermine alors un col de la variété X.

4 (Information). Les variétés topologiques compactes ($r = 0$) et les variétés analytiques compactes ($r = a$) admettent également des cols. Le cas $r = 0$ est considéré dans [4].

Recollement

5. Soient X, X' des $\mathscr{C}^r$-variétés compactes de dimension n avec $r \geqslant 1$ et C, C' des sous-variétés de leurs bords ∂X, $\partial X'$ constituées de composantes entières de ces bords. Nous supposons que C et C' sont difféomorphes et munies d'un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme $\varphi: C \to C'$; recollons X à X' par la composée des applications $C \xrightarrow{\varphi} C' \xrightarrow{\mathrm{in}} X'$ (voir 1.2.4.8). L'espace $Y = X' \cup_{\mathrm{in} \circ \varphi} X$ obtenu est évidemment une variété topologique compacte de dimension n; il s'avère que si X et X' sont munis de cols, alors Y possède une $\mathscr{C}^r$-structure naturelle qui en fait une $\mathscr{C}^r$-variété à col. Cette $\mathscr{C}^r$-structure est définie par l'atlas constitué des cartes des atlas $\mathrm{Atl}\,(X \setminus C)$ et $\mathrm{Atl}\,(X' \setminus C')$ (nous envisageons X et X' comme parties de la variété Y) et des cartes Ψ déterminées d'après les cartes $\psi \in \mathrm{Atl}\, C$ et les cols $k: \partial X \times I \to X$, $k': \partial X' \times I \to X'$ par les formules

$$\mathrm{supp}\, \Psi = k(\mathrm{supp}\, \psi \times [0, 1)) \cup k'(\mathrm{supp}\, \psi \times [0, 1)),$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi(k(z, t)) &= (\psi(z), -t) \\ \Psi(k'(z, t)) &= (\psi(z), t) \end{aligned}\right\} \qquad z \in C,\ t \in [0, 1)$$

($\mathrm{Im}\, \psi \subset \mathbf{R}^{n-1}$, et $\mathrm{Im}\, \Psi = \mathrm{Im}\, \psi \times (-1, 1) \subset \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^n$). Ces cartes sont évidemment $\mathscr{C}^r$-compatibles deux à deux; le col naturel de la $\mathscr{C}^r$-variété Y obtenue est constitué par les parties restan-

tes des cols k, k'. On dit que Y est recollé à partir de X et X' par φ. Il est clair que $\partial Y = (\partial X \setminus C) \cup (\partial X' \setminus C')$ et que X, X' et C sont des sous-variétés de Y. Les parties des cols k, k' qui adhèrent à C, C' constituent un *col bilatère de C dans Y*, i. e. un $\mathscr{C}^r$-plongement $C \times [-1, 1] \to Y$ tel que $(z, 0) \mapsto z$.

Lorsque $X' = X$, $C' = C = \partial X$ et $\varphi = \mathrm{id}$, le recollement est appelé *double* de X et Y sera désigné par dopp X. Ceci est en conformité avec 1.1.9 en ce sens que $\mathscr{C}^0$ (dopp X) = dopp ($\mathscr{C}^0$ X).

Remarquons que si X et X' sont orientés et φ transforme l'orientation induite de la variété C dans l'orientation induite de la variété C' (voir 1.3.4), alors Y est orientable et peut être muni d'une orientation canonique. Cette dernière est celle qui induit dans X l'orientation donnée et dans X' l'orientation opposée à l'orientation donnée. En particulier, si X est orienté, alors dopp X l'est également.

Comme nous montrent des exemples simples, la $\mathscr{C}^r$-structure de la variété Y dépend non seulement de celles des variétés X,X' et du difféomorphisme φ, mais aussi des cols k, k'. Notre but immédiat est de montrer que pour $r \neq a$ cette dernière dépendance disparaît lorsqu'on envisage Y à un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme près.

6 (Lemme). *Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et $f: X \times [-1, 1] \to X' \times [-1, 1]$ une application telle que $f(X \times [-1, 0]) \subset X' \times]-1, 0]$ et $f(X \times [0, 1]) \subset X' \times [0, 1[$. Si* ab $f: X \times [-1, 0] \to X' \times]-1, 0]$ *et* ab $f: X \times [0, 1] \to X' \times [0, 1[$ *sont des plongements différentiables de classe $\mathscr{C}^r$, tandis que* ab $f: X \times 0 \to X' \times 0$ *est un difféomorphisme, alors il existe un $\mathscr{C}^r$-plongement $g: X \times [-1, 1] \to X' \times [-1, 1]$ qui coïncide avec f sur $(X \times [-1, -1/2]) \cup (X \times 0) \cup (X \times [1/2, 1])$ et vérifie $g(X \times [-1, 0]) = f(X \times [-1, 0])$, $g(X \times [0, 1]) = f(X \times [0, 1])$.*

Dans la démonstration qui suit nous désignerons par f_1, f_2 les applications composées

$$\begin{tikzcd} & & X' \\ X \times [-1,1] \arrow[r, "f"] & X' \times [-1,1] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & \\ & & {[-1,1]} \end{tikzcd}$$

Supposons tout d'abord que l'application f_1 est constante sur chaque ensemble $x \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, $x \in X$, pour un certain ε positif. Nous fixons des nombres positifs δ, η tels que $\delta \leqslant \min(\varepsilon, 1/2)$ et pour chaque point $x \in X$ la dérivée de la fonction $t \mapsto f_2(x, t)$ soit au moins égale à η sur les intervalles $[-\delta, 0[$, $]0, \delta]$; nous construisons ensuite une $\mathscr{C}^r$-fonction $\alpha: [-\delta, \delta] \to I$ telle que $\alpha(t) = 0$ pour $|t| \leqslant \delta/4$ et $\alpha(t) = 1$ pour $|t| \geqslant \delta/2$. [L'existence de

tels nombres δ et η découle de la continuité des fonctions $X \times [0, 1] \to \mathbf{R}$, $X \times [-1, 0] \to \mathbf{R}$ qui font correspondre à chaque point (x, t) la dérivée de la fonction $\tau \mapsto f_2(x, \tau)$ au point t (pour $t = 0$ nous prenons la dérivée à droite pour la première fonction, et à gauche pour la seconde), et du fait que chacune de ces fonctions est positive sur $X \times 0$. En vertu de la compacité de X, ces fonctions possèdent une borne inférieure positive sur $X \times 0$ et sur le produit $X \times [-\delta, \delta]$ pour un certain δ positif.] Une vérification immédiate montre que l'application

$$g\colon X \times [-1, 1] \to X' \times [-1, 1],$$

définie par la formule

$$g(x, t) = \begin{cases} f_1(x, t), & (1-\alpha(t))\,\eta t + \alpha(t) f_2(x, t) \text{ si } |t| \leqslant \delta, \\ f(x, t) & \text{si } |t| \geqslant \delta, \end{cases}$$

est l'application cherchée.

Dans le cas général, nous fixons un $\varepsilon_1 < {}^1/_2$ positif tel que l'application $\varphi_t\colon X \to X'$ déterminée par la formule $\varphi_t(x) = f_1(x, t)$ soit un difféomorphisme pour $|t| \leqslant \varepsilon_1$. [L'existence d'un tel ε_1 découle de la continuité de φ_t en t pour une $\mathscr{C}^r$-topologie, du fait que φ est un difféomorphisme (rappelons que $\mathrm{ab}\, f\colon X \times 0 \to X' \times 0$ est un difféomorphisme), et du fait que l'ensemble $\mathrm{Diff}^r(X, X')$ est ouvert dans $\mathscr{C}^r(X, X')$ (voir 1.6).]

Soit $\gamma\colon [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \to \mathbf{R}$ une $\mathscr{C}^r$-fonction non décroissante telle que $\gamma(t) = 0$ pour $|t| \leqslant \varepsilon_1/4$ et $\gamma_1(t) = t$ pour $|t| \geqslant \varepsilon_1/2$. Définissons l'application

$$\tilde{f}\colon X \times [-1, 1] \to X' \times [-1, 1]$$

par la formule

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(\varphi_t^{-1} \circ \varphi_{\gamma(t)}(x), t) & \text{si } |t| \leqslant \varepsilon_1, \\ f(x, t) & \text{si } |t| \geqslant \varepsilon_1. \end{cases}$$

Elle vérifie les conditions imposées à f dans l'énoncé du lemme ainsi que la condition supplémentaire pour laquelle le lemme a déjà été démontré (la composée des applications

$$X \times [-1, 1] \xrightarrow{\tilde{f}} X' \times [-1, 1] \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X'$$

est constante sur les ensembles $x \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ pour $\varepsilon = \varepsilon_1/4$). L'application g correspondante sera justement l'application cherchée, puisque $\tilde{f}$ coïncide sur

$$(X \times [-1, -{}^1/_2]) \cup (X \times 0) \cup (X \times [{}^1/_2, 1])$$

avec f.

7. *Soient X_1, X_1', X_2, X_2' des $\mathscr{C}^r$-variétés à col, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, et supposons que C_1, C_1', C_2, C_2' sont des parties de leurs bords constituées*

des composantes entières; soient $\varphi_1 : C_1 \to C'_1$, $\varphi_2 : C_2 \to C'_2$ *des difféomorphismes de classe* $\mathscr{C}^r$. *Si existent des* $\mathscr{C}^r$*-difféomorphismes* $F : X_1 \to X_2$, $F' : X'_1 \to X'_2$ *tels que* $F(C_1) = C_2$, $F'(C'_1) = C'_2$ *et le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & C'_1 \\ {\scriptstyle \mathrm{ab}\,F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ab}\,F'} \\ C_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & C'_2 \end{array}$$

est commutatif, alors les variétés Y_1 *et* Y_2, *obtenues respectivement par recollements* φ_1 *et* φ_2 *à partir de* X_1, X'_1 *et* X_2, X'_2 *sont* $\mathscr{C}^r$*-difféomorphes; en outre, il existe un* $\mathscr{C}^r$*-difféomorphisme* $G : Y_1 \to Y_2$ *tel que* $G(X_1) = X_2$, $G(X'_1) = X'_2$, $G(C_1) = C_2$ *et* $[\mathrm{ab}\,G : C_1 \to C_2] = [\mathrm{ab}\,F : C_1 \to C_2]$.

Démonstration. Soient $l_1 : C_1 \times [-1, 1] \to Y_1$, $l_2 : C_2 \times [-1, 1] \to Y_2$ des cols bilatères. Désignons par H l'application $Y_1 \to Y_2$ définie par les formules

$$H|_{X_1} = [\mathrm{in} : X_2 \to Y_2] \circ F, \quad H_{X'_1} = [\mathrm{in} : X'_2 \to Y'_2] \circ F'$$

et trouvons un ε positif tel que

$$H \circ l_1 (C_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]) \subset l_2 (C_2 \times]-1, 1[).$$

Appliquons maintenant le lemme *6* à l'application $f : C_1 \times [-1, 1] \to C_2 \times [-1, 1]$ définie par la formule $f(z, t) = l_2^{-1}(H \circ l_1(z, \varepsilon t))$. D'après ce lemme, il existe un $\mathscr{C}^r$-plongement $g : C_1 \times [-1, 1] \to C_2 \times [-1, 1]$ qui coïncide avec f sur

$$(C_1 \times [-1, -1/2]) \cup (C_1 \times 0) \cup (C_1 \times [1/2, 1])$$

et vérifie

$$g(C_1 \times [-1, 0]) = f(C_1 \times [-1, 0]),$$
$$g(C_1 \times [0, 1]) = f(C_1 \times [0, 1]).$$

Il est clair que la formule

$$G(y) = \begin{cases} H(y) & \text{si } y \notin l_1(C_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]), \\ l_2 \circ g(z, t/\varepsilon) & \text{si } y = l_1(z, t) \text{ avec } z_1 \in C_1, t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases}$$

détermine le $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme $G : Y_1 \to Y_2$ cherché.

Découpage

8. Soient Y *une variété de classe* $\mathscr{C}^r$ *avec* $1 \leqslant r \leqslant \infty$ *et* X, X' *des sous-variétés de même dimension qui recouvrent* Y. *Si* $C = X \cap X'$ *est une partie de chacun des bords* ∂X, $\partial X'$ *constituée par leurs composantes entières, alors il existe un* $\mathscr{C}^r$*-plongement* $l : C \times [-1, 1] \to Y$ *tel que* $l(z, 0) = z$ *pour chaque point* $z \in C$ *et* $l(C \times [-1, 0[) \subset \mathrm{int}\, X$, $l(C \times]0, 1]) \subset \mathrm{int}\, X'$.

Démonstration. Fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement $j: Y \to \mathsf{R}^q$, une $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ du plongement $j|_C: C \to \mathsf{R}^q$ et le tube propre $\mathrm{Tub}_\tau \rho$; envisageons une application $\varphi: C \to S^{q-1}$ qui fait correspondre au point $z \in C$ le vecteur unité tangent à $j(Y)$ au point $j(z)$, contenu dans $\tau(z)$ et dirigé vers X'. Cette application est continue (elle appartient à la classe $\mathscr{C}^{r-1}$) et d'après le théorème 4.2, il existe une $\mathscr{C}^r$-application $\varphi_1: C \to S^{q-1}$ telle que le produit scalaire $\langle \varphi(z), \varphi_1(z) \rangle$ est positif sur C. Considérons l'application ψ: $\mathrm{tub}_\tau \rho \to C \times \mathsf{R}$ définie par la formule

$$\psi(z) = (\mathrm{pr}_\tau(z), \langle z - j \circ \mathrm{pr}_\tau(z), \varphi_1(z) \rangle).$$

Elle appartient à la classe $\mathscr{C}^r$ et, si $z \in C$, la différentielle

$$d_{j(z)}\psi: \mathrm{Tang}_{j(z)}(\mathrm{tub}_\tau \rho) \to \mathrm{Tang}_{(z,0)}(C \times \mathsf{R}) = (\mathrm{Tang}_z C) \oplus \mathsf{R}$$

est un isomorphisme de $\mathrm{Tang}_{j(z)} j(C)$ sur $\mathrm{Tang}_z C$ qui applique le vecteur $\varphi(z)$ dans $\langle \varphi(z), \varphi_1(z) \rangle \in \mathsf{R}$. En outre, $\mathrm{Tang}_{j(z)} j(C)$ et $\varphi(z)$ sont contenus dans $\mathrm{Tang}_{j(z)} j(Y)$, de sorte que $d_{j(z)}\psi$ est un épimorphisme de $\mathrm{Tang}_{j(z)} j(Y)$ sur $\mathrm{Tang}_{(z,0)}(C \times \mathsf{R})$. L'égalité

$$\dim \mathrm{Tang}_{j(z)} j(Y) = \dim \mathrm{Tang}_{(z,0)}(C \times \mathsf{R})$$

implique $d_{j(z)}\psi|_{\mathrm{Tang}_{j(z)} j(Y)}$, i. e. $d_{j(z)}(\psi|_{j(Y) \cap \mathrm{tub}_\tau \rho})$ est un isomorphisme. En vertu du théorème 1.5.5, il en découle que $\psi|_{j(Y) \cap \mathrm{tub}_\tau \rho}$ est un difféomorphisme d'un certain voisinage de l'ensemble $j(C)$ sur un voisinage de l'ensemble $C \times 0$. Soit ε un nombre positif si petit que le produit $C \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ est contenu dans le voisinage indiqué; il est clair que la formule $l(z, t) = j^{-1}(\psi^{-1}(z, \varepsilon t))$ définit le plongement demandé $l: C \times [-1, 1] \to Y$.

9 (Corollaire). *Soient Y une variété de classe $\mathscr{C}^r$ avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$, et X, X' des sous-variétés de même dimension qui la recouvrent. Si $X \cap X'$ est une partie de chacun des bords ∂X, $\partial X'$, constituée par leurs composantes entières, alors* id X *et* id X' *constituent un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme de la variété Y sur la variété recollée par* id $(X \cap X')$ *à partir des variétés X, X' munies de cols appropriés.*

Application élémentaire

10. Les variétés différentiables compacts sont des SCNR.

Dans le cas des variétés fermées ceci découle des théorèmes 2.1, 3.7 et 3.5, l'image d'une variété différentiable par un plongement différentiable dans l'espace euclidien étant le rétracte de l'intérieur d'un tube propre d'une transversalisation différentiable du plongement. Le cas des variétés ouvertes se réduit au cas fermé par le théorème 1.3.6.4; en effet, une variété compacte différentiable possède, d'après *5*, un double fermé différentiable dont elle est évidemment le rétracte.

6. Lissage des applications de variétés à bord

1. Les propositions principales de ce sous-paragraphe sont les théorèmes *5* et *9* qui généralisent le théorème 4.2. Le lemme *2* est nécessaire pour la démonstration du lemme *3*, le lemme *3* pour la démonstration du lemme *4*, le lemme *4* pour la démonstration du théorème *5*, et enfin les lemmes *7*, *8* pour la démonstration du théorème *9*.

2 (Lemme). *Soit Y une variété de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ avec $r < \infty$. Si la fonction $f: Y \times \mathsf{R}^1_- \to \mathsf{R}$ est de classe $\mathscr{C}^r$, alors la fonction $F: Y \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ définie par la formule*

$$F(y, t) = \begin{cases} f(y, t) & \text{pour } t \leqslant 0, \\ \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_{r+1}^{k+1} f(y, -kt) & \text{pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$

est également de classe $\mathscr{C}^r$.

La démonstration nécessite seulement la vérification de la compatibilité des deux lignes de la formule qui définit F et de celle des dérivées partielles de ces lignes relativement aux coordonnées locales. Si, en guise de ces dernières, on a choisi t et des coordonnées locales quelconques dans Y, alors la compatibilité indiquée est une conséquence immédiate de l'égalité

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+s} C_{r+1}^{k+1} k^s D^s \varphi(0) = D^s \varphi(0)$$

qui est valable pour $s \leqslant r$ quelle que soit la $\mathscr{C}^s$-fonction $\varphi: \mathsf{R}^1 \to \mathsf{R}$. Pour vérifier cette égalité, i. e. l'identité

$$\sum_{k=-1}^{r} (-1)^k C_{r+1}^{k+1} k^s = 0 \quad (s \leqslant r),$$

il suffit de remarquer que cette dernière somme est la « différence d'ordre $r + 1$ », calculée pour $k = -1$, de la fonction à valeurs entières $k \mapsto k^s$.

3 (Lemme). *Soit X une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété à col. Si $1 \leqslant r < \infty$, alors chaque fonction de $\mathscr{C}^r(X, \mathsf{R})$ se prolonge en une fonction de $\mathscr{C}^r$* (dopp X, R).

D é m o n s t r a t i o n. Fixons un col bilatère $l: \partial X \times [-1, 1] \to \operatorname{dopp} X$ de la variété ∂X dans $\operatorname{dopp} X$ (voir 5.5) et une $\mathscr{C}^r$-fonction $\alpha: \mathsf{R} \to I$, telle que $\alpha(t) = 1$ pour $t \leqslant 0$ et $\alpha(t) = 0$ pour $t \geqslant 1/r$. Soit φ une fonction appartenant à $\mathscr{C}^r(X, \mathsf{R})$. Considérons la fonction $f: \partial X \times \mathsf{R}^1_- \to \mathsf{R}$ définie par la formule

$$f(y, t) = \begin{cases} \alpha(t)\, \varphi(l(y, t)) & \text{pour } t \leqslant 1/r, \\ 0 & \text{pour } t \geqslant 1/r. \end{cases}$$

Elle est de classe $\mathscr{C}^r$ de sorte que le lemme *2* la transforme en une $\mathscr{C}^r$- fonction $F: \partial X \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$; il est clair que la fonction ψ: dopp $X \to \mathsf{R}$ définie par la formule

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \operatorname{dopp} X \setminus (X \cup l(\partial X \times [0, 1/r]), \\ \varphi(x) & \text{pour } x \in X, \\ F(l_1^{-1}(x)) & \text{pour } x \in l(\partial X \times [0, 1/r]) \end{cases}$$

prolonge φ et appartient à la classe $\mathscr{C}^r$.

4 (Lemme). *Soient X une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété à col et X' une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété fermée. Si $0 \leqslant r < \infty$, chaque application appartenant à $\mathscr{C}^r(X, X')$ se prolonge en une application de $\mathscr{C}^r$* (dopp X, X').

Démonstration. Pour $r = 0$ c'est évident. Supposons que $r > 0$ et $f \in \mathscr{C}^r(X, X')$. Fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement $j': X' \to \mathsf{R}^{q'}$, sa $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ' et un tube propre $\mathrm{Tub}_{\tau'}\rho'$. En vertu du lemme *3*, les fonctions coordonnées de la composée $j' \circ f$ se prolongent en des $\mathscr{C}^r$-fonctions dopp $X \to \mathsf{R}$, i. e. $j' \circ f$ se prolonge en une certaine $\mathscr{C}^r$-application g: dopp $X \to \mathsf{R}^{q'}$. Désignons par U le voisinage du bord ∂X dans X constitué des points x pour lesquels

$$\operatorname{dist}(j' \circ f(x), \ g(\operatorname{cop}(x))) < \operatorname{Dist}(j'(X'), \ \mathsf{R}^{q'} \setminus \mathrm{tub}_{\tau'}\rho'),$$

et construisons pour le couple X, cop $(X \setminus U)$ une $\mathscr{C}^r$-fonction d'Urysohn φ: dopp $X \to I$. Il est clair que le segment à extrémités $j' \circ f(x)$, $g(\operatorname{cop}(x))$, $x \in X$, est contenu dans $\mathrm{tub}_{\tau'}\rho'$ et les formules

$$h(x) = j' \circ f(x) \quad \text{si} \quad x \in X,$$

$$h(\operatorname{cop}(x)) = j' \circ f(x) \ \text{si} \ x \in X \setminus U,$$

$$h(\operatorname{cop}(x)) = (1 - \varphi(\operatorname{cop}(x)))\, g(\operatorname{cop}(x)) + \varphi(\operatorname{cop}(x))\, j' \circ f(x) \quad \text{si } x \in \operatorname{Cl} U$$

déterminent une $\mathscr{C}^r$-application h: dopp $X \to \mathsf{R}^{q'}$ avec $h(\operatorname{dopp} X) \subset \mathrm{tub}_{\tau'}\rho'$ qui prolonge $j' \circ f$. La composée des applications

$$\operatorname{dopp} X \xrightarrow{\operatorname{ab} h} \mathrm{tub}_{\tau'}\rho' \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\tau'}} X'$$

sera justement le $\mathscr{C}^r$-prolongement de l'application f à dopp X.

5. Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés compactes, X' étant fermée. Si $0 \leqslant s < r \leqslant \infty$, alors: (i) *l'ensemble $\mathscr{C}^r(X, X')$ est dense dans $\mathscr{C}^s(X, X')$*; (ii) *pour chaque $\mathscr{C}^r$-application $\varphi: \partial X \to X'$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^s(X, X')$ constituée des $\mathscr{C}^r$-prolongements de l'application φ est dense dans la partie de cet espace constituée des $\mathscr{C}^s$-prolongements de l'application φ.*

Démonstration. L'application

$$\mathscr{C}^s(\text{in}: X \to \operatorname{dopp} X, \ \text{id } X'): \mathscr{C}^s(\operatorname{dopp} X, X') \to \mathscr{C}^s(X, X')$$

envoie les $\mathscr{C}^r$-applications dans des $\mathscr{C}^r$-applications et, d'après le lemme *4*, son image contient entièrement $\mathscr{C}^s(X, X')$. Par conséquent, (i) découle du fait que l'ensemble $\mathscr{C}^r$ (dopp X, X') est dense dans $\mathscr{C}^s$ (dopp X, X') (voir 4.2), tandis que (ii) découle du fait que l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-prolongements de l'application φ est dense dans la partie de l'espace $\mathscr{C}^s$ (dopp X, X') constituée des $\mathscr{C}^s$-prolongements de l'application φ (voir 4.9).

6 (Corollaire). *Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Si deux applications de $\mathscr{C}^r(X, X')$ sont homotopes, alors elles peuvent être jointes par une $\mathscr{C}^r$-homotopie $X \times I \to X'$.*

7 (Lemme). *Pour des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés compactes quelconques X, X' avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$, l'application $\mathscr{C}^r_\partial(X, X') \to \mathscr{C}^r(\partial X, \partial X')$ définie par la formule $f \mapsto \mathrm{ab}\, f$ est ouverte.*

D é m o n s t r a t i o n. La continuité de cette application a déjà été constatée dans 1.1. Pour établir qu'elle est ouverte, il faut, d'après 1.1.4.4, indiquer, pour l'application $f \in \mathscr{C}^r_\partial(X, X')$ donnée, un voisinage $\mathscr{U}$ de l'application $\mathrm{ab}\, f\colon \partial X \to \partial X'$ dans $\mathscr{C}^r(\partial X, \partial X')$ et une application continue $\Phi\colon \mathscr{U} \to \mathscr{C}^r_\partial(X, X')$ tels que

$$\Phi(\mathrm{ab}\, f) = f \text{ et } [\mathrm{ab}\,(\Phi(g))\colon \partial X \to \partial X'] = g$$

quel que soit $g \in \mathscr{U}$. Fixons les cols $k\colon \partial X \times I \to X$ et $k'\colon \partial X' \times I \to X'$, un $\mathscr{C}^r$-plongement $j'\colon \partial X' \to \mathbf{R}^{q'}$, sa $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ' et le tube propre $\mathrm{Tub}_{\tau'}\rho'$. Construisons ensuite une $\mathscr{C}^r$-fonction $\alpha\colon I \to I$ telle que $\alpha(t) = 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1/3$ et $\alpha(t) = 0$ pour $2/3 \leqslant t \leqslant 1$; fixons un ε positif tel que

$$f(k(\partial X \times [0, \varepsilon])) \subset k'(\partial X' \times I)$$

et désignons par f_1, f_2 les applications composées

$$\begin{tikzcd} \partial X \times [0,\varepsilon] \arrow[r, "\mathrm{ab}\,k"] & k(\partial X \times [0,\varepsilon]) \arrow[r, "\mathrm{ab}\,f"] & k'(\partial X' \times I) \arrow[r, "(\mathrm{ab}\,k')^{-1}"] & \partial X' \times I \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & \partial X' \\ & & & & I \end{tikzcd}$$

Nous définissons $\mathscr{U}$ comme l'ensemble de toutes les applications $g \in \mathscr{C}^r(\partial X, \partial X')$ telles que

$$\max_{y \in \partial X} \mathrm{dist}\,(j' \circ f(y),\ j' \circ g(y)) < \mathrm{Dist}\,(j'(\partial X'),\ \mathbf{R}^{q'} \setminus \mathrm{tub}_{\tau'}\rho');$$

définissons Φ par les formules

$$[\Phi(g)](x) = f(x) \text{ si } x \in X \setminus k(\partial X \times (0, \varepsilon]),$$

$$[\Phi(g)](k(y, t)) = k'(\mathrm{pr}_\tau(j'(f_1(y, t)) + \alpha(t/\varepsilon)[j'(f(y)) - j' \circ g(y)]),\ f_2(y, t))$$

$$\text{si } y \in \partial X, \quad t \in [0, \varepsilon].$$

Une vérification immédiate montre que $\mathscr{U}$ et Φ possèdent les propriétés désirées.

8 (Lemme). *Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés compactes. Si $1 \leqslant r \leqslant \infty$, l'ensemble des composées des applications $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{\text{in}} \operatorname{dopp} X'$ où $f \in \mathscr{C}^r_\partial(X, X')$ est ouvert dans la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(X, \operatorname{dopp} X')$ constituée des applications qui prolongent les applications $\partial X \to \partial X'$.*

Démonstration. Soit $f_0 \in \mathscr{C}^r_\partial(X, X')$. Désignons l'application composée $X \xrightarrow{f_0} X' \xrightarrow{\text{in}} \operatorname{dopp} X'$ par g_0 et fixons le col $k: \partial X \times I \to X$ de la variété X et le col bilatère $l': \partial X \times [-1, 1] \to \operatorname{dopp} X'$ de la variété $\partial X'$ dans $\operatorname{dopp} X'$. Fixons ensuite des nombres positifs δ, η tels que

(i) $g_0(k(\partial X \times [0, \delta])) \subset l'(\partial X' \times]-1, 1[)$;

(ii) pour chaque point $y \in \partial X$ la dérivée de la fonction $[0, \delta] \to [-1, 1]$ définie par la formule

$$t \mapsto [\mathrm{pr}_2: \partial X \times [-1, 1] \to [-1, 1]]\,(l'^{-1}(g_0 \circ k(y, t))) \qquad (2)$$

est partout inférieure à $-\eta$. (L'existence de tels nombres δ et η découle de la continuité de la fonction $\partial X \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ qui fait correspondre à chaque point (y, t) la dérivée, au point t, de la fonction définie par la formule (2) et du fait que cette fonction est négative sur $\partial X \times 0$. D'après la compacité de ∂X, cette fonction est bornée supérieurement par une constante négative sur $\partial X \times 0$ et sur le produit $\partial X \times [0, \delta]$ pour un certain δ positif.) Il est clair que les $\mathscr{C}^r$-applications $g: X \to \operatorname{dopp} X'$ qui possèdent les propriétés (i), (ii) avec g à la place de g_0 et telles que

$$g(X \setminus k(\partial X \times [0, \delta[)) \subset \operatorname{int} X'$$

constituent dans $\mathscr{C}^r(X, \operatorname{dopp} X')$ un ensemble ouvert. Il suffit donc de remarquer que l'intersection de cet ensemble avec la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(X, \operatorname{dopp} X')$ constituée des applications qui prolongent les applications $\partial X \to \partial X'$ est un voisinage de l'application g_0 dans l'ensemble des applications composées $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{\text{in}} \operatorname{dopp} X'$ avec $f \in \mathscr{C}^r_\partial(X, X')$.

9. *Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés compactes. Si $1 \leqslant s < r \leqslant \infty$, alors*: (i) *l'ensemble $\mathscr{C}^r_\partial(X, X')$ est dense dans $\mathscr{C}^s_\partial(X, X')$*; (ii) *la partie de l'espace $\mathscr{C}^s_\partial(X, X')$ constituée des $\mathscr{C}^r$-prolongements de l'application φ donnée appartenant à $\mathscr{C}^r(\partial X, \partial X')$ est dense dans la partie de cet espace constituée des $\mathscr{C}^s$-prolongements de l'application φ.*

Démonstration. Le lemme 7 et le théorème 4.2 (appliqué aux variétés ∂X, $\partial X'$) nous montrent que les applications g telles que $[\text{ab } g: \partial X \to \partial X'] \in \mathscr{C}^r(\partial X, \partial X')$ constituent dans $\mathscr{C}^s_\partial(X, X')$ un ensemble partout dense. Ainsi (i) découle de (ii) et il nous reste à démontrer (ii).

Soit $f \in \mathscr{C}^s_\partial(X, X')$ un prolongement de l'application φ et $\mathscr{U}$ son voisinage dans $\mathscr{C}^s_\partial(X, X')$; il faut démontrer que $\mathscr{U}$ contient

un $\mathscr{C}^r$-prolongement de l'application φ. En vertu de *8*, la composée des applications $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{\text{in}} \text{dopp } X'$ possède dans $\mathscr{C}^s(X, \text{dopp } X')$ un voisinage $\mathscr{V}$ tel que $g \in \mathscr{V}$ et $g(\partial X) \subset \partial X'$ impliquent $g(X) \subset \subset X'$ et $[\text{ab } g: X \to X'] \in \mathscr{U}$. Par conséquent, il suffit de trouver un $\mathscr{C}^r$-prolongement de l'application φ dans $\mathscr{V}$; or, un tel prolongement existe en vertu de *5*.

10. En comparant les théorèmes *5* et *9* aux théorèmes 1.2. à 1.6, nous voyons que pour $1 \leqslant s < r \leqslant \infty$: quelles que soient une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété compacte X et une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété fermée X', l'ensemble $\text{Imm}^r(X, X')$ est dense dans $\text{Imm}^s(X, X')$, l'ensemble $\text{Subm}^r(X, X')$ est dense dans $\text{Subm}^s(X, X')$ et l'ensemble $\text{Emb}^r(X, X')$ est dense dans $\text{Emb}^s(X, X')$; pour des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés compactes quelconques X, X', l'ensemble des plongements propres appartenant à $\mathscr{C}^r(X, X')$ est dense dans l'ensemble des plongements propres de $\mathscr{C}^s(X, X')$ et l'ensemble $\text{Diff}^r(X, X')$ est dense dans $\text{Diff}^s(X, X')$.

11 (Corollaire). *Si deux $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés compactes avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$ sont difféomorphes, elles sont $\mathscr{C}^r$-difféomorphes.*

12 (Information). Les théorèmes *5* et *9*, comme le théorème 4.2, sont également vrais pour $r = a$ (voir 2.4). Nous n'avons pas traité ce cas à cause des difficultés techniques qu'il entraîne.

Les théorèmes 4.2 et *5*, *9* (et même leurs $\mathscr{C}^a$-variantes) restent vrais pour des X, X' non compactes. Pourtant, cette généralisation ne présente qu'un intérêt restreint ; par exemple, elle ne permet pas, à elle seule, d'éviter, dans l'énoncé de *11*, la condition de compacité, quoique celle-ci soit superflue. Une reformulation adéquate des théorèmes 4.2 et *5*, *9* au cas non compact doit faire apparaître des topologies plus fortes que la $\mathscr{C}^r$-topologie définie dans 1.1, et nécessite des méthodes analytiques plus efficaces que celles du théorème 3.1.4.

7. Mise des applications en position générale

1. Le résultat le plus important de ce sous-paragraphe est le théorème *7* qui le conclut et qui joue un rôle important par la suite. Soulignons qu'il s'énonce et se démontre seulement dans la $\mathscr{C}^\infty$-situation. Dans le sous-paragraphe 9 nous y ajouterons un énoncé qui englobe les $\mathscr{C}^r$-applications pour r fini (voir 9.10).

La partie technique du sous-paragraphe est constituée par le théorème *2* qui établit une propriété topologique fondamentale de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ et le théorème *4*, qui est l'unique corollaire du théorème 3.2.3 qui nous sera nécessaire.

Pour simplifier les énoncés des théorèmes *2* et *3*, nous donnons des noms spéciaux aux espaces dans lesquels l'intersection de toute famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses est partout dense : nous les appellerons *espaces de Baire*.

Théorèmes techniques

2. *$\mathscr{C}^r(X, X')$ est un espace de Baire quelles que soient les $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés X, X' avec $0 \leqslant r \leqslant \infty$.*

Il faut démontrer que pour toute suite de sous-ensembles ouverts partout denses $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \ldots$ de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ et tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{W}$ de cet espace l'intersection $\mathscr{W} \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{U}_i)$ n'est pas vide. Soient $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ des atlas numérotés de la variété X tels que pour chaque i l'ensemble $K_i = \mathrm{Cl}\ \mathrm{supp}\ \psi_i$ est compact, est contenu dans $\mathrm{supp}\ \varphi_i$ et l'on a $\psi_i = \mathrm{ab}\ \varphi_i$; soient $\{\varphi'_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\psi'_j\}_{j=1}^{\infty}$ des atlas numérotés de la variété X' tels que pour chaque j l'ensemble $K'_j = \mathrm{Cl}\ \mathrm{supp}\ \psi'_j$ est contenu dans $\mathrm{supp}\ \varphi'_j$ et l'on a $\psi'_j = \mathrm{ab}\ \varphi'_j$. Nous construirons des $\mathscr{C}^r$-applications $f_1 : X \to X'$, $f_2 : X \to X'$, ... des ensembles ouverts $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2, \ldots$ de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ et des nombres naturels $n(1)$, $n(2)$,... tels que:

(i) $f_i \in \mathscr{V}_i$;

(ii) pour $i \geqslant 2$ on ait $\mathscr{V}_i \subset \mathscr{V}_{i-1}$;

(iii) $\mathrm{Cl}\ \mathscr{V}_i \subset \mathscr{W} \cap \mathscr{U}_i$;

(iv) $f_i(K_i) \subset \bigcup_{j=1}^{n(i)} \mathrm{supp}\ \psi'_j$;

(v) pour $s \leqslant i$ et $t \leqslant n(s)$ on ait $f_i(K_s \cap f_s^{-1}(K'_t)) \subset \mathrm{supp}\ \varphi'_t$;

(vi) pour $i \geqslant 2$, $s \leqslant i$ et $t \leqslant n(s)$ les dérivées partielles des expressions en coordonnées locales $\mathrm{loc}(\varphi_s, \varphi'_t) f_i$, $\mathrm{loc}(\varphi_s, \varphi'_t) f_{i-1}$ d'ordre $\leqslant \min(r, i-2)$ diffèrent aux points de l'ensemble $\varphi_s(K_s \cap f_s^{-1}(K'_t))$ de moins de 2^{-i}.

Ceci est également suffisant: d'après (v) et (vi), pour des s, t quelconques vérifiant $t \leqslant n(s)$ la suite

$$\{\mathrm{loc}(\varphi_s, \varphi'_t) f_i |_{\varphi_s(\mathrm{supp}\ \psi_s \cap f_s^{-1}(\mathrm{supp}\ \psi'_t))}\}_{i=s}^{\infty}$$

converge uniformément avec les dérivées partielles d'ordre $\leqslant r$ sur $\varphi_s(\mathrm{supp}\ \psi_s \cap f_s^{-1}(\mathrm{supp}\ \psi'_t))$ vers une certaine $\mathscr{C}^r$-application

$$g_{st} : \varphi_s(\mathrm{supp}\ \psi_s \cap f_s^{-1}(\mathrm{supp}\ \psi'_t)) \to \mathrm{Im}\ \varphi'_t;$$

les applications composées

$$\mathrm{supp}\ \psi_s \cap f_s^{-1}(\mathrm{supp}\ \psi'_t) \xrightarrow{\mathrm{ab}\ \varphi_s}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{ab}\ \varphi_s} \varphi_s(\mathrm{supp}\ \psi_s \cap f_s^{-1}(\mathrm{supp}\ \psi'_t)) \xrightarrow{g_{st}} \mathrm{Im}\ \varphi'_t \xrightarrow{(\varphi'_t)^{-1}} \mathrm{supp}\ \varphi'_t$$

constituent une certaine $\mathscr{C}^r$-application $g : X \to X'$ (le fait que les ensembles $\mathrm{supp}\ \psi_s \cap f_s^{-1}(\mathrm{supp}\ \psi'_t)$ recouvrent X découle de (iv), tandis que le fait que les applications g_{st} sont compatibles sur l'intersection de ces ensembles est évident); l'application g est la limite

de la suite $f_1, f_2, \ldots$ (dans $\mathscr{C}^r(X, X')$) et il découle de (i), (ii), (iii) que g appartient à l'intersection $\mathscr{W} \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{U}_i)$.

La construction s'effectue par récurrence. En guise de f_1, nous prenons un élément quelconque de l'intersection $\mathscr{W} \cap \mathscr{U}_1$, et en guise de $\mathscr{V}_1$, un voisinage quelconque de l'application f_1 (dans $\mathscr{C}^r(X, X')$) vérifiant $\mathrm{Cl}\, \mathscr{V}_1 \subset \mathscr{W} \cap \mathscr{U}_1$ (rappelons que l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ est régulier, voir 1.1). Supposons maintenant que les applications $f_i \in \mathscr{C}^r(X, X')$, les ensembles ouverts $\mathscr{V}_i \subset \mathscr{C}^r(X, X')$ et les entiers naturels $n(i)$ avec $i < k$, pour un certain $k \geqslant 2$, ont déjà été choisis et possèdent les propriétés (i) à (vi). Désignons par $\mathscr{G}$ l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-applications $g: X \to X'$ telles que pour $s \leqslant k-1$, $t \leqslant n(s)$ on a

$$g(K_s \cap f_s^{-1}(K'_t)) \subset \operatorname{supp} \varphi_s$$

et les dérivées partielles de expressions en coordonnées locales $\operatorname{loc}(\varphi_s, \varphi'_t)\, g$, $\operatorname{loc}(\varphi_s, \varphi'_t)\, f_{k-1}$ d'ordres $\leqslant \min(r, k-2)$ diffèrent aux points de l'ensemble $\varphi_s(K_s \cap f_s^{-1}(K'_t))$ de moins que 2^{-k}. Il est évident que l'ensemble $\mathscr{G}$ est ouvert et contient f_{k-1}. Par conséquent, il coupe $\mathscr{V}_{k-1}$ et, puisque $\mathscr{U}_k$ est partout dense, il coupe également $\mathscr{V}_{k-1} \cap \mathscr{U}_k$. Nous choisissons pour $\mathscr{V}_k$ un ouvert non vide quelconque vérifiant $\mathrm{Cl}\, \mathscr{V}_k \subset \mathscr{G} \cap \mathscr{V}_{k-1} \cap \mathscr{U}_k$, pour f_k un élément quelconque de l'ensemble $\mathscr{V}_k$ et enfin pour $n(k)$ un nombre naturel quelconque tel que $f_k(K_k) \subset \bigcup_{t=1}^{n(k)} \operatorname{supp} \psi'_t$. Le fait que ces $\mathscr{V}_k$, f_k, $n(k)$ vérifient les conditions (i) à (vi) pour $i = k$ est évident.

3. Les variétés topologiques sont des espaces de Baire.

C'est un cas particulier du théorème *2* car une variété topologique X peut toujours être envisagée comme étant $\mathscr{C}^0(D^0, X)$.

4. Soient X, X' des variétés de classe $\mathscr{C}^\infty$ ou $\mathscr{C}^a$. Si une application $f: X \to X'$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors l'image $f(F)$ de l'ensemble F de tous les points x de X vérifiant $d_x f(\mathrm{Tang}_x X) \neq \mathrm{Tang}_{f(x)} X'$ peut être représentée comme la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles nulle part denses.

Démonstration. Soient Φ, Φ' des atlas dénombrables des variétés X, X'. Représentons pour chaque couple $(\varphi, \varphi') \in \Phi \times \Phi'$ l'ensemble $\operatorname{supp} \varphi \cap f^{-1}(\operatorname{supp} \varphi')$ sous forme de réunion d'une suite d'ensembles compacts $K_1(\varphi, \varphi')$, $K_2(\varphi, \varphi')$, ...; désignons par $C_i(\varphi, \varphi')$ l'ensemble des points x de $K_i(\varphi, \varphi')$ pour lesquels le jacobien de l'application $\operatorname{loc}(\varphi, \varphi')\, f$ est de rang inférieur à $\dim X'$ au point $\varphi(x)$. D'après le théorème 3.2.3, chacun des ensembles $f(C_i(\varphi, \varphi'))$ est nulle part dense et il est clair que $f(F)$ est la réunion de ces ensembles.

Théorème fondamental

5. Soient X_1, X_2, X' des variétés différentiables et A_1, A_2 des sous-ensembles des variétés X_1, X_2. Nous dirons que les applications différentiables $f_1: X_1 \to X'$, $f_2: X_2 \to X'$ sont *transversales l'une à l'autre sur* A_1, A_2 lorsque pour des points quelconques $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ vérifiant $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ l'espace vectoriel $\mathrm{Tang}_{f(x_1)} X'$ est engendré par ses sous-espaces $d_{x_1} f_1 (\mathrm{Tang}_{x_1} X_1)$, $d_{x_2} f_2 (\mathrm{Tang}_{x_2} X_2)$; dans le cas où x_1 est un point de bord, $\mathrm{Tang}_{f(x_1)} X'$ est déjà engendré par les sous-espaces $d_{x_1} f_1 (\mathrm{Tang}_{x_1} \partial X_1)$, $d_{x_2} f_2 (\mathrm{Tang}_{x_2} X_2)$; dans le cas où x_2 est un point de bord, par les sous-espaces $d_{x_1} f_1 (\mathrm{Tang}_{x_1} X_1)$, $d_{x_2} f_2 (\mathrm{Tang}_{x_2} \partial X_2)$ et enfin dans le cas où les deux points x_1, x_2 sont des points de bord, par les sous-espaces $d_{x_1} f_1 (\mathrm{Tang}_{x_1} \partial X_1)$, $d_{x_2} f_2 (\mathrm{Tang}_{x_2} \partial X_2)$. Les applications $f_1: X_1 \to X'$, $f_2: X_2 \to X'$ transversales sur X_1, X_2 sont dites tout simplement transversales.

Faisons les trois remarques évidentes suivantes. La première: si $\dim X_1 + \dim X_2 < \dim X'$, alors la transversalité des applications f_1, f_2 sur A_1, A_2 signifie que $f_1(A_1)$ et $f_2(A_2)$ sont disjoints. La deuxième: si les applications f_1, f_2 sont transversales sur les ensembles A_1, A_2, elles le sont également sur certains voisinages de ces ensembles. La troisième: si X_1, X_2, X' sont de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et les ensembles A_1, A_2 sont compacts, alors pour chaque application f_2 appartenant à $\mathscr{C}^r(X_2, X')$ l'ensemble de toutes les applications f_1 appartenant à $\mathscr{C}^r(X_1, X')$ telles que f_1, f_2 sont transversales sur A_1, A_2, est ouvert dans $\mathscr{C}^r(X_1, X')$.

6 (Lemme). *Soient X_1, X_2 des variétés de classe $\mathscr{C}^\infty$ ou $\mathscr{C}^a$. Si des applications $f_1: X_1 \to \mathsf{R}^{q'}$, $f_2: X_2 \to \mathsf{R}^{q'}$ appartiennent à la classe $\mathscr{C}^\infty$, alors il existe dans $\mathsf{R}^{q'}$ un sous-ensemble V partout dense tel que pour chaque vecteur $v \in V$ l'application $X_1 \to \mathsf{R}^{q'}$ définie par la formule $x_1 \mapsto f_1(x_1) + v$ est transversale à f_2.*

Démonstration. En guise de V on peut prendre l'ensemble de points $v \in \mathsf{R}^{q'}$ vérifiant la condition: pour aucune des quatre applications $\mathrm{int}\, X_1 \times \mathrm{int}\, X_2 \to \mathsf{R}^{q'}$, $\mathrm{int}\, X_1 \times \partial X_2 \to \mathsf{R}^{q'}$, $\partial X_1 \times \mathrm{int}\, X_2 \to \mathsf{R}^{q'}$, $\partial X_1 \times \partial X_2 \to \mathsf{R}^{q'}$ définies par la formule $(x_1, x_2) \mapsto f_2(x_2) - f_1(x_1)$, le vecteur v n'est image d'aucun point en lequel le rang de la différentielle de l'application soit inférieur à q'. La transversalité des applications $x_1 \mapsto f(x_1) + v$ à f_2 pour $v \in V$ est évidente. Le fait que l'ensemble V est dense dans $\mathsf{R}^{q'}$ découle des théorèmes *4* et *3*.

7. *Soient X_1, X_2, X' des variétés de classe $\mathscr{C}^\infty$ ou $\mathscr{C}^a$, la variété X' n'ayant pas de bord. Si l'application $f_2: X_2 \to X'$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors la partie de l'espace $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$ constituée des applications transversales à f_2 est l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses.*

Démonstration. Désignons par $\mathscr{F}(A_1, A_2)$, $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, l'ensemble des $\mathscr{C}^\infty$-applications $f_1: X_1 \to X'$ telles que

f_1, f_2 sont transversales sur A_1, A_2. Il est clair que si A_1, A_2 sont compacts, l'ensemble $\mathscr{F}(A_1, A_2)$ est ouvert dans $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$; nous montrerons que si A_1, A_2 sont compacts, l'ensemble $\mathscr{F}(A_1, A_2)$ est dense dans $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$. Ces deux conditions nous seront suffisantes; en fait, on peut représenter X_1 comme la réunion d'une suite d'ensembles compacts $K_{11}, K_{12}, \ldots$, et X_2 comme la réunion d'une suite d'ensembles compacts $K_{21}, K_{22}, \ldots$, alors la partie de l'espace $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$ qui nous intéresse (i.e. $\mathscr{F}(X_1, X_2)$) pourra se représenter comme l'intersection des ensembles $\mathscr{F}(K_{1i}, K_{2j})$.

Ainsi, supposons que A_1, A_2 sont compacts et soit $\mathscr{U}$ un voisinage (dans $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$) d'une $\mathscr{C}^\infty$-application $g_1 : X_1 \to X'$; nous devons construire une application appartenant à la fois à $\mathscr{F}(A_1, A_2)$ et à $\mathscr{U}$. La construction sera effectuée en deux étapes: d'abord nous réduirons $\mathscr{U}$ à un certain voisinage $\mathscr{V}$ de forme spéciale de l'application g_1 pour construire ensuite une application appartenant à la fois à $\mathscr{F}(A_1, A_2)$ et à $\mathscr{V}$.

Posons $\dim X_1 = q_1$, $\dim X_2 = q_2$, $\dim X' = q'$. La construction du voisinage $\mathscr{V}$ commence par le choix, pour chaque point $x' \in f_2(A_2)$, d'une carte $\varphi'_{x'} \in \mathrm{Atl}_{x'} X'$ qui vérifie $\mathrm{Im}\, \varphi'_{x'} = \mathsf{R}^{q'}$ et $\varphi'_{x'}(x') = 0$. Ensuite, pour chaque point $x_2 \in A_2$, nous trouvons une carte $\varphi_{2x_2} \in \mathrm{Atl}_{x_2} X_2$ telle que $\mathrm{Im}\, \varphi_{2x_2} = \mathsf{R}^{q_2}$ ou $\mathsf{R}^{q_2}_-$; $\varphi_{2x_2}(x_2) = 0$; l'ensemble $\mathrm{Cl}\,\mathrm{supp}\, \varphi_{2x_2}$ est compact et nous avons

$$f_2(\mathrm{Cl}\,\mathrm{supp}\, \varphi_{2x_2}) \subset [\varphi'_{f_2(x_2)}]^{-1} (\mathrm{Int}\, D^{q'}).$$

Ensuite nous recouvrons A_2 par un nombre fini d'ensembles $\varphi^{-1}_{2x_2}(\mathrm{Int}\, D^{q_2})$, mettons par les ensembles

$$\varphi^{-1}_{2x_{21}}(\mathrm{Int}\, D^{q_2}), \ldots, \varphi^{-1}_{2x_{2l}}(\mathrm{Int}\, D^{q_2}),$$

et désignons la carte $\varphi'_{f_2(x_{2j})}$ plus brièvement par ψ'_j et la carte $\varphi_{2x_{2j}}$ par ψ_{2j}. Ensuite, pour chaque point $x_1 \in A_1$, trouvons une carte $\varphi_{1x_1} \in \mathrm{Atl}_{x_1} X_1$ telle que $\mathrm{Im}\, \varphi_{1x_1} = \mathsf{R}^{q_1}$ ou $\mathsf{R}^{q_1}_-$; $\varphi_{1x_1}(x_1) = 0$; l'ensemble $\mathrm{Cl}\,\mathrm{supp}\, \varphi_{1x_1}$ est compact et son image $g_1(\mathrm{Cl}\,\mathrm{supp}\, \varphi_{1x_1})$ est contenue, pour chaque $j = 1, \ldots, l$, dans un des ensembles $X' \setminus f_2(\mathrm{Cl}\,\mathrm{supp}\, \psi_{2j})$, $[\psi_j]^{-1}(\mathrm{Int}\, D^{q'})$. Recouvrons ensuite A_1 par un nombre fini d'ensembles $\varphi^{-1}_{1x_1}(\mathrm{Int}\, D^{q_1})$, mettons par les ensembles

$$\varphi^{-1}_{1x_{11}}[\mathrm{Int}\, D^{q_1}), \ldots, \varphi^{-1}_{1x_{1k}}(\mathrm{Int}\, D^{q_1}).$$

Désignons la carte $\varphi_{1x_{1i}}$ par ψ_{1i}. Définissons l'ensemble $\mathscr{V}$ comme étant la partie de l'ensemble $\mathscr{U}$ constituée des applications $h_1 : X_1 \to X'$ qui vérifient

$$h_1(\mathrm{Cl}\,\mathrm{supp}\, \psi_{1i}) \subset X' \setminus f_2(\mathrm{Cl}\,\mathrm{supp}\, \psi_{2j})$$

si $g_1(\mathrm{Cl}\ \mathrm{supp}\ \psi_{1i}) \subset X' \setminus f_2(\mathrm{Cl}\ \mathrm{supp}\ \psi_{2j})$, et

$$h_1(\mathrm{Cl}\ \mathrm{supp}\ \psi_{1i}) \subset X' \setminus (\psi'_j)^{-1}(\mathrm{Int}\ D^{q'})$$

si $g_1(\mathrm{Cl}\ \mathrm{supp}\ \psi_{1i}) \subset X' \setminus (\psi'_j)^{-1}(\mathrm{Int}\ D^{q'})$. Le fait que $\mathscr{V}$ est un voisinage de l'application g_1 dans $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$ est évident.

En passant maintenant à la deuxième étape de notre construction, numérotons d'une manière quelconque les couples (i, j), $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, l$; nous obtenons une suite

$$(i_1, j_1), \ldots, (i_m, j_m) \qquad [m = kl].$$

Construisons par récurrence des applications $h_1^0, \ldots, h_1^m : X_1 \to X'$ telles que: (i) $h_1^s \in \mathscr{V}$; (ii) si $r \leqslant s$, alors les applications h_1^r, f_2 sont transversales sur $\psi_{1i_r}^{-1}(D^{q_1})$, $\psi_{2j_r}^{-1}(D^{q_2})$. L'application h_1^m sera justement une application appartenant à l'intersection $\mathscr{F}(A_1, A_2) \cap \mathscr{V}$.

Posons $h_1^0 = f_1$ et admettons que les applications h_1^s pour $s < t \leqslant m$ ont déjà été construites de manière à satisfaire aux conditions (i), (ii). Si les applications h_1^{t-1}, f_2 sont transversales sur $\psi_{1i_t}^{-1}(D^{q_1})$, $\psi_{2j_t}^{-1}(D^{q_2})$, alors nous posons $h_1^t = h_1^{t-1}$. Dans le cas contraire, l'ensemble $h_1^{t-1}(\psi_{1i_t}^{-1}(D^{q_1}))$ est contenu dans $(\psi'_{j_t})^{-1}(D^{q'})$ et, d'après le lemme 6, il existe dans $\mathsf{R}^{q'}$ un sous-ensemble V partout dense tel que pour chaque $v \in V$ la composée des applications

$$\mathrm{Im}\ \psi_{1i_t} \xrightarrow{\mathrm{loc}(\psi_{1i_t}, \psi'_{j_t})\, h_1^{t-1}} \mathsf{R}^{q'} \xrightarrow{x \mapsto x+v} \mathsf{R}^{q'}$$

est transversale à l'application $\mathrm{loc}(\psi_{2j_t}, \psi'_{j_t})\, f_2 : \mathrm{Im}\ \psi_{2j_t} \to \mathsf{R}^{q'}$. Envisageons une $\mathscr{C}^\infty$-fonction $\alpha : \mathsf{R}^{q'} \to \mathsf{R}$ égale à 1 sur $D^{q'}$ et à 0 en dehors d'une boule concentrique $2D^{q'}$ de rayon 2 et définissons, pour $v \in \mathsf{R}^{q'}$, une application $g_v : X_1 \to X'$ par la formule

$$g_v(x_1) = \begin{cases} h_1^{t-1}(x_1) & \text{si } x_1 \in X_1 \setminus (h_1^{t-1})^{-1}[(\psi'_{j_t})^{-1}(2D^{q'})], \\ (\psi'_{j_t})^{-1}(\psi'_{j_t}(h_1^{t-1}(x_1)) + \alpha(\psi'_{j_t}(h_1^{t-1}(x_1)))\, v) & \\ \qquad \text{si } x_1 \in (h_1^{t-1})^{-1}(\mathrm{supp}\ \psi'_{j_t}). & \end{cases}$$

Il est clair que $g_0 = h_1^{t-1}$, que g_v est de classe $\mathscr{C}^\infty$ quel que soit le point $v \in \mathsf{R}^{q'}$ et que l'application de l'espace $\mathsf{R}^{q'}$ dans $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$ définie par la formule $v \mapsto g_v$ est continue. Par conséquent, il existe dans $\mathsf{R}^{q'}$ un sous-ensemble ouvert U contenant 0 et tel que si $v \in U$, l'application g_v appartient à $\mathscr{V}$ et les applications g_v, f_2 sont transversales sur les ensembles $\psi_{1i_r}^{-1}(D^{q_1})$, $\psi_{2j_r}^{-1}(D^{q_2})$ pour $r < t$. D'autre part, il découle de la définition de l'ensemble V que pour $v \in V$ les applications g_v, f_2 sont transversales sur $\psi_{1i_t}^{-1}(D^{q_1})$, $\psi_{2j_t}^{-1}(D^{q_2})$. Ainsi nous pouvons prendre l'application g_v en guise de h_1^t pour tout $v \in U \cap V$.

8. Applications transversales à une sous-variété

1. Le théorème 7.7 s'applique le plus souvent dans des situations où X_2 est une sous-variété d'une variété X', tandis que f_2 est une inclusion. Nous nous servirons alors d'une notation plus concise; à savoir, au lieu de dire que l'application $f_1 : X_1 \to X'$ est transversale à l'inclusion in: $X_2 \to X'$, nous dirons qu'elle est *transversale à* X_2. Le théorème 7.7 affirme que si X_1 et X' sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ ou $\mathscr{C}^a$ et X' est sans bord, alors l'ensemble des applications appartenant à $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$ et transversales à X_2 est dense dans $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$.

Une situation encore plus spéciale mérite une attention particulière; c'est celle où les deux variétés X_1, X_2 sont des sous-variétés d'une variété X' et les deux applications f_1, f_2 sont des inclusions. Si les inclusions in: $X_1 \to X'$, in: $X_2 \to X'$ sont transversales, on dit que les sous-variétés X_1, X_2 elles-mêmes sont transversales. En comparant les théorèmes 7.7 et 1.4, nous voyons que pour des sous-variétés X_1, X_2 quelconques d'une $\mathscr{C}^\infty$- ou $\mathscr{C}^a$-variété X' tout voisinage de l'inclusion in: $X_1 \to X'$ dans $\mathscr{C}^\infty(X_1, X')$ comporte des inclusions transversales à X_2. Dans un langage géométrique et imagé, on exprime cette dernière assertion de la manière suivante: on peut rendre deux sous-variétés transversales par une déformation aussi petite que l'on veut de l'une d'entre elles.

Dans ces situations spéciales on peut, bien entendu, appliquer le $\mathscr{C}^{<\infty}$-complément du théorème 7.7 (le théorème 9.10) mentionné dans 7.1. Remarquons que la mise en position générale de deux variétés s'obtient alors par déformation des deux variétés.

2. Soient X_1, X' *des variétés de classe* $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ $(1 \leqslant r \leqslant a)$ *avec* $\dim X_1 = q_1$, $\dim X' = q'$ *et* X_2 *une sous-variété de la variété* X' *avec* $\dim X_2 = q_2$. *Soit* $f_1 : X_1 \to X'$ *une application de classe* $\mathscr{C}^r$ *transversale à* X_2 *et vérifiant* $f_1(\partial X_1) \cap \partial X_2 \subset \partial X'$. *Alors*: $X_{12} = f_1^{-1}(X_2)$ *est une* $\mathscr{C}^r$*-sous-variété de dimension* $q_1 + q_2 - q'$ *de la variété* X_1 *avec* $\partial X_{12} = f_1^{-1}(\partial X_2)$; *cette sous-variété est propre si* X_2 *est propre; l'homomorphisme linéaire*

$$\operatorname{fact} d_{x_1} f_1 : \operatorname{Tang}_{x_1} X_1 / \operatorname{Tang}_{x_1} X_{12} \to \operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} X' / \operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} X_2 \qquad (3)$$

est un isomorphisme pour chaque point $x_1 \in X_{12}$.

(Nous sous-entendons ici qu'une sous-variété de dimension négative est l'ensemble vide.)

D é m o n s t r a t i o n. La deuxième assertion est un complément évident de la première, la troisième devient évidente si l'on remarque que les espaces quotients dans la formule (3) à gauche et à droite de la flèche sont de même dimension. Il ne reste qu'à prouver la première assertion. Nous le ferons suivant le schéma de 1.2.12.

Envisageons d'abord pour un point donné $x_1 \in X_{12}$ les dispositions possibles du point $f_1(x_1)$. L'inclusion $f_1(x_1) \in \operatorname{int} X_2 \cap \partial X'$

est impossible car int $X_2 \cap \partial X' = \varnothing$ (X_2 est une sous-variété de la variété X'). L'inclusion $f_1(x_1) \in \partial X_2 \cap \partial X'$ est impossible lorsque $x_1 \in \operatorname{int} X_1$ car elle serait en contradiction avec la transversalité de f_1 à X_2 (si $x_1 \in \operatorname{int} X_1$ et $f_1(x_1) \in \partial X_2 \cap \partial X'$, alors chacun des espaces $\operatorname{Im} d_{x_1} f_1$, $\operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} \partial X_2$ est contenu dans $\operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} \partial X'$ et ces espaces ne peuvent pas engendrer $\operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} X'$). L'inclusion $f_1(x_1) \in \partial X_2 \cap \operatorname{int} X'$ est impossible si $x_1 \in \partial X_1$, puisque $f_1(\partial X_1) \cap \partial X_2 \subset \partial X'$. Il reste quatre possibilités:

(i) $x_1 \in \operatorname{int} X_1$, $f_1(x_1) \in \operatorname{int} X_2 \cap \operatorname{int} X'$;
(ii) $x_1 \in \operatorname{int} X_1$, $f_1(x_1) \in \partial X_2 \cap \operatorname{int} X'$;
(iii) $x_1 \in \partial X_1$, $f_1(x_1) \in \operatorname{int} X_2 \cap \operatorname{int} X'$;
(iv) $x_1 \in \partial X_1$, $f_1(x_1) \in \partial X_2 \cap \partial X'$.

Fixons une carte φ' de $\operatorname{Atl}_{f_1(x_1)} \mathscr{C}^r X'$ qui applique le triplet $(\operatorname{supp} \varphi', X_2 \cap \operatorname{supp} \varphi', f_1(x_1))$ dans un des triplets $(\mathbf{R}^{q'}, \mathbf{R}^{q_2}, 0)$, $(\mathbf{R}^{q'}, \mathbf{R}^{q_2}_-, 0)$, $(\mathbf{R}^{q'}_-, \mathbf{R}^{q_2}_-, 0)$ et désignons par $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_{q'}$ les coordonnées locales correspondantes; envisageons les fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_{q'} : f_1^{-1}(\operatorname{supp} \varphi') \to \mathbf{R}$ définies par la formule $\psi_i(x) = \varphi'_i(f_1(x))$. L'intersection $X_{12} \cap f_1^{-1}(\operatorname{supp} \varphi')$ se détermine dans les cas (i), (iii) et (iv) par les équations $\psi_{q_2+1}(x) = 0, \ldots, \psi_{q'}(x) = 0$ et dans le cas (ii) par ces équations et l'inégalité $\psi_1(x) < 0$. Montrons que dans les cas (i), (iii) et (iv) ces équations, et, dans le cas (ii) ces équations et cette inégalité, vérifient les conditions d'indépendance énoncées dans 1.2.12.

Dans le cas (i), il faut établir l'indépendance des fonctions $\psi_{q_2+1}, \ldots, \psi_{q'}$ au point x_1; elle découle de l'égalité $\dim \bigcap_{j=q_2+1}^{q'} \times \operatorname{Ker}(d_{x_1} \psi_j) = q' - q_2$ qui à son tour est une conséquence de l'inclusion évidente

$$d_{x_1} f_1 \Big(\bigcap_{j=q_2+1}^{q'} \operatorname{Ker} d_{x_1} \psi_j \Big) \subset \operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} X_2$$

et de l'égalité

$$\operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} X' = \operatorname{Im} d_{x_1} f_1 + \operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} X_2 \tag{4}$$

qui participe à la définition de la transversalité. Dans le cas (ii), il s'agit d'établir l'indépendance des fonctions $\psi_1, \psi_{q_2+1}, \ldots, \psi_{q'}$ au point x_1; la démonstration répète la précédente, sauf qu'il faut remplacer l'égalité (4) par l'égalité

$$\operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} X' = \operatorname{Im} d_{x_1} f_1 + \operatorname{Tang}_{f_1(x_1)} \partial X_2.$$

Enfin, dans les cas (iii), (iv), il faut établir l'existence d'une $\mathscr{C}^r$-fonction $\psi : f_1^{-1}(\operatorname{supp} \varphi') \to \mathbf{R}$ qui s'annule sur $\partial X_1 \cap f_1^{-1}(\operatorname{supp} \varphi')$, est négative sur $\operatorname{Int} X_1 \cap f_1^{-1}(\operatorname{supp} \varphi')$ et telle que les fonctions ψ, $\psi_{q_2+1}, \ldots, \psi_{q'}$ sont indépendantes au point x_1; l'existence d'une telle fonction est équivalente à l'indépendance au point x_1 des restrictions des fonctions $\psi_{q_2+1}, \ldots, \psi_{q'}$ à $\partial X_1 \cap f_1^{-1}(\operatorname{supp} \varphi')$; ce der-

nier fait se démontre exactement comme dans le cas (i), sauf qu'il faut remplacer l'égalité (4) par l'égalité

$$\mathrm{Tang}_{f_1(x_1)}X' = \mathrm{Im}\, d_{x_2}(f_1 \mid \partial_{X_2}) + \mathrm{Tang}_{f_1(x_1)}X_2.$$

3 (Corollaire). *Soient X_1, X_2 des sous-variétés transversales de la variété différentiable X', la sous-variété X_1 étant propre. Alors $X_1 \cap X_2$ est une sous-variété de dimension* (dim X_1 + dim X_2 — dim X') *de la variété X' ; elle est propre si X_2 est propre.*

Applications élémentaires

4. Soit A un sous-ensemble fermé d'une $\mathscr{C}^r$-variété fermée X, et U un voisinage de l'ensemble A. Si $1 \leqslant r \leqslant \infty$, alors U contient une sous-variété compacte B de codimension nulle qui contient A dans sa partie intérieure.

Démonstration. Soient $\varphi : X \to I$ une $\mathscr{C}^r$-fonction d'Urysohn du couple A, $X \setminus U$ (voir 4.7) et c un nombre appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, ce nombre n'étant pas une valeur critique de la fonction φ (voir *1*). Alors $B = \varphi^{-1}([0, c])$ est l'image inverse de la sous-variété $]-\infty, c] \subset \mathsf{R}$ par la composée des $\mathscr{C}^r$-applications $X \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{\mathrm{in}} \mathsf{R}$ transversale à $]-\infty, c]$; par conséquent, c'est une sous-variété de codimension nulle (voir *2*). De la construction de B découle directement que B est fermé comme sous-ensemble, et $A \subset \mathrm{Int}\, B$, $B \subset U$.

5. Chaque SCNR est homéomorphe à un rétracte d'une $\mathscr{C}^\infty$-variété orientée fermée.

Démonstration. Soient j une inclusion d'un SCNR X dans S^q pour q suffisamment grand et U un voisinage de l'ensemble $j(X)$ dont celui-ci est un rétracte. D'après le théorème *4*, il existe dans U une sous-variété compacte qui contient $j(X)$, et il est clair qu'il existe une rétraction sur $j(X)$ du double de cette sous-variété.

9. Augmentation de la classe de différentiabilité d'une variété

1. Le résultat principal de ce sous-paragraphe est résumé dans les théorèmes *6* et *8*. Les lemmes *2*, *3*, *4*, *5* sont nécessaires à la démonstration du théorème *6*, le lemme *7* permet de déduire le théorème *8* du théorème *6*.

2 (Lemme). *Soient X, X' des sous-variétés de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$; supposons que X est compacte, tandis que X' n'a pas de bord. Supposons en outre que A' est une sous-variété de la variété X', fermée lorsqu'on l'envisage comme une variété indépendante, $f : X \to X'$ est une $\mathscr{C}^r$-application transversale à A' qui vérifie $f(\partial X) \subset X' \setminus A'$; soit $\rho : X \to f^{-1}(A')$ une rétraction qui est à la fois une $\mathscr{C}^r$-submer-*

sion. Alors $\mathscr{C}^r(X, X')$ *contient un voisinage* $\mathscr{U}$ *de l'application* f *tel que* $g \in \mathscr{U}$ *implique*:

(i) g *est transversale à* A';

(ii) $g(\partial X) \subset X' \setminus A'$;

(iii) $\rho \mid_{g^{-1}(A')}: g^{-1}(A') \to f^{-1}(A')$ *est une submersion.*

Démonstration. Définissons $\mathscr{U}$ comme l'intersection de trois ensembles ouverts $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$, $\mathscr{U}_3$ qu'il faut construire. Le premier, $\mathscr{U}_1$, est l'ensemble des applications appartenant à $\mathscr{C}^r(X, X')$ qui sont transversales à A'. Le deuxième, $\mathscr{U}_2$, est l'ensemble des applications $g \in \mathscr{C}^r(X, X')$ telles que $g(\partial X) \subset X' \setminus A'$. Le troisième, $\mathscr{U}_3$, est l'ensemble des applications $g \in \mathscr{C}^r(X, X')$ telles que pour chaque point $x \in g^{-1}(A')$ les sous-espaces $\operatorname{Ker} d_x\rho$ et $(d_x g)^{-1}(\operatorname{Tang}_{g(x)} A')$ de l'espace $\operatorname{Tang}_x X$ se coupent en un point unique 0.

Nous savons déjà que l'ensemble $\mathscr{U}_1$ est ouvert (voir 7.5). Le fait que l'ensemble $\mathscr{U}_2$ est ouvert découle de la compacité de l'ensemble ∂X et du fait que l'ensemble $X' \setminus A'$ est ouvert. Nous établirons que l'ensemble $\mathscr{U}_3$ est ouvert en lui donnant une nouvelle description. Pour cela fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement $j: X \to \mathbf{R}^q$ quelconque et désignons par C la partie de la variété $\operatorname{Tang} X$ constituée des vecteurs u qui vérifient $d\rho(u) = 0$ et $\langle dj(u), dj(u) \rangle = 1$. Il est clair que $\mathscr{U}_3$ coïncide avec l'ensemble des applications $g \in \mathscr{C}^r(X, X')$ pour lesquelles $dg(C) \subset \operatorname{Tang} X' \setminus \operatorname{Tang} A'$. Le fait que ce dernier ensemble est ouvert découle de la compacité de l'ensemble C, du fait que l'ensemble $\operatorname{Tang} X' \setminus \operatorname{Tang} A'$ est ouvert dans $\operatorname{Tang} X'$ et de la continuité de l'application de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ dans $\mathscr{C}^{r-1}(\operatorname{Tang} X, \operatorname{Tang} X')$, qui fait correspondre à chaque application de $\mathscr{C}^r(X, X')$ sa différentielle (voir 1.1).

Ainsi l'ensemble $\mathscr{U}$ est ouvert; il est clair que $f \in \mathscr{U}$ et que les applications $g \in \mathscr{U}$ vérifient (i), (ii). On établit sans difficulté que la condition (iii) est également vérifiée: en effet, l'inclusion $g \in \mathscr{U}_1$ implique que $g^{-1}(A')$ est une sous-variété propre de la variété X (voir 8.2); l'inclusion $g \in \mathscr{U}_2$ permet d'affirmer que cette sous-variété est contenue dans $\operatorname{int} X$; elle est donc fermée lorsqu'on l'envisage comme une variété indépendante; enfin, l'inclusion $g \in \mathscr{U}_3$ implique que la différentielle $d_x(\rho \mid_{g^{-1}(A')})$ est non dégénérée pour tout $x \in g^{-1}(A')$.

3 (Lemme). *Soient* X, X' *des variétés différentiables fermées de même dimension et soit* $f: X \to X'$ *une submersion. Si la variété* X' *est connexe et l'image inverse d'un de ses points est un point unique, alors* f *est un difféomorphisme.*

Il suffit d'établir que f est bijective. Posons $A' = f(X)$ et désignons par B' l'ensemble des points de la variété X' dont les images inverses sont constituées par plus d'un point. L'ensemble A' est ouvert puisque l'application f, étant une submersion, est ouverte (voir 1.5.8). L'ensemble B' est également ouvert: si $f(x_1) = f(x_2) =$

$= x'$ et $x_2 \neq x_1$, alors x_1, x_2 possèdent dans X des voisinages disjoints U_1, U_2 tels que $f|_{U_1}$, $f|_{U_2}$ sont des plongements différentiables, tandis que $f(U_1) \cap f(U_2)$ est un voisinage du point x' contenu dans B'. D'autre part, les ensembles A', B' sont fermés: le premier parce que X est compact, le deuxième parce que pour des ensembles $U_1, \ldots, U_s$ ouverts recouvrant X les restrictions $f|_{U_i}$ sont des plongements différentiables

$$B' = \bigcap_{i=1}^{s} f(X \setminus U_i),$$

tandis que les ensembles $f(X \setminus U_i)$ sont fermés. Comme, enfin, X' est connexe, A' est non vide et B' ne coïncide pas avec X', on a $A' = X'$ et $B' = \emptyset$, i. e. f est bijective.

4 (Lemme). *Soit X une $\mathscr{C}^r$-sous-variété compacte de l'espace R^q pour $1 \leqslant r \leqslant \infty$; soient U son voisinage dans R^q et X' un sous-ensemble ouvert d'une $\mathscr{C}^a$-variété fermée qui admet un $\mathscr{C}^a$-plongement dans l'espace euclidien. Si f est une application appartenant à $\mathscr{C}^r(U, X')$, alors chaque voisinage dans $\mathscr{C}^r(X, X')$ de la restriction $f|_X$ contient la restriction d'une application appartenant à $\mathscr{C}^a(U, X')$.*

Démonstration. Nous supposons tout d'abord que X' est lui-même une $\mathscr{C}^a$-variété fermée. Désignons par $\mathscr{U}$ le voisinage donné de la restriction $f|_X$ dans $\mathscr{C}^r(X, X')$ et fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement $j' : X' \to \mathsf{R}^{q'}$, sa $\mathscr{C}^a$-transversalisation τ' et un tube propre $\mathrm{Tub}_{\tau'}\, \rho'$. Puisque l'application

$$\mathscr{C}^r(\mathrm{id}, \mathrm{pr}_{\tau'}) : \mathscr{C}^r(X, \mathrm{tub}_{\tau'}\, \rho') \to \mathscr{C}^r(X, X')$$

est continue, l'image inverse de l'ensemble $\mathscr{U}$ par cette application est ouverte; elle n'est pas vide puisqu'elle contient la composée des applications $[\mathrm{ab}\, j' : X' \to \mathrm{tub}_{\tau'}\, \rho'] \circ f$. Donc, d'après le théorème 3.1.4, il existe une application $g : U \to \mathrm{tub}_{\tau'}\, \rho'$ (définie en coordonnées par les fonctions polynômiales) dont la restriction à X appartient à cette image inverse; il est clair que la composée $\mathrm{pr}_{\tau'} \circ g$ est l'application cherchée appartenant à $\mathscr{C}^a(U, X')$.

Le cas général se réduit au cas considéré: si X' est un sous-ensemble ouvert d'une $\mathscr{C}^a$-variété fermée Y, alors l'application

$$\mathscr{C}^r(\mathrm{id}, \mathrm{in}) : \mathscr{C}^r(X, X') \to \mathscr{C}^r(X, Y)$$

est un plongement topologique à image ouverte; elle envoie $\mathscr{C}^a(X, X')$ sur l'intersection de cette image avec $\mathscr{C}^a(X, Y)$ (voir 4.6).

5 (Lemme). *Pour chaque $\mathscr{C}^r$-sous-variété compacte X de dimension q de l'espace R^q, avec $1 \leqslant r \leqslant a$, et chaque sous-ensemble compact A de l'espace R^q, l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-plongements $f : X \to \mathsf{R}^q$ tels que $f(\mathrm{Int}\, X) \supset A$ est ouvert dans $\mathscr{C}^r(X, \mathsf{R}^q)$.*

(Dans le présent sous-paragraphe on se borne au cas où A est un point. Sous sa forme générale le lemme sera utilisé au sous-paragraphe suivant.)

Démonstration. Supposons d'abord que A est une boule de l'espace $\mathbf{R}^q$. Soient c et ρ le centre et le rayon de cette boule; désignons par $f: X \to \mathbf{R}^q$ un plongement de classe $\mathscr{C}^r$ vérifiant $f(\operatorname{Int} X) \supset A$. Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-plongements $g: X \to \mathbf{R}^q$ tels que pour chaque point $x \in X$, on a

$$\operatorname{dist}(f(x), g(x)) < \min(\rho, \operatorname{Dist}(f(\operatorname{Fr} X), A)).$$

Etant donné que $\mathscr{U}$ est ouvert dans $\mathscr{C}^r(X, \mathbf{R}^q)$ (voir 1.4) et contient f, il suffit de montrer que $g \in \mathscr{U}$ implique $g(\operatorname{Int} X) \supset A$. Mais si $g \in \mathscr{U}$, alors l'intersection $g(\operatorname{Fr} X) \cap A$ est vide, de sorte que les ensembles $g(X) \cap A$, $g(\operatorname{Int} X) \cap A$ coïncident, alors que le premier d'entre eux est fermé et le deuxième ouvert dans A. En outre, l'ensemble $g(\operatorname{Int} X) \cap A$ contient $g(f^{-1}(c))$ (puisque $\operatorname{dist}(g(f^{-1}(c)), c) < \rho$); par conséquent, il n'est pas vide. Donc $g(\operatorname{Int} X) \cap A = A$, i.e. $g(\operatorname{Int} X) \supset A$.

Un cas plus général où A est la réunion d'un nombre fini de boules se réduit de façon évidente au cas considéré. Il suffit maintenant de remarquer que, dans le cas le plus général, pour tout $\mathscr{C}^1$-plongement $f: X \to \mathbf{R}^q$ vérifiant $f(\operatorname{Int} X) \supset A$, il existe un nombre fini de boules dont la réunion contient A, tout en étant contenue dans $f(\operatorname{Int} X)$.

6. Pour toute $\mathscr{C}^r$-variété fermée X $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ il existe une $\mathscr{C}^a$-sous-variété de l'espace euclidien qui est $\mathscr{C}^r$-difféomorphe à X.

Il suffit d'effectuer la démonstration pour X connexe. Fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement $j: X \to \mathbf{R}^q$, sa $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ et un tube propre $\operatorname{Tub}_\tau \rho$; envisageons l'application

$$f: \operatorname{Tub}_\tau \rho \to G'(q, n = \dim X)$$

qui fait correspondre au point $y \in \operatorname{Tub}_\tau \rho$ le plan $y - j \circ \operatorname{pr}_\tau(y) + (\tau \circ \operatorname{pr}_\tau(y))^\perp$ (qui passe par le point $y - j \circ \operatorname{pr}_\tau y$ perpendiculairement à $\tau \circ \operatorname{pr}_\tau(y)$). Il est clair que f est transversale à $G(q, n)$ (car le sont déjà les restrictions de f aux images inverses $\operatorname{pr}_\tau^{-1}(x)$ des points $x \in X$) et que $f^{-1}(G(q, n)) = j(X)$.

Choisissons dans X un point quelconque x_0 et désignons par V la partie de la variété $G'(q, n)$ constituée des plans transversaux à $\tau(x_0)$ (i.e. des plans dont l'intersection avec $\tau(x_0)$ est un seul point); désignons par π l'application de l'ensemble V dans $\tau(x_0)$ qui fait correspondre à chaque plan de V son point d'intersection avec $\tau(x_0)$. D'après le lemme *2*, la restriction $f|_{\operatorname{Tub}_\tau(\rho/2)}$ possède dans $\mathscr{C}^r(\operatorname{Tub}_\tau(\rho/2), G'(q, n))$ un voisinage $\mathscr{U}$ tel que chaque $g \in \mathscr{U}$ est transversal à $G(q, n)$, l'image $g(\partial \operatorname{Tub}_\tau(\rho/2))$ est contenue dans $G'(q, n) \setminus G(q, n)$ et ab $\operatorname{pr}_\tau: g^{-1}(G'(q, n)) \to X$ est une submersion. Ensuite, d'après le lemme *5*, l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-plongements $\varphi: d_\tau(x_0, \rho/2) \to \tau(x_0)$ tels que $\varphi(\operatorname{Int} d_\tau(x_0, \rho/2)) \ni 0$ est ouvert dans $\mathscr{C}^r(d_\tau(x_0, \rho/2), \tau(x_0))$ et par conséquent $f|_{\operatorname{Tub}_\tau(\rho/2)}$ possède

dans $\mathscr{C}^r(\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2), G'(q, n))$ un voisinage $\mathscr{V}$ tel que si $g \in \mathscr{V}$, alors $g(d_\tau(x_0, \rho/2)) \subset V$ et $\pi \circ [\mathrm{ab}\, g\colon d_\tau(x_0, \rho/2) \to V]$ est un $\mathscr{C}^r$-plongement dont l'image contient 0. Puisque $G'(q, n)$ est un sous-ensemble ouvert d'une $\mathscr{C}^a$-variété fermée admettant un $\mathscr{C}^a$-plongement dans l'espace euclidien (voir 2.2.10), le lemme *4* implique l'existence d'une $\mathscr{C}^a$-application $h\colon \mathrm{tub}_\tau \rho \to G'(q, n)$ dont la restriction à $\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)$ appartient à $\mathscr{U} \cap \mathscr{V}$.

Posons $Y = [h \mid_{\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)}]^{-1}(G(q, n))$. D'après le théorème 8.2, Y est une $\mathscr{C}^a$-variété et il reste à remarquer que $\mathrm{pr}_\tau \mid_Y\colon Y \to X$ est un difféomorphisme. Ce dernier fait découle du lemme *3*. L'inclusion $h \mid_{\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)} \in \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$ nous convainc que les conditions de ce lemme sont satisfaites: en effet, l'inclusion $h \mid_{\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)} \in \mathscr{U}$ montre que $\mathrm{pr}_\tau \mid_Y$ est une submersion tandis que l'inclusion $h \mid_{\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)} \in \mathscr{V}$ prouve que $(\mathrm{pr}_\tau \mid_Y)^{-1}(x_0)$ se réduit à un point.

7 (Lemme). *Soit X une $\mathscr{C}^r$-variété fermée avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et soient A, B ses sous-variétés compactes telles que $A \subset \mathrm{int}\, B$ et $\dim B = \dim X$. Si B possède une $\mathscr{C}^\infty$-structure qui est restriction de sa $\mathscr{C}^r$-structure, alors pour toute $\mathscr{C}^\infty$-variété fermée X' la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ constituée des applications qui prolongent celles de $\mathscr{C}^\infty(A, X')$ est dense dans $\mathscr{C}^r(X, X')$.*

Démonstration. Nous devons montrer qu'un voisinage donné $\mathscr{U}$ d'une application donnée f contient dans $\mathscr{C}^r(X, X')$ une application qui prolonge une application appartenant à $\mathscr{C}^\infty(A, X')$. Fixons un $\mathscr{C}^\infty$-plongement $j'\colon X' \to \mathbf{R}^{q'}$, sa $\mathscr{C}^\infty$-transversalisation τ' et un tube propre $\mathrm{Tub}_{\tau'}\rho'$; désignons par $\mathscr{V}$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(B, X')$ constituée des applications g pour lesquelles

$$\max_{x \in B} \mathrm{dist}\,(j' \circ f(x), j'(g(x))) < \mathrm{Dist}\,(j'(X'), \mathbf{R}^{q'} \setminus \mathrm{tub}_{\tau'}\rho').$$

Il est clair que l'ensemble $\mathscr{V}$ est ouvert et que le segment à extrémités $j' \circ f(x)$, $j'(g(x))$ est contenu dans $\mathrm{tub}_{\tau'}\rho'$ quels que soient $g \in \mathscr{V}$, $x \in B$. Fixons un voisinage U de l'ensemble ∂B (dans B) tel que $\mathrm{Cl}\, U \cap A = \varnothing$ et construisons une $\mathscr{C}^\infty$-fonction d'Urysohn $\varphi\colon B \to I$ du couple $\mathrm{Cl}\, U$, A; envisageons l'application $\Phi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{C}^r(X, X')$ qui envoie g dans l'application

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \setminus B, \\ \mathrm{pr}_{\tau'}((1-\varphi(x))\, j' \circ f(x) + \varphi(x)\, j'(g(x))) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Il est évident que Φ est continue et que $\Phi(f \mid_B) = f$. Il découle des propriétés de Φ que l'ensemble $\Phi^{-1}(\mathscr{U})$ est ouvert et non vide, d'où l'on tire, en vertu du théorème 6.5, qu'il contient des $\mathscr{C}^\infty$-applications. Il suffit maintenant de remarquer que Φ envoie les $\mathscr{C}^\infty$-applications dans des applications qui prolongent celles de $\mathscr{C}^\infty(A, X')$.

8. Toute $\mathscr{C}^r$-variété compacte avec $1 \leqslant r < \infty$ est difféomorphe à une $\mathscr{C}^\infty$-variété. Qui plus est, si X est une $\mathscr{C}^r$-variété compacte avec $1 \leqslant r < \infty$, Y une variété de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\psi: Y \to \partial X$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^r$, alors il existe une $\mathscr{C}^\infty$-variété X' et un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme $\varphi: X \to X'$ tels que l'application composée

$$Y \xrightarrow{\psi} \partial X \xrightarrow{\mathrm{ab}\,\varphi} \partial X'$$

est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

Démonstration. La composée du $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme

$$\psi \times \mathrm{id}: Y \times [-1, 1] \to \partial X \times [-1, 1]$$

avec un col bilatère quelconque de classe $\mathscr{C}^r$

$$\partial X \times [-1, 1] \to \mathrm{dopp}\, X$$

est un $\mathscr{C}^r$-plongement

$$Y \times [-1, 1] \to \mathrm{dopp}\, X.$$

Puisque $Y \times [-1, 1]$ est une variété de classe $\mathscr{C}^\infty$, l'image B de ce plongement se munit d'une $\mathscr{C}^\infty$-structure par restriction de la $\mathscr{C}^r$-structure induite; il est clair que $\partial X \subset \mathrm{int}\, B$. D'après le théorème *6*, il existe une $\mathscr{C}^a$-variété fermée Z avec un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme $\mathrm{dopp}\, X \to Z$, tandis que le lemme *7* el le théorème 1.6 impliquent que ce difféomorphisme peut être choisi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ∂X. Prenons pour X' l'image de la variété X par ce difféomorphisme et pour φ l'abréviation de ce difféomorphisme en un difféomorphisme de X sur X'. Il est évident que X' et φ possèdent les propriétés nécessaires.

9 (Information). Les théorèmes *6* et *8* sont également valables pour les variétés non compactes, et dans le théorème *8* on peut écrire a à la place de ∞. Néanmoins, dans ces théorèmes, on ne peut se débarrasser de la condition $r \geqslant 1$ car il existe des variétés topologiques fermées qui ne sont pas homéomorphes à des variétés différentiables. Le premier exemple de ce type a été indiqué dans [12].

Application : extension du théorème 7.7

10. Soient X_1, X_2, X' des variétés compactes de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ avec $1 \leqslant r < \infty$. Si X' est fermée, alors la partie du produit $\mathscr{C}^r(X_1, X') \times \mathscr{C}^r(X_2, X')$ constituée des couples transversaux (f_1, f_2) est partout dense.

Démonstration. D'après le théorème *8*, il existe des $\mathscr{C}^\infty$-variétés Y_1, Y_2, Y' et des $\mathscr{C}^r$-difféomorphismes $Y_1 \to X_1$, $Y_2 \to X_2$, $Y' \to X'$; il suffit donc de démontrer que les couples transversaux forment un ensemble dense dans $\mathscr{C}^r(Y_1, Y') \times \mathscr{C}^r(Y_2, Y')$. Mais d'après le théorème 7.7, de tels couples cons-

tituent un ensemble partout dense dans $\mathscr{C}^\infty(Y_1, Y') \times \mathscr{C}^\infty(Y_2, Y')$ tandis que d'après le théorème 6.5 ce produit est partout dense dans $\mathscr{C}^r(Y_1, Y') \times \mathscr{C}^r(Y_2, Y')$.

10. Approximation des applications par des plongements et des immersions

1. Dans ce sous-paragraphe nous menons à bien le programme indiqué dans 4.1. Les principaux résultats sont résumés dans les théorèmes *4* et *5*. Leur fondement technique est le lemme *3* dont on peut tirer d'autres conséquences; voir par exemple 11.11, 11.12 et 11.13.

Variétés auxiliaires

2. Soient X une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété fermée de dimension n avec $1 \leqslant r \leqslant a$, et $j: X \to \mathsf{R}^q$ un plongement de classe $\mathscr{C}^r$. Soit d'autre part m un entier positif non supérieur à q. Nous aurons besoin de deux constructions.

Première construction: désignons par Aux_1 ou, en notation plus détaillée, par $\mathrm{Aux}_1(j; m)$ la partie du produit $\mathrm{Tang}\, X \times G(q, m)$ constituée des couples (u, γ) tels que $\langle dj(u), dj(u)\rangle = 1$ et $dj(u) \in \gamma$, et par aux_1 une application de l'ensemble Aux_1 dans $G'(q, m)$ définie par la formule

$$\mathrm{aux}_1(u, \gamma) = j(\mathrm{pr}(u)) + \gamma, \text{ où } \mathrm{pr} = [\mathrm{pr}: \mathrm{Tang}\, X \to X].$$

L'ensemble Aux_1 est une sous-variété de dimension $2n - 1 + (m - 1)(q - m)$ du produit $\mathrm{Tang}\, X \times G(q, m)$ (c'est l'image inverse de la sous-variété $S^{q-1} \times G(q, m)$ du produit $\mathsf{R}^q \times G'(q, m)$ par l'application du produit $\mathrm{Tang}\, X \times G(q, m)$ dans $\mathsf{R}^q \times G'(q, m)$ définie par la formule $(u, \gamma) \mapsto (dj(u), dj(u) + \gamma)$; cette application est transversale à $S^{q-1} \times G(q, m)$). L'application aux_1 est de classe $\mathscr{C}^{r-1}$ et son image est constituée de tous les plans de dimension m de l'espace R^q qui contiennent des droites tangentes à $j(X)$.

Deuxième construction: désignons par Aux_2 ou, en notation plus détaillée, $\mathrm{Aux}_2(j; m)$ la partie du produit $X \times X \times G(q, m)$ constituée de triplets (x, x', γ) tels que $x \neq x'$ et $j(x') - j(x) \in \gamma$; désignons par aux_2 une application de l'ensemble Aux_2 dans $G'(q, m)$ définie par la formule

$$\mathrm{aux}_2(x, x', \gamma) = j(x) + \gamma.$$

L'ensemble Aux_2 est une sous-variété de dimension $2n + (m - 1)(q - m)$ du produit $X \times X \times G(q, m)$ (c'est l'image inverse de la sous-variété $G(q, m)$ de la variété $G'(q, m)$ par l'application du produit $((X \times X) \setminus \mathrm{diag}(X)) \times G(q, m)$ dans $G'(q, m)$ définie par la formule $(x, x', \gamma) \mapsto j(x') - j(x) + \gamma$; cette applica-

tion est transversale à $G(q, m)$). L'application aux_2 est de classe $\mathscr{C}^r$ et son image est constituée de tous les plans de dimension m de l'espace R^q qui ont plus d'un point commun avec $j(X)$.

Théorème fondamental

3 (Lemme). *Soient X une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété fermée de dimension n (avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$) et $j: X \to \mathsf{R}^q$ un plongement de classe $\mathscr{C}^r$ muni d'une $\mathscr{C}^r$-transversalisation $\tau: X \to G(q, q-n)$ et d'un tube propre $\mathrm{Tub}_\tau\rho$. Il existe alors dans l'espace $\mathscr{C}^r(X, G'(q, q-n))$ un voisinage $\mathscr{U}$ de l'application $\tilde{\tau}: X \to G'(q, q-n)$ (voir 3.2) et une application continue $\Phi: \mathscr{U} \to \mathrm{Diff}^r X$ tels que pour chaque application $g \in \mathscr{U}$ on a*

(i) $[j \circ \Phi(g)](x) \in g(x)$ *pour* $x \in X$;

(ii) *l'application* $\tau_g: X \to G(q, q-n)$ *définie par la formule* $\tau_g(x) = g(x) - [j \circ \Phi(g)](x)$ *est transversalisation du plongement* $j \circ \Phi(g): X \to \mathsf{R}^q$;

(iii) *un tube propre de cette transversalisation contient le tube* $\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)$.

Démonstration. Pour $g \in \mathscr{C}^r(X, G'(q, q-n))$, désignons par h_g l'application du tube $\mathrm{Tub}_\tau\rho$ dans R^q qui envoie chaque point $y \in \mathrm{Tub}_\tau\rho$ dans son image par projection orthogonale sur le plan $g(\mathrm{pr}_\tau(y))$. Il est évident que $g \mapsto h_g$ est une application continue de l'espace $\mathscr{C}^r(X, G'(q, q-n))$ dans $\mathscr{C}^r(\mathrm{Tub}_\tau\rho, \mathsf{R}^q)$; il est clair que si $g = \tilde{\tau}$, on a $h_g = [\mathrm{in}: \mathrm{Tub}_\tau\rho \mapsto \mathsf{R}^q]$; par conséquent, $\tilde{\tau}$ possède dans $\mathscr{C}^r(X, G'(q, q-n))$ un voisinage $\mathscr{V}$ tel que $g \in \mathscr{V}$ implique que h_g est un plongement de classe $\mathscr{C}^r$ et $h_g(\mathrm{tub}_\tau\rho) \supset \mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)$ (voir 9.5). Pour $g \in \mathscr{V}$ désignons par i_g l'application composée

$$X \xrightarrow{\mathrm{ab}\, j} \mathrm{Tub}_\tau(\rho/2) \xrightarrow{(\mathrm{ab}\, h_g)^{-1}} h_g^{-1}(\mathrm{Tub}_\tau(\rho/2)) \xrightarrow{\mathrm{in}} \mathrm{Tub}_\tau\rho \xrightarrow{\mathrm{pr}_\tau} X.$$

Une vérification immédiate montre que $g \mapsto i_g$ est une application continue du voisinage $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{C}^r(X, X)$ et que $i_{\tilde{\tau}} = \mathrm{id}$. Par conséquent, g possède dans $\mathscr{V}$ un voisinage $\mathscr{U}$ tel que si $g \in \mathscr{U}$, i_g est un difféomorphisme; posons $\Phi(g) = i_g^{-1}$. Il est évident que Φ est continue et $\mathscr{U}$ et Φ vérifient les conditions (i), (ii), (iii).

4. Si X est une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété compacte de dimension n, avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$, et X' une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété fermée de dimension n', alors, pour $n' \geqslant 2n$, l'ensemble $\mathrm{Imm}^r(X, X')$ *est dense dans* $\mathscr{C}^r(X, X')$ *et pour $n' \geqslant 2n+1$ l'ensemble* $\mathrm{Emb}^r(X, X')$ *est dense dans* $\mathscr{C}^r(X, X')$.

Il suffit d'effectuer la démonstration dans le cas où $r = \infty$: le cas $r < \infty$ se réduit au cas $r = \infty$ à l'aide des théorèmes 9.6 et 6.5. Soient f une application appartenant à $\mathscr{C}^\infty(X, X')$ et $\mathscr{U}$ son voisinage. Il faut démontrer que si $n' \geqslant 2n$, $\mathscr{U}$ contient une immersion; si $n' \geqslant 2n+1$, $\mathscr{U}^\infty$ contient un plongement différentiable.

Fixons des $\mathscr{C}^\infty$-plongements $j: X \to \mathsf{R}^q$, $j': X' \to \mathsf{R}^{q'}$ et définissons un plongement $J': X' \to \mathsf{R}^{q'+q} = \mathsf{R}^{q'} \times \mathsf{R}^q$ par la formule $J'(x') = (j'(x'), 0)$. Choisissons ensuite une $\mathscr{C}^\infty$-transversalisation τ' du plongement J' et un tube propre $\mathrm{Tub}_{\tau'}\rho'$. Quel que soit $t > 0$, la formule $J_t(x) = (j'(f(x)), tj(x))$ détermine évidemment un $\mathscr{C}^\infty$-plongement $J_t: X \to \mathsf{R}^{q'+q}$. Choisissons ε si petit que l'image $J_\varepsilon(X)$ soit contenue dans $\mathrm{Tub}_{\tau'}(\rho'/2)$ et désignons plus brièvement J_ε par J. En vertu du lemme 3 (appliqué à la variété X', au plongement J', à la transversalisation τ' et au tube $\mathrm{Tub}_{\tau'}\rho'$), il correspond dans $\mathscr{C}^\infty(X', G'(q'+q, q'+q-n'))$ un voisinage $\mathscr{U}'$ de l'application $(\tau')^\sim$ et une application continue $\Phi': \mathscr{U}' \to \mathrm{Diff}^\infty X'$ tels que pour $g' \in \mathscr{U}'$ on a :

(i) $[J' \circ \Phi'(g')](x') \in g'(x')$, où $x' \in X'$;

(ii) l'application $\tau'_{g'}: X' \to G(q'+q, q'+q-n')$ définie par la formule $\tau'_{g'}(x') = g'(x') - [J' \circ \Phi'(g')](x)$ est une transversalisation du plongement $J \circ \Phi'(g')$;

(iii) un tube propre de cette transversalisation contient $\mathrm{Tub}_{\tau'}(\rho'/2)$.

Envisageons l'application $\Psi': \mathscr{U}' \to \mathscr{C}^\infty(X, X')$ définie par la formule $[\Psi'(g')](x) = \mathrm{pr}_{\tau'_{g'}}(J(x))$. Elle est continue et envoie τ' dans f, de sorte que l'ensemble $(\Psi')^{-1}(\mathscr{U})$ est ouvert dans $\mathscr{C}^\infty(X', G'(q'+q, q'+q-n'))$ et n'est pas vide. En vertu du théorème 7.7, il en découle que $(\Psi')^{-1}(\mathscr{U})$ contient une application h transversale aux applications

$$\mathrm{aux}_1: \mathrm{Aux}_1(J; q'+q-n') \to G'(q'+q, q'+q-n'),$$

$$\mathrm{aux}_2: \mathrm{Aux}_2(J; q'+q-n') \to G'(q'+q, q'+q-n').$$

Nous montrerons que $\Psi'(h)$ est une immersion lorsque $n' \geqslant 2n$ et un plongement différentiable lorsque $n' \geqslant 2n+1$. Ceci terminera la démonstration puisque $\Psi'(h) \in \mathscr{U}$.

L'inégalité $n' \geqslant 2n$ est équivalente à l'inégalité

$$\dim X' + \dim \mathrm{Aux}_1(J; q'+q-n') < \\ < \dim G'(q'+q, q'+q-n');$$

par conséquent, pour $n' \geqslant 2n$, la transversalité des applications aux_1 et h signifie que $h(X')$ ne coupe pas $\mathrm{Im}\,\mathrm{aux}_1$, i. e. aucun des plans $h(x')$ pour $x' \in X'$ ne contient de droite tangente à $J(X)$. Ce dernier fait signifie à son tour que, pour chaque point $y \in J(X)$, la différentielle $d_y(\mathrm{pr}_{\tau'_h}|_{J(X)})$ de la restriction $\mathrm{pr}_{\tau'_h}|_{J(X)}$ est un monomorphisme, i.e. cette restriction et en même temps l'application $\Psi'(h)$ sont des immersions.

L'inégalité $n' \geqslant 2n + 1$ est équivalente à l'inégalité

$$\dim X' + \dim \mathrm{Aux}_2 (J\,;\ q' + q - n') < \\ < \dim G' (q' + q,\ q' + q - n')$$

et par conséquent, pour $n' \geqslant 2n + 1$, la transversalité des applications aux_2 et h signifie que $h(X')$ n'a pas de point commun avec $\mathrm{Im}\ \mathrm{aux}_2$, i.e. aucun des plans $h(x')$ pour $x' \in X'$ ne coupe $J(X)$ en plus d'un point. Ce dernier fait signifie à son tour que la restriction $\mathrm{pr}_{\tau'_h}|_{J(X)}$ est injective de même que l'application $\Psi'(h)$. Etant une immersion, $\Psi'(h)$ est un plongement différentiable (voir 1.5.4).

Plongements et immersions dans les espaces euclidiens

5. Toute $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété compacte de dimension n pour $1 \leqslant r \leqslant \infty$ admet une $\mathscr{C}^r$-immersion dans R^{2n} et un $\mathscr{C}^r$-plongement dans R^{2n+1}.

Ceci découle du théorème *4* (on prend pour X la variété donnée, et pour X' d'abord la sphère S^{2n} et ensuite la sphère S^{2n+1}; nous laissons de côté le cas trivial $n = 0$).

6 (Information). En fait, chaque $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété de dimension n pour $r \geqslant 1$ admet un $\mathscr{C}^r$-plongement dans R^{2n} pour $n \geqslant 1$ et une $\mathscr{C}^r$-immersion dans R^{2n-1} pour $n \geqslant 2$. Lorsque n est positif et n'est pas une puissance de deux, toute $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété de dimension n pour $r \geqslant 1$ admet un $\mathscr{C}^r$-plongement dans R^{2n-1}, tandis que quel que soit $n = 2^s$, $s \geqslant 0$, il existe des variétés différentiables fermées de dimension n n'admettant même pas de plongements topologiques dans R^{2n-1} (tel est, par exemple, $\mathsf{R}P^n$). Toute $\mathscr{C}^r$-variété de dimension n, $r \geqslant 1$, sans composantes fermées, admet un $\mathscr{C}^r$-plongement dans R^{2n-1}. Toute $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété orientable de dimension n, pour $r \geqslant 1$ et $n \neq 1, 4$, admet un $\mathscr{C}^r$-plongement dans R^{2n-1}. (On ne sait pas si une variété différentiable fermée orientable de dimension quatre admet un plongement différentiable dans R^7; un plongement topologique est toujours possible.)

Pour plus de détails et les références voir [20] et [18].

11. Exercices

1. Montrer que, pour des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés X, X' quelconques, $0 \leqslant r \leqslant \infty$, l'espace $\mathscr{C}^r(X, X')$ possède une base dénombrable.

2. Montrer que si X est une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété compacte avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et X' une $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété quelconque, alors l'ensemble $\mathrm{Subm}^r(X, X') \cap \mathscr{C}^r_\partial(X, X')$ est ouvert dans $\mathscr{C}^r_\partial(X, X')$.

3. Montrer que toute variété topologique compacte est un SCNR (voir 5.10).

4. Soit X une sous-variété différentiable de dimension un du plan $\mathbf{R}^2$, fermée en tant que variété indépendante et contenant le graphe de la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ sur l'intervalle $]0, 1[$; soit τ la transversalisation normale de l'inclusion $X \to \mathbf{R}^2$. Montrer que pour tout ρ le segment $d_\tau((0, 0), \rho)$ coupe le segment $d_\tau(x, \rho)$ pour un certain $x \neq (0, 0)$ (comparer à 3.2).

5. Soient X une $\mathscr{C}^r$-variété compacte avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$, et A sa sous-variété. Montrer que, pour un choix approprié du col de la variété X, la réunion $A \cup \operatorname{cop}(A)$ est une sous-variété de la variété dopp X.

6. Soient X, Y des $\mathscr{C}^r$-variétés compactes avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Montrer que :

(i) le produit $X \times Y$ possède une $\mathscr{C}^r$-structure qui induit sur $\operatorname{int} X \times Y$ et $X \times \operatorname{int} Y$ la $\mathscr{C}^r$-structure usuelle ;

(ii) la $\mathscr{C}^r$-variété obtenue en munissant $X \times Y$ d'une $\mathscr{C}^r$-structure possédant les propriétés indiquées est unique à un difféomorphisme près.

7. Soient X_1, X_2, X' des $\mathscr{C}^\infty$-variétés compactes et $f_2 \in \mathscr{C}^\infty_\partial(X_2, X')$. Montrer que le sous-ensemble de l'espace $\mathscr{C}^\infty_\partial(X_1, X')$ constitué de toutes les applications transversales à f_2 est dense dans cet espace.

8. Supposons que X_1, X_2, X' et f_2 ont la même signification que dans *7*. Montrer que pour un choix arbitraire d'une $\mathscr{C}^\infty$-application $\varphi : \partial X_1 \to \partial X'$ transversale à $\operatorname{ab} f_2 : \partial X_2 \to \partial X'$, la partie de l'espace $\mathscr{C}^\infty_\partial(X_1, X')$, constituée des prolongements de l'application φ transversaux à f_2, est dense dans la partie de cet espace constituée des prolongements de l'application φ.

9. Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés compactes avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et $\varphi : \partial X \to \partial X'$ une immersion de classe $\mathscr{C}^r$. Montrer que si $\dim X' \geqslant 2 \dim X$, alors la partie de l'espace $\mathscr{C}^r_\partial(X, X')$ constituée des $\mathscr{C}^r$-immersions qui prolongent φ est dense dans la partie de cet espace constituée des prolongements de l'application φ.

10. Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés compactes avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$, et supposons que $\varphi : \partial X \to \partial X'$ est un plongement de classe $\mathscr{C}^r$. Montrer que si $\dim X' \geqslant 2 \dim X + 1$, alors la partie de l'espace $\mathscr{C}^r_\partial(X, X')$ constituée des $\mathscr{C}^r$-plongements qui prolongent φ est dense dans la partie de cet espace constituée des prolongements de l'application φ. (En particulier, toute $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété compacte de dimension n admet un plongement propre dans D^{2n+1}.)

11. Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Montrer que l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-applications $f : X \to X'$ pour lesquelles $\operatorname{Tang}_{f(x_1)} X' = \operatorname{Im} d_{x_1} f + \operatorname{Im} d_{x_2} f$ quels que soient deux points distincts $x_1, x_2 \in X$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$, est dense dans $\mathscr{C}^r(X, X')$.

12. Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Montrer que si $\dim X' = 2 \dim X - 1$, l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-applications $f: X \to X'$ pour lesquelles le rang de la différentielle $d_x f$ est égal à $\dim X$ en tous les points $x \in X$ (sauf éventuellement un nombre fini de points où ce rang est égal à $\dim X - 1$) est dense dans $\mathscr{C}^r(X, X')$.

13. Soient X, X' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variétés fermées avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Montrer que si $2 \dim X' > 3 \dim X$, l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-applications $f: X \to X'$ dont les images inverses des points contiennent au plus deux points est dense dans $\mathscr{C}^r(X, X')$.

§ 5. THÉORÈMES STRUCTURAUX ÉLÉMENTAIRES

1. Fonctions de Morse

1. Le théorème central du présent paragraphe est le théorème 2.10. Il affirme que chaque $\mathscr{C}^\infty$-variété compacte de dimension n peut être obtenue à partir d'une variété vide de dimension n par un nombre fini d'opérations canoniques qui sont appelées *additions d'anses*. L'exposé qui précède le théorème 2.10 prépare son énoncé et sa démonstration, puis viennent ses conséquences. Au sous-paragraphe 3 seront énumérées, grâce à ce théorème, les variétés compactes différentiables de dimension 2.

Le fait qu'ici, contrairement aux paragraphes précédents, nous nous limitons presque toujours au $\mathscr{C}^\infty$-cas ne doit pas surprendre : les théorèmes 4.4.4, 4.6.11 et 4.9.6, 4.9.8 sur le lissage des difféomorphismes et des variétés montrent que l'utilisation à la place de la classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une classe quelconque $\mathscr{C}^r$ avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$ ne change rien aux résultats de la théorie exposée.

Cobordismes et fonctions de Morse

2. Une $\mathscr{C}^\infty$-variété compacte X est appelée *cobordisme* si la variété ∂X est partitionnée en deux sous-ensembles, $\partial_0 X$ et $\partial_1 X$, constitués de ses composantes entières. Ces parties sont appelées *origine* et *extrémité du cobordisme* X. Chacune d'elles peut être vide. Si toutes les deux le sont, alors X est fermée ; en général, on peut procéder de 2^l façons pour faire d'une $\mathscr{C}^\infty$-variété X un cobordisme, où l est le nombre de composantes du bord ∂X. Parmi ces cobordismes, il y en a toujours un qui n'a pas d'origine ($\partial_0 X = \varnothing$, $\partial_1 X = \partial X$) et un autre sans extrémité ($\partial_0 X = \partial X$, $\partial_1 X = \varnothing$).

Deux cobordismes X, X' sont dits *difféomorphes* lorsqu'il existe un difféomorphisme (et donc un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme) $f: X \to X'$ tel que $f(\partial_0 X) = \partial_0 X'$, $f(\partial_1 X) = \partial_1 X'$.

Si X, X' sont des cobordismes à bords $\partial_1 X$, $\partial_0 X'$ difféomorphes et $\varphi : \partial_1 X \to \partial_0 X'$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors la variété Y obtenue par recollement suivant φ des variétés X, X' munies de cols quelconques est également un cobordisme. Il suffit de poser $\partial_0 Y = \partial_0 X$, $\partial_1 Y = \partial_1 X'$. On dit que Y s'obtient à partir des cobordismes X, X' par recollement suivant φ. Si les cobordismes X, X' sont orientés et φ i n v e r s e l'orientation (les orientations des variétés $\partial_1 X$, $\partial_0 X'$ s'induisent par celles des variétés X, X', voir 1.3.4), alors on peut munir Y de l'orientation définie par la condition que les deux plongements $X \to Y$, $X' \to Y$ conservent l'orientation. Mise en garde : les orientations d'un cobordisme et d'une variété obtenus par recollement sont définies différemment, voir 4.5.5.

Des variétés différentiables fermées V_0, V_1 sont dites *cobordantes* lorsqu'il existe un cobordisme dont l'origine est difféomorphe à V_0 et l'extrémité à V_1. Si V_0 et V_1 sont orientées et il existe un cobordisme orienté X et deux difféomorphismes $V_0 \to \partial_0 X$, $V_1 \to \partial_1 X$ dont l'un conserve l'orientation et l'autre l'inverse, on dit que V_0, V_1 sont *cobordantes avec orientation*. Il est évident que les relations de cobordance et de cobordance orientée sont réflexives et symétriques, tandis que la possibilité de construire un cobordisme par recollement montre que ces relations sont également transitives, i.e. sont des équivalences.

3. Un point critique x d'une $\mathscr{C}^2$-fonction $f : X \to \mathbf{R}$, où X est une variété de classe $\mathscr{C}^{\geqslant 2}$, est dit *non dégénéré* si pour une certaine carte (et donc pour une carte quelconque) $\varphi \in \mathrm{Atl}_x \mathscr{C}^2 X$ le point $\varphi(x)$ est un point critique non dégénéré de la fonction $(f|_{\mathrm{supp}\,\varphi}) \circ \varphi^{-1} : \mathrm{Im}\,\varphi \to \mathbf{R}$ (voir 3.3.1). L'indice correspondant ne dépend pas du choix de la carte φ (voir 3.3.1) ; on l'appelle *indice du point x par rapport à f*.

Une $\mathscr{C}^\infty$-fonction $f : X \to \mathbf{R}$, où X est un c o b o r d i s m e, est appelée *fonction de Morse* lorsque $\mathrm{Im}\, f \subset I$; $f^{-1}(0) = \partial_0 X$ et $f^{-1}(1) = \partial_1 X$; tous les points critiques de la fonction f sont contenus dans $\mathrm{int}\, X$ et sont non dégénérés.

Une fonction de Morse est dite *propre* lorsque ses valeurs en des points critiques distincts sont distinctes.

Structure locale des fonctions de Morse

4. Soit X un cobordisme de dimension n. Si $f : X \to \mathbf{R}$ est une fonction de Morse, alors pour tout point $x \in X$ il existe une carte $\varphi \in \mathrm{Atl}_x X$, $\varphi(x) = 0$, telle que la restriction $f|_{\mathrm{supp}\,\varphi}$ coïncide avec l'application composée

$$\mathrm{supp}\,\varphi \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Im}\,\varphi \to \mathbf{R},$$

où la flèche à droite désigne la fonction

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto -t_1$$

si $x \in \partial_0 X$, *la fonction*

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto 1 + t_1$$

si $x \in \partial_1 X$, *la fonction*

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(x) + t_1$$

si x *est contenu dans* int X, *mais n'est pas un point critique de la fonction* f, *et enfin la fonction*

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(x) - t_1^2 - \ldots - t_k^2 + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2$$

si x *est un point critique d'indice* k.

Pour la démonstration dans les trois premiers cas il suffit de remarquer que la fonction $X \to \mathbf{R}$, définie par la formule $y \mapsto f(y) - f(x)$ lorsque $x \in \operatorname{int} X \cup \partial_1 X$ et par la formule $y \mapsto -f(y)$ lorsque $x \in \partial_0 X$, peut être inclue, dans un voisinage du point x, dans un système de coordonnées (voir 1.2.12). Dans le quatrième cas il suffit de faire appel au théorème 3.3.3.

5 (Corollaire). *L'ensemble des points critiques d'une fonction de Morse est fini.*

Théorème d'existence

6 (Lemme). *Pour toute* $\mathscr{C}^\infty$*-fonction* $f: D^n \to \mathbf{R}$ *il existe un sous-ensemble ouvert partout dense* A *de l'espace* $\mathbf{R}^n$ *tel que pour* $a \in A$ *la fonction* $D^n \to \mathbf{R}$ *définie par la formule*

$$x \mapsto f(x) - \langle a, x \rangle \tag{1}$$

n'a pas de points critiques dégénérés.

Démonstration. Considérons l'application grad $f: D^n \to \mathbf{R}$ exprimée en coordonnées par les fonctions $D_1 f, \ldots, D_n f$. En guise de A on peut prendre $\mathbf{R}^n \setminus [\operatorname{grad} f](F)$, où F est l'ensemble des points $x \in D^n$ tels que le rang de la différentielle $d_x \operatorname{grad} f$ est inférieur à n. En vertu du théorème 4.7.4 cet ensemble est dense, le fait qu'il est ouvert est évident. Il est également clair que si $x \in D^n$ est un point critique de la fonction (1), alors $[\operatorname{grad} f](x) = a$ et la matrice des dérivées partielles secondes de la fonction (1) au point x coïncide avec la matrice de la différentielle $d_x(\operatorname{grad} f)$ relativement aux coordonnées canoniques dans $\operatorname{Tang}_x D^n$ et $\operatorname{Tang}_a \mathbf{R}^n$; par conséquent, cette matrice est non dégénérée si $a \in A$.

7. *Il existe une fonction de Morse propre sur tout cobordisme.*

Nous montrerons d'abord que si le cobordisme X est muni d'une fonction de Morse quelconque, alors il existe également une fonction de Morse propre sur X. Soient $x_1, \ldots, x_m$ les points critiques de la fonction de Morse $f: X \to \mathbf{R}$ et $U_1, \ldots, U_m$ des voisinages deux à deux disjoints de ces points dans int X. Soient ensuite $V_1, \ldots, V_m$ des voisinages des points $x_1, \ldots, x_m$ tels que $\operatorname{Cl} V_1 \subset U_1, \ldots, \operatorname{Cl} V_m \subset U_m$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des fonctions d'Urysohn de classe

$\mathscr{C}^\infty$ des couples $(X \setminus U_1, \mathrm{Cl}\, V_1), \ldots, (X \setminus U_m, \mathrm{Cl}\, V_m)$. (L'existence de telles fonctions découle du théorème 4.7 lequel devient appliquable à notre situation si l'on prend le double de la variété X.) Il est clair que si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ sont suffisamment proches de zéro, alors la fonction définie sur X par la formule

$$x \mapsto f(x) + \varepsilon_1 \varphi_1(x) + \ldots + \varepsilon_m \varphi_m(x),$$

de même que f, est une fonction de Morse sans points critiques autres que $x_1, \ldots, x_m$. Ses valeurs aux points $x_1, \ldots, x_m$ sont égales à $f(x_1) + \varepsilon_1, \ldots, f(x_m) + \varepsilon_m$ et un choix approprié des nombres $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ garantit qu'elles sont deux à deux distinctes.

Montrons maintenant qu'il existe sur X une fonction de Morse. Fixons un col $k: \partial X \times I \to X$ et une $\mathscr{C}^\infty$-fonction $\beta: I \to I$ égale à 1 sur intervalle fermé $[0, 1/2]$ et à 0 dans un voisinage du point 1; définissons la fonction $g: X \to \mathbf{R}$ par les formules

$$g(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{pour } x \in X \setminus k(\partial X \times [0, 1)),$$

$$g(k(z, t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t-1)\beta(t) \quad \text{pour } z \in \partial_0 X,\ t \in I,$$

$$g(k(z, t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-t)\beta(t) \quad \text{pour } z \in \partial_1 X,\ t \in I.$$

Il est clair que g appartient à la classe $\mathscr{C}^\infty$, envoie X dans I, $\partial_0 X$ dans 0 et $\partial_1 X$ dans 1 et ne possède aucun point critique dans $k(\partial X \times [0, 1/2])$. Construisons des cartes $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ appartenant à $\mathrm{Atl}\, X$ telles que $\mathrm{Im}\, \varphi_1 = \ldots = \mathrm{Im}\, \varphi_s = \mathbf{R}^n$, où $n = \dim X$ et les ensembles $\varphi_1^{-1}(\mathrm{Int}\, D^n), \ldots, \varphi_s^{-1}(\mathrm{Int}\, D^n)$ recouvrent $X \setminus k(\partial X \times [0, 1/2[)$. Construisons ensuite une $\mathscr{C}^\infty$-fonction $\alpha: \mathbf{R}^n \to I$, égale à 1 sur D^n et à 0 en dehors d'une boule concentrique $2D^n$ de rayon 2. Nous construirons par récurrence des fonctions $g_0, \ldots, g_s: X \to \mathbf{R}$ telles que g_i coïncide avec g dans un voisinage du bord ∂X, applique $\mathrm{int}\, X$ dans $\mathrm{Int}\, I$, ne possède aucun point critique dans $k(\partial X \times [0, 1/2])$ et aucun point critique dégénéré dans $\bigcup_{j=1}^{i} \varphi_j^{-1}(D^n)$. La fonction g_s sera une fonction de Morse sur X.

Posons $g_0 = g$ et supposons que, pour un certain $k \geqslant 1$, les fonctions g_i, $i < k$, ont déjà été choisies de manière à satisfaire aux conditions énumérées. La formule

$$h_a(x) = \begin{cases} g_{k-1}(x), & \text{si } x \in X \setminus \varphi_k^{-1}(2D^n), \\ g_{k-1}(x) - \langle a, \varphi_k(x) \rangle\, \alpha \circ \varphi_k(x) & \\ & \text{si } x \in \mathrm{supp}\, \varphi_k \end{cases}$$

détermine pour chaque point $a \in \mathbf{R}^n$ une $\mathscr{C}^\infty$-fonction $h_a: X \to \mathbf{R}$ qui coïncide avec g_{k-1} dans un voisinage de l'ensemble ∂X et même sur X tout entier lorsque $a = 0$. Il est évident que le point 0 possède

dans R^n un voisinage U tel que, pour $a \in U$, h_a n'a pas de points critiques dans $k(\partial X \times [0, 1/2])$ ni de points critiques dégénérés dans $\bigcup_{j=1}^{k-1} \varphi_j^{-1}(D^n)$ et applique int X dans Int I. D'après le lemme *6*, on peut trouver dans U un a tel que h_a n'a pas de points critiques dégénérés non plus dans $\varphi_k^{-1}(D^n)$; c'est cette fonction h_a que nous choisissons en guise de g_k.

2. Cobordismes et chirurgie

1. Ce sous-paragraphe est consacré à des opérations spéciales sur les cobordismes : les *additions d'anses* et les *reconstructions.* Les premières ont déjà été mentionnées dans 1.1. Les reconstructions sont plus simples que les additions d'anses et leurs possibilités sont plus limitées : nous les définissons seulement pour le cas des variétés fermées et elles ne peuvent servir qu'à obtenir, à partir d'une $\mathscr{C}^\infty$-variété fermée, une variété qui lui est cobordante.

Cobordismes standards

2. Nous définissons les *cobordismes standards* de deux espèces : les *cobordismes standards triviaux* et les *cobordismes standards élémentaires d'indice k.* Chaque cobordisme standard possède une fonction de Morse standard.

Le cobordisme trivial standard se définit à partir d'une $\mathscr{C}^\infty$-variété fermée V. C'est simplement le cylindre $V \times I$ avec

$$\partial_0 (V \times I) = V \times 0, \quad \partial_1 (V \times I) = V \times 1.$$

La fonction de Morse standard correspondante se définit par la formule $(v, t) \mapsto t$ et n'a pas de points critiques.

Le cobordisme élémentaire standard d'indice k se définit à partir d'une $\mathscr{C}^\infty$-variété fermée V de dimension $n - 1$ pour $n \geqslant k$ et d'un $\mathscr{C}^\infty$-plongement quelconque $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k} \to V$; on le désigne par El (V, φ). A un homéomorphisme près, c'est $(V \times I) \cup_{\varphi_1} (D^k \times D^{n-k})$, où φ_1 est l'application du produit $S^{k-1} \times D^{n-k}$ dans $V \times I$ donnée par la formule $\varphi_1(x, y) = (\varphi(x, y), 1)$. Pour définir El (V, φ) comme une $\mathscr{C}^\infty$-variété, désignons par $E(n, k)$ l'ensemble

$$\left\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{R}^n \,\middle|\, \sum_{k+1}^{n} t_i^2 \leqslant 1, \ \left|\sum_{1}^{k} t_i^2 - \sum_{k+1}^{n} t_i^2\right| \leqslant \frac{1}{16}\right\}$$

et par el l'homéomorphisme de l'intersection

$$E(n, k) \cap \left[\mathsf{R}^n \setminus \left(\mathsf{R}^k \times \operatorname{Int}\left(\frac{1}{2} D^{n-k}\right)\right)\right]$$

sur le cylindre

$$\varphi\left(S^{k-1}\times\left(D^{n-k}\setminus \operatorname{Int}\left(\frac{1}{2}D^{n-k}\right)\right)\right)\times I$$

donné par la formule

$$(t_1,\ldots,t_n)\mapsto\Big(\varphi\left((t_1,\ldots,t_k)/\sqrt{t_1^2+\ldots+t_k^2},\ (t_{k+1},\ldots,t_n)\right),$$
$$8\left(\frac{1}{16}-t_1^2-\ldots-t_k^2+t_{k+1}^2+\ldots+t_n^2\right)\Big).$$

Considéré comme espace topologique, El (V, φ) est construit par recollement du cylindre

$$\left[V\setminus\varphi\left(S^{k-1}\times\operatorname{Int}\left(\frac{1}{2}D^{n-k}\right)\right)\right]\times I$$

avec $E(n, k)$ par l'homéomorphisme el (voir fig. 5). La $\mathscr{C}^\infty$-struc-

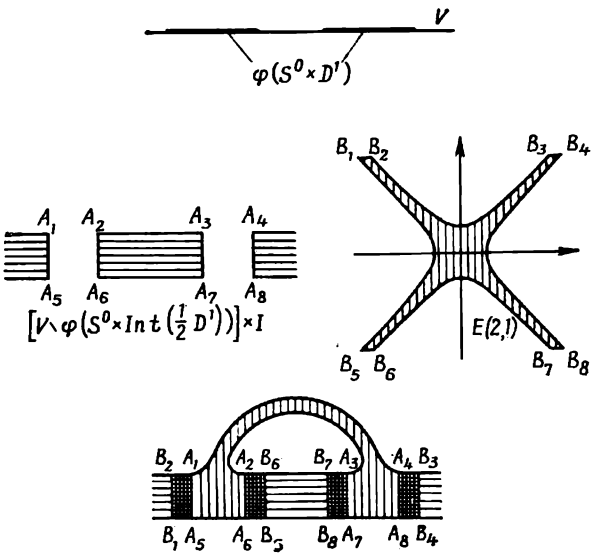


Fig. 5 ($n = 2$, $k = 1$)

ture dans El (V, φ) se définit par l'atlas constitué d'atlas quelconques des $\mathscr{C}^\infty$-variétés

$$\left[V\setminus\varphi\left(S^{k-1}\times\left(\frac{1}{2}D^{n-k}\right)\right)\right]\times I \quad\text{et}\quad E(n,k)\cap(\mathbf{R}^k\times\operatorname{Int}D^{n-k}).$$

(Ces dernières sont envisagées comme des parties de l'espace El(V, φ).) L'origine ∂_0El (V, φ) est constituée par les ensembles

$$\left[V \setminus \varphi\left(S^{k-1} \times \operatorname{Int}\left(\frac{1}{2} D^{n-k}\right)\right)\right] \times 0,$$

$$\left\{(t_1, \ldots, t_n) \in E(n, k) \mid -t_1^2 - \ldots - t_k^2 + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2 = -\frac{1}{16}\right\}$$

et l'extrémité ∂_1 El (V, φ) par les ensembles

$$\left[V \setminus \varphi\left(S^{k-1} \times \operatorname{Int}\left(\frac{1}{2} D^{n-k}\right)\right)\right] \times 1,$$

$$\left\{(t_1, \ldots, t_n) \in E(n, k) \mid -t_1^2 - \ldots - t_k^2 + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2 = \frac{1}{16}\right\}.$$

La fonction de Morse standard se forme à partir des fonctions

$$\left[V \setminus \varphi\left(S^{k-1} \times \operatorname{Int}\left(\frac{1}{2} D^{n-k}\right)\right)\right] \times I \mapsto \mathsf{R}, \quad E(n, k) \to \mathsf{R}$$

définies par les formules

$$(v, t) \mapsto t, \quad (t_1, \ldots, t_n) \mapsto 8\left(\frac{1}{16} - t_1^2 - \ldots - t_k^2 + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2\right);$$

elle possède un point critique unique $0 \in E(n, k)$ d'indice k. On désigne la fonction de Morse standard par mo. La figure 5 nous convainc que la variété El (V, φ) est homéomorphe à

$$(V \times I) \underset{\varphi_1}{\cup} (D^k \times D^{n-k});$$

la description formelle de l'homéomorphisme canonique est assez compliquée pour la soumettre à l'attention du lecteur.

La propriété fondamentale de tous les cobordismes standards construits à partir de V est que l'origine de chacun d'eux est canoniquement $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphe à V : dans le cas du cobordisme standard trivial, le difféomorphisme se détermine par la formule $v \mapsto (v, 0)$; dans le cas du cobordisme El (V, φ), il est constitué de l'application

$$V \setminus \varphi\left(S^{k-1} \times \operatorname{Int}\left(\frac{1}{2} D^{n-k}\right)\right) \to \left[V \setminus \varphi\left(S^{k-1} \times \operatorname{Int}\left(\frac{1}{2} D^{n-k}\right)\right)\right] \times 0$$

définie par la formule $v \mapsto (v, 0)$ et de l'application

$$\varphi(S^{k-1} \times D^{n-k}) \to \left\{(t_1, \ldots, t_n) \in E(n, k) \mid -t_1^2 - \ldots - t_k^2 + \right.$$
$$\left. + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2 = -\frac{1}{16}\right\}$$

définie par la formule

$$\varphi((t_1, \ldots, t_k), (t_{k+1}, \ldots, t_n)) \mapsto \left(t_1 \sqrt{\frac{1}{16} + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2}, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, t_k \sqrt{\frac{1}{16} + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2}, t_{k+1}, \ldots, t_n\right).$$

3. La construction du cobordisme élémentaire standard est particulièrement simple lorsque l'indice k est égal à 0 ou à n.

Si $k = 0$, alors φ est un plongement de V dans un ensemble vide, $E(n, k)$ est la boule $\frac{1}{4} D^n$ et l'homéomorphisme el relie des ensembles vides. Dans ce cas, l'homothétie de rapport 4 de la boule $E(n, k)$ transforme El (V, φ) dans la somme $(V \times I) \sqcup D^n$ avec

$$\partial_0 [(V \times I) \sqcup D^n] = \mathrm{in}_1 (V \times 0), \ \partial_1 [(V \times I) \sqcup D^n] = \\ = (V \times 1) \sqcup S^{n-1},$$

et la fonction de Morse standard dans la fonction constituée des fonctions $V \times I \to \mathbf{R}$, $D^n \to \mathbf{R}$ définies par les formules $(v, t) \mapsto t$, $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (1 + t_1^2 + \ldots + t_n^2)/2$.

Si $k = n$, alors φ plonge la sphère S^{n-1} dans V, l'image par ce plongement est une des composantes de la variété V (voir 1.5.1); $E(n, k)$ est à nouveau la boule $\frac{1}{4} D^n$ et l'homéomorphisme el joint toujours des ensembles vides. Dans ce cas, l'homothétie de la boule $E(n, k)$ transforme El (V, φ) dans la somme $([V \setminus \varphi(S^{n-1})] \times I) \sqcup \sqcup D^n$ avec

$$\partial_0 \{([V \setminus \varphi(S^{n-1})] \times I) \sqcup D^n\} = ([V \setminus \varphi(S^{n-1})] \times 0) \sqcup S^{n-1}, \\ \partial_1 \{([V \setminus \varphi(S^{n-1})] \times I) \sqcup D^n\} = \mathrm{in}_1 ([V \setminus \varphi(S^{n-1})] \times 1),$$

et la fonction de Morse standard dans la fonction constituée des fonctions $[V \setminus \varphi(S^{n-1})] \times I \to \mathbf{R}$, $D^n \to \mathbf{R}$ définies par les formules

$$(v, t) \mapsto t, \ (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (1 - t_1^2 - \ldots - t_n^2)/2.$$

Remarquons aussi que $k = 0$ et $k = n$ sont les seules valeurs de l'indice pour lesquelles le cobordisme élémentaire standard peut posséder un bord connexe; dans le cas $k = 0$, le bord est connexe si et seulement si la variété donnée V est vide, et dans le cas $k = n$, si et seulement si φ est un difféomorphisme. Conformément à ce qui précède, dans les deux situations le cobordisme est difféomorphe à la boule D^n.

Cobordismes triviaux et cobordismes élémentaires

4. Un cobordisme est appelé *trivial* lorsqu'il est difféomorphe au cobordisme trivial standard. Un cobordisme est appelé *élémentaire d'indice k* lorsqu'il est difféomorphe au cobordisme élémentaire standard d'indice k.

Il découle de ces définitions que si X est un cobordisme trivial, alors les variétés $\partial_0 X$, $\partial_1 X$ sont difféomorphes; en outre, chaque cobordisme trivial possède une fonction de Morse sans points critiques, tandis qu'un cobordisme élémentaire d'indice k possède une

fonction de Morse avec un seul point critique d'indice k sans autres points critiques.

5 (Lemme). *Soient X, X' des cobordismes tels que les variétés $\partial_1 X$, $\partial_0 X'$ sont difféomorphes. Si le cobordisme X' est trivial, alors le cobordisme construit à partir de X, X' par recollement suivant un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme $\partial_1 X \to \partial_0 X'$ quelconque (les cols des variétés X, X' sont arbitraires) est difféomorphe à X.*

D'après le théorème 4.5.9, il suffit de construire, pour un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme donné φ: $\partial_1 X \to \partial_0 X'$, des $\mathscr{C}^\infty$-plongements j: $X \to X$, j' : $X' \to X$ tels que

$$j(X) \cup j'(X') = X, \quad j(X) \cap j'(X') = j(\partial_1 X) = j'(\partial_0 X')$$

et le difféomorphisme composé

$$\partial_0 X' \xrightarrow{\text{ab } j'} j'(\partial_0 X') \xrightarrow{\text{ab } j^{-1}} \partial_1 X$$

coïncide avec φ^{-1}. Pour cela nous choisissons un col $k : \partial X \times I \to X$; un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme f: $X' \to \partial_0 X' \times I$ tel que $f(x') = (x', 0)$ pour chaque point $x' \in \partial_0 X'$; une $\mathscr{C}^\infty$-fonction croissante $\alpha : I \to I$ telle que $\alpha(t) = (1/2) + (t/3)$ pour $t \leqslant 3/4$ et $\alpha(t) = t$ pour $t \geqslant 7/8$. Définissons ensuite la fonction β: $I \to I$ par la formule $\beta(t) = (1 - t)/2$ et posons

$$\begin{cases} j(x) = x & \text{pour } x \in X \setminus k(\partial_1 X \times [0, 1)), \\ j(k(z, t)) = k(z, \alpha(t)) & \text{pour } z \in \partial_1 X,\ t \in I; \end{cases}$$

$$j'(x') = k \circ (\varphi^{-1} \times \beta) \circ f(x') \text{ pour } x' \in X'.$$

Une vérification immédiate montre que j et j' possèdent les propriétés nécessaires.

6. *Tout cobordisme muni d'une fonction de Morse sans points critiques est trivial.*

Démonstration. Soit f: $X \to \mathbf{R}$ une fonction de Morse sans points critiques. D'après 1.5.8 (ou, si l'on préfère, 4.8.2), l'image inverse $f^{-1}(t)$ de chaque point t de l'intervalle $]0, 1[$ est une sous-variété propre du cobordisme X fermée si on l'envisage comme une variété indépendante (les images inverses $f^{-1}(0) = \partial_0 X$, $f^{-1}(1) = \partial_1 X$ sont également des variétés fermées). En vertu des théorèmes 4.5.3 et 4.5.8, pour chaque $t \in I$, $f^{-1}(t)$ possède un voisinage U_t et une certaine $\mathscr{C}^\infty$-submersion π_t : $U_t \to f^{-1}(t)$ qui est l'identité sur $f^{-1}(t)$.

Définissons pour $t \in I$ l'application F_t : $U_t \to f^{-1}(t) \times I$ par la formule $F_t(x) = (\pi_t(x), f(x))$. Il est clair que F_t est de classe $\mathscr{C}^\infty$, que la différentielle $d_x F_t$ est non dégénérée lorsque $x \in f^{-1}(t)$ et que la restriction de F_t à $f^{-1}(t)$ est un difféomorphisme de cet ensemble sur $f^{-1}(t) \times t$. Par conséquent, F_t est un $\mathscr{C}^\infty$-plongement sur un cer-

tain voisinage de l'ensemble $f^{-1}(t)$ (voir 1.5.5), i.e. applique bijectivement l'image inverse $F_t^{-1}(\Delta_t)$ d'un voisinage Δ_t du point t (dans I) sur $f^{-1}(t) \times \Delta_t$. Choisissons m si grand que chacun des segments en lesquels les points $1/m, \ldots, (m-1)/m$ partagent l'intervalle I soit contenu dans un des ensembles Δ_t. Alors tous les cobordismes $f^{-1}([(i-1)/m, i/m])$ avec

$$\partial_0 f^{-1}([(i-1)/m, i/m]) = f^{-1}((i-1)/m),$$
$$\partial_1 f^{-1}([(i-1)/m, i/m]) = f^{-1}(i/m)$$

sont triviaux et, d'après le lemme *5*, le cobordisme X tout entier l'est aussi.

7. Si un cobordisme X possède une fonction de Morse à point critique unique d'indice k et n'a aucun autre point critique, alors X est un cobordisme élémentaire d'indice k.

Nous commençons la démonstration, qui est assez longue, par la construction d'un cobordisme auxiliaire Y. Fixons une fonction de Morse $f: X \to \mathbf{R}$ à point critique unique x d'indice k. D'après le théorème 1.4, il existe une carte $\varphi \in \mathrm{Atl}_x X$ avec $\varphi(x) = 0$ telle que la restriction $f \mid_{\mathrm{supp}\,\varphi}$ coïncide avec la composée de l'application φ et de la fonction $\mathrm{Im}\,\varphi \to \mathbf{R}$ définie par la formule

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(x) - t_1^2 - \ldots - t_k^2 + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2.$$

Il est clair que l'ensemble $\mathrm{Im}\,\varphi$ contient la partie de l'espace $\mathbf{R}^n$ définie en coordonnées usuelles par les inégalités

$$t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2 \leqslant 4\varepsilon^2,$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{16} \leqslant -t_1^2 - \ldots - t_k^2 + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{16}$$

pour un certain ε positif. Désignons cette partie par A et posons

$$B = A \cap \left(\mathbf{R}^k \times \left(\mathbf{R}^{n-k} \setminus \mathrm{Int}\left(\frac{\varepsilon}{2} D^{n-k}\right)\right)\right).$$

Envisagé comme espace topologique, Y représente le résultat du recollement du sous-ensemble

$$f^{-1}\left(\left[f(x) - \frac{\varepsilon^2}{16}, f(x) + \frac{\varepsilon^2}{16}\right]\right) \setminus \varphi^{-1}(A \setminus B)$$

de la variété X avec le produit $S^{k-1} \times 2D^{n-k} \times I$ suivant l'homéomorphisme

$$\varphi^{-1}(B) \to S^{k-1} \times \left[(2D^{n-k}) \setminus \mathrm{Int}\left(\frac{1}{2} D^{n-k}\right)\right] \times I$$

défini par la formule

$$\varphi^{-1}(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \left(\frac{(t_1, \ldots, t_k)}{\sqrt{t_1^2 + \ldots + t_k^2}}, (t_{k+1}, \ldots, t_n),\right.$$
$$\left.\frac{8}{\varepsilon^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{16} - t_1^2 - \ldots - t_k^2 + t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2\right)\right).$$

(Nous nous servons ici des inégalités $\frac{\varepsilon^2}{16} < f(x) < 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}$ qui sont des conséquences évidentes de l'inclusion $A \subset \operatorname{Im} \varphi$.) La $\mathscr{C}^\infty$-structure dans Y se définit par un atlas constitué d'atlas quelconques des $\mathscr{C}^\infty$-variétés

$$f^{-1}\left(\left[f(x) - \frac{\varepsilon^2}{16}, f(x) + \frac{\varepsilon^2}{16}\right]\right) \setminus \operatorname{Cl} \varphi^{-1}(A \setminus B),$$
$$S^{k-1} \times \operatorname{Int}(2D^{n-k}) \times I.$$

L'origine $\partial_0 Y$ est constituée des ensembles

$$f^{-1}\left(f(x) - \frac{\varepsilon^2}{16}\right) \setminus \left[\varphi^{-1}(A \setminus B) \cap f^{-1}\left(f(x) - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)\right]$$

et

$$S^{k-1} \times 2D^{n-k} \times 0,$$

et l'extrémité $\partial_1 Y$ des ensembles

$$f^{-1}\left(f(x) + \frac{\varepsilon^2}{16}\right) \setminus \left[\varphi^{-1}(A \setminus B) \cap f^{-1}\left(f(x) + \frac{\varepsilon^2}{16}\right)\right]$$

et

$$S^{k-1} \times 2D^{n-k} \times 1.$$

A partir des fonctions

$$f^{-1}\left(\left[f(x) - \frac{\varepsilon^2}{16}, f(x) + \frac{\varepsilon^2}{16}\right]\right) \setminus \varphi^{-1}(A \setminus B) \to \mathsf{R},$$
$$S^{k-1} \times \operatorname{Int}(2D^{n-k}) \times I \to \mathsf{R},$$

définies par les formules

$$y \mapsto \frac{8}{\varepsilon^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{16} + f(y) - f(x)\right), \quad (u, v, t) \mapsto t,$$

où $u \in S^{k-1}$, $v \in \operatorname{Int}(2D^{n-k})$, $t \in I$, construisons la fonction $g: Y \to \mathsf{R}$. Une vérification immédiate montre que g est une fonction de Morse sans points critiques. (Il en découle, en vertu du théorème *6*, que le cobordisme Y est trivial; pourtant cette propriété ne sera pas explicitement employée dans ce qui suit.) Considérons ensuite le plongement composé

$$S^{k-1} \times D^{n-k} \xrightarrow{(z_1, z_2) \mapsto \left(z_1, z_2, \frac{1}{2}\right)} S^{k-1} \times D^{n-k} \times I \xrightarrow{\text{in}}$$
$$\xrightarrow{\text{in}} S^{k-1} \times \operatorname{Int}(2D^{n-k}) \times I \xrightarrow{\text{in}} Y$$

et son abréviation $\psi: S^{k-1} \times D^{n-k} \to g^{-1}(1/2)$. Nous montrerons, et ceci terminera la démonstration du théorème, que le cobordisme X est difféomorphe à $\operatorname{El}(g^{-1}(1/2), \psi)$.

Choisissons d'abord un δ positif inférieur à $\frac{1}{2}$ et un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme

$$H : g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \times \left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right] \to g^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right]\right)$$

tels que, pour des $u \in S^{k-1}$, $v \in D^{n-k}$, $t \in \left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right]$ quelconques, on ait

$$H\left(\left(u, v, \frac{1}{2}\right), t\right) = (u, v, t).$$

D'après le théorème 4.5.8, pour un certain η positif inférieur à $\frac{1}{2}$, il existe une $\mathscr{C}^\infty$-submersion

$$\pi : g^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}+\eta\right)\right) \to g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

qui est l'identité sur $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. Fixons une $\mathscr{C}^\infty$-fonction $\alpha : \mathbf{R}^{n-k} \to \mathbf{R}$ égale à 1 sur D^{n-k} et à 0 en dehors de $2D^{n-k}$ et définissons une nouvelle $\mathscr{C}^\infty$-submersion

$$\rho : g^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}+\eta\right)\right) \to g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

en posant

$$\rho(y) = \begin{cases} \pi(y) & \text{si } y \notin S^{k-1} \times \operatorname{Int}(2D^{n-k}) \times I, \\ \pi\left(u, v, \frac{1}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right)(1-\alpha(v))\right) & \\ \qquad \text{si } y = (u, v, t), \text{ où } u \in S^{k-1}, v \in 2D^{n-k}, t \in I. \end{cases}$$

Définissons ensuite l'application

$$G : g^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}+\eta\right)\right) \to g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}+\eta\right)$$

par la formule $G(y) = (\rho(y), g(y))$. Puisque la restriction de G à $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ est un difféomorphisme qui applique cet ensemble sur $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}$ et la différentielle d_yG est non dégénérée si $y \in g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, il existe un nombre positif δ inférieur à η tel que la restriction de l'application G à $g^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right]\right)$ est un $\mathscr{C}^\infty$-plongement ; il est clair qu'en guise de H on peut choisir

$$(\mathrm{ab}\, G)^{-1} : g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \times \left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right] \to g^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right)\right].$$

Pour démontrer enfin le fait que les cobordismes X et $\mathrm{El}\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \psi\right)$ sont difféomorphes, nous découpons chacun d'eux en trois cobordismes : X sera découpé en cobordismes

$$f^{-1}\left(\left[0, f(x)-\frac{\delta\varepsilon^2}{8}\right]\right), \quad f^{-1}\left(\left[f(x)-\frac{\delta\varepsilon^2}{8}, f(x)+\frac{\delta\varepsilon^2}{8}\right]\right),$$
$$f^{-1}\left(\left[f(x)+\frac{\delta\varepsilon^2}{8}, 1\right]\right),$$

et $\mathrm{El}\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \psi\right)$ en cobordismes

$$\mathrm{mo}^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}-\delta\right]\right), \quad \mathrm{mo}^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right]\right), \quad \mathrm{mo}^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}+\delta, 1\right]\right).$$

Dans chacun de ces triplets, le premier et le troisième cobordisme sont triviaux en vertu du théorème *6* et, par conséquent, le deuxième cobordisme est difféomorphe au cobordisme initial tout entier. Ainsi il suffit de construire un difféomorphisme

$$\mathrm{mo}^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right]\right) \to f^{-1}\left(\left[f(x)-\frac{\delta\varepsilon^2}{8}, f(x)+\frac{\delta\varepsilon^2}{8}\right]\right),$$

qu'on peut obtenir en se servant de l'application composée

$$\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \setminus \psi(S^{k-1} \times \mathrm{Int}\, D^{n-k})\right) \times \left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right] \xrightarrow{\mathrm{ab}\, H}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{ab}\, H} (Y \setminus (S^{k-1} \times \mathrm{Int}\, D^{n-k} \times I)) \cap g^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right]\right) \xrightarrow{\mathrm{id}}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}} (X \setminus \varphi^{-1}(\mathbf{R}^k \times \mathrm{Int}\, D^{n-k})) \cap f^{-1}\left(\left[f(x)-\frac{\delta\varepsilon^2}{8}, f(x)+\frac{\delta\varepsilon^2}{8}\right]\right)$$

et de l'application

$$E(n, k) \cap \mathrm{mo}^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right]\right) \to$$
$$\to \varphi^{-1}(\mathrm{Im}\, \varphi \cap (\mathbf{R}^k \times \varepsilon D^{n-k})) \cap f^{-1}\left(\left[f(x)-\frac{\delta\varepsilon^2}{8}, f(x)+\frac{\delta\varepsilon^2}{8}\right]\right)$$

définie par la formule $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \varphi^{-1}(\varepsilon t_1, \ldots, \varepsilon t_n)$.

8 (Corollaire). *Un cobordisme de dimension n à bord connexe muni d'une fonction de Morse à point critique unique est difféomorphe à D^n.*

Recollements d'anses

9. Soient X un cobordisme de dimension n et $\varphi : S^{k-1} \times D^{n-k} \to \partial_1 X$ un plongement de classe $\mathscr{C}^\infty$. Le recollement du cobordisme X et du cobordisme élémentaire $\mathrm{El}(\partial_1 X, \varphi)$ suivant le difféomorphisme canonique $\partial_1 X \to \partial_0 \mathrm{El}(\partial_1 X, \varphi)$ (voir *2*) est appelé *recollement d'anse d'indice k*.

Le recollement d'anse d'indice 0 est, à un difféomorphisme près, le passage de X à $X \sqcup D^n$, la nouvelle composante du bord, i.e. $\mathrm{in}_2(S^{n-1})$ étant ajoutée à $\partial_1 X$; le recollement d'anse d'indice n est le recollement du cobordisme X et de la boule D^n suivant un certain difféomorphisme d'une des composantes de la variété $\partial_1 X$ sur S^{n-1}.

10. A un difféomorphisme près, tout cobordisme X peut être obtenu à partir du cobordisme trivial standard $\partial_0 X \times I$ par un nombre fini de recollements d'anse. Quelle que soit la fonction de Morse propre f : $X \to \mathbf{R}$, il est toujours possible de choisir les recollements de manière à ce que leur nombre ne soit pas supérieur au nombre des points critiques de la fonction f.

Ceci se démontre par récurrence sur le nombre des points critiques de la fonction f. Dans le cas où f n'en a pas, il suffit d'appliquer le théorème *6*. Lorsque f possède $m \geqslant 1$ points critiques, nous trouvons dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$ un c tel qu'une des valeurs critiques de la fonction f soit supérieure et les autres inférieures à c, et nous découpons X en deux cobordismes, $f^{-1}([0, c])$ et $f^{-1}([c, 1])$. Sur le premier d'entre eux, il existe une fonction de Morse propre à $m - 1$ points critiques, à savoir la fonction $x \mapsto f(x)/c$, sur le deuxième, une fonction de Morse à point critique unique, à savoir la fonction $x \mapsto (f(x) - c)/(1 - c)$. Il suffit maintenant de remarquer que, d'après le théorème *7*, le deuxième cobordisme est élémentaire.

11. Toute *$\mathscr{C}^\infty$-variété fermée de dimension n munie d'une fonction de Morse à deux points critiques est homéomorphe à la sphère S^n.*

Démonstration. Remarquons, en laissant de côté le cas trivial $n = 0$, qu'une fonction de Morse à deux points critiques est propre (ces points doivent être un point de minimum et un point de maximum). En vertu du théorème *10*, la variété désirée peut être obtenue à partir d'une variété vide par deux recollements d'anse. Il est clair que le premier recollement d'anses est d'indice 0, tandis que le deuxième est d'indice n, de sorte que la variété cherchée s'obtient par recollement de deux exemplaires de la boule D^n suivant un difféomorphisme de la sphère S^{n-1}.

Conséquence homotopique

12 (Lemme). *Le cobordisme* El (V, φ) *est homotopiquement équivalent à $V \cup_f D^k$, où f est une application de la sphère S^{k-1} dans V définie par la formule $f(y) = \varphi(y, 0)$; en outre, il existe une équivalence homotopique $V \cup_f D^k \to \mathrm{El}(V, \varphi)$ qui coïncide sur V avec l'inclusion $V\,[= \partial_0\,\mathrm{El}(V, \varphi)] \to \mathrm{El}(V, \varphi)$.*

Une telle équivalence homotopique peut être construite à partir de l'inclusion indiquée et du plongement $D^k \to \mathrm{El}(V, \varphi)$ qui associe à chaque point $x \in D^k$ le point $x/4 \in E(n, k)$. Pour la démonstration, il suffit de remarquer que l'application $V \cup_f D^k \to \mathrm{El}(V, \varphi)$ ainsi

constituée est un plongement topologique, tandis que son image est un rétracte de déformation stricte de l'espace El (V, φ).

13. Chaque variété compacte différentiable de dimension n est homotopiquement équivalente à un espace cellulaire fini de dimension $\leqslant n$.

Démonstration. D'après ce qui a été dit dans 1.2, nous pouvons envisager une telle variété comme un cobordisme à origine vide. Il suffit donc de démontrer que si un cobordisme de dimension n est homotopiquement équivalent à un espace cellulaire fini de dimension $\leqslant n$, il conserve cette propriété après tout recollement d'anse; voir *10*. Mais d'après le lemme *12*, un recollement d'anse d'indice k à un cobordisme X produit le même effet homotopique que le recollement à X d'une boule D^k suivant un plongement $f: S^{k-1} \to X$. Remplaçons le cobordisme X par l'espace cellulaire fini Y de dimension $\leqslant n$ auquel X est homotopiquement équivalent; remplaçons l'application f par sa composée avec l'équivalence homotopique $X \to Y$ et remplaçons ensuite cette composée par une application cellulaire $g: S^{k-1} \to Y$ qui lui est homotope (voir 2.3.2.4). Il découle du théorème 1.3.7.8 que le cobordisme obtenu par recollement d'anse est homotopiquement équivalent à l'espace $Y \cup_g D^k$ qui est, en vertu de 2.1.5.5, un espace cellulaire fini de dimension $\leqslant n$.

Reconstructions d'anses

14. Soient V une $\mathscr{C}^\infty$-variété fermée de dimension n et $\varphi: S^{k-1} \times D^{n-k+1} \to V$ un plongement de classe $\mathscr{C}^\infty$. Fixons des cols quelconques des variétés $V \setminus \varphi(S^{k-1} \times \operatorname{Int} D^{n-k+1})$ et $D^k \times S^{n-k}$ et recollons-les suivant le difféomorphisme

$$\operatorname{ab} \varphi: S^{k-1} \times S^{n-k} \to \varphi(S^{k-1} \times S^{n-k})$$

du bord du second sur le bord du premier. Nous dirons alors que la variété recollée s'obtient de V *par reconstruction suivant le plongement* φ. Le nombre k est appelé *indice de reconstruction.*

15. Si un cobordisme X' s'obtient d'un cobordisme X par recollement d'anse effectué suivant un plongement $\varphi: S^{k-1} \times D^{n-k} \to \partial_1 X$, alors $\partial_1 X'$ s'obtient de $\partial_1 X$ par une reconstruction effectuée suivant le même plongement $\varphi: S^{k-1} \times D^{n-k} \to \partial_1 X$.

Démonstration. Remarquant que $\partial_1 X' = \partial_1 \mathrm{El}(\partial_1 X, \varphi)$, notre assertion signifie que $\partial_1 \mathrm{El}(\partial_1 X, \varphi)$ s'obtient à partir de $\partial_1 X$ par une reconstruction effectuée suivant φ. Rappelons que El $(\partial_1 X, \varphi)$ est le résultat du recollement des espaces

$$[\partial_1 X \setminus \varphi(S^{k-1} \times \operatorname{Int}\left(\tfrac{1}{2} D^{n-k}\right))] \times I \quad \text{et} \quad E(n, k)$$

suivant el (voir *2*). Il est évident que les ensembles

$$[\partial_1 X \setminus \varphi(S^{k-1} \times \operatorname{Int} D^{n-k})] \times 1 \quad \text{et} \quad E(n, k) \cap \partial_1 \mathrm{El}(\partial_1 X, \varphi)$$

sont des sous-variétés compactes de dimension $n - 1$ de la variété $\partial_1 \mathrm{El}\,(\partial_1 X, \varphi)$, qu'elles recouvrent cette variété et se coupent suivant leur bord commun. Envisageons les applications

$$\mathrm{pr}_1 : [\partial_1 X \setminus \varphi\,(S^{k-1} \times \mathrm{Int}\, D^{n-k})] \times 1 \to \partial_1 X \setminus \varphi\,(S^{k-1} \times \mathrm{Int}\, D^{n-k}),$$

$$\psi : E\,(n, k) \cap \partial_1 \mathrm{El}\,(\partial_1 X, \varphi) \to D^k \times S^{n-k-1},$$

dont la deuxième se définit par la formule

$$\psi\,(t_1, \ldots, t_n) = \left(\frac{16}{15}\,(t_1, \ldots, t_k), \frac{(t_{k+1}, \ldots, t_n)}{\sqrt{t_{k+1}^2 + \ldots + t_n^2}}\right).$$

Il est clair que ψ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que $\mathrm{pr}_1\,(\psi^{-1}\,(z_1, z_2)) = \varphi\,(z_1, z_2)$ lorsque $z_1 \in S^{k-1}$, $z_2 \in S^{n-k-1}$. En faisant appel au théorème 4.5.9, nous voyons que la variété $\partial_1 \mathrm{El}\,(\partial_1 X, \varphi)$ est effectivement le résultat du recollement des variétés $\partial_1 X \setminus \varphi\,(S^{k-1} \times \mathrm{Int}\, D^{n-k})$ et $D^k \times S^{n-k-1}$ suivant ab φ.

16 (Corollaire). *Quel que soit le cobordisme X, la variété $\partial_1 X$ peut être obtenue à partir de $\partial_0 X$ par un nombre fini de reconstructions. En particulier, le bord de toute $\mathscr{C}^\infty$-variété compacte peut être obtenu à partir de la variété vide par un nombre fini de reconstructions.*

3. Variétés de dimension deux

1. La théorie développée dans les deux sous-paragraphes précédents est en premier lieu une tentative de se représenter et d'énumérer les variétés différentiables compactes de dimension donnée. Pour des applications sérieuses, elle nécessite un développement plus poussé ; néanmoins, dans des situations simples, le théorème 2.10 s'avère déjà suffisamment efficace. Par exemple, dans le cas unidimensionnel, un cobordisme standard est une somme d'intervalles fermés, d'où il découle, en vertu du théorème 2.10, qu'une variété différentiable compacte de dimension un est difféomorphe à la somme de plusieurs intervalles fermés et de cercles. Mise en garde : quoique cette classification différentielle coïncide avec la classification topologique donnée dans 1.1.17, elle a une signification tout à fait différente. (Par ailleurs, dans le cas non compact, que nous ne considérons pas de manière systématique dans notre cours à cause de sa relative complexité, la classification différentielle des variétés unidimensionnelles coïncide également avec la classification topologique ; voir 4.1.)

Le présent sous-paragraphe est consacré à la classification différentielle des variétés différentiables compactes de dimension deux où le théorème 2.10 est également suffisant. Nous commencerons par composition d'une liste des variétés modèles (dans le cas unidimensionnel c'étaient le cercle et l'intervalle fermé) et démontrerons ensuite qu'une variété différentiable compacte de dimension deux est difféomorphe à une des variétés modèles. Remarquons que les varié-

tés modèles ne sont pas deux à deux difféomorphes ni homéomorphes, mais ceci ne sera démontré qu'au chapitre 5 (voir 5.3.4.3); ici nous préparerons seulement la partie géométrique de la démonstration en indiquant pour les variétés modèles fermées des partitions cellulaires canoniques équipées et pour les variétés modèles non fermées, des bouquets de cercles qui leur sont homotopiquement équivalents. De même que pour la classification des variétés différentiables unidimensionnelles, nous ne nous préoccuperons pas de la classe de différentiabilité (cf. 1.1).

Surfaces modèles

2. Commençons par les surfaces modèles *élémentaires*: la *sphère à trous* et la *bande de Mœbius.*

Une sphère à l trous est la sphère S^2 de laquelle on a ôté les intérieurs de l segments sphériques disjoints; son bord est la somme de l cercles et possède une orientation induite bien définie. La sphère à un trou est difféomorphe à D^2, la sphère à deux trous, au cylindre $S^1 \times D^1$; ce dernier sera appelé *anse.*

On appelle bande de Mœbius la sous-variété de l'espace R^3 engendrée par un segment de longueur 1, dont le centre glisse le long d'un cercle S^1, tandis que le segment, tout en étant normal à S^1, effectue une rotation uniforme d'un angle total π (fig. 6). C'est une sous-variété (de l'espace R^3) compacte, non orientable, à bord difféomorphe à S^1.

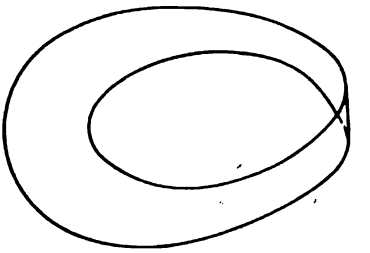


Fig. 6

La liste de toutes les *surfaces modèles* comporte la variété vide de dimension deux, les *sphères à anses et à trous* et les *sphères à bande et à trous.*

La sphère à l trous munie de g anses ($g \geqslant 0$, $l \geqslant 0$) se définit comme le résultat d'un recollement d'une sphère à $2g + l$ trous et de la somme de g anses suivant un difféomorphisme, conservant l'orientation du bord de la somme des anses, sur la réunion de $2g$ composantes du bord de la sphère à trous. C'est une variété différentiable orientée compacte de dimension deux, définie par les nombres g, l à un difféomorphisme conservant l'orientation près; elle possède un bord difféomorphe à la somme de l cercles. Pour $g = 0$, $l = 0$, elle coïncide avec S^2; pour $g = 0$, $l = 1$ elle est difféomorphe à D^2; pour $g = 1$, $l = 0$ elle est difféomorphe à $S^1 \times S^1$ (on l'appelle alors *tore*); pour $g = 2$, $l = 0$ on l'appelle *sphère à deux anses.* Quels que soient g et l, elle se plonge d'une manière évidente par difféomorphisme dans R^3; le plongement standard pour $g = 3$, $l = 2$ est représenté sur la figure 7.

La sphère à l trous munie de h bandes ($h \geqslant 0$, $l \geqslant 0$) s'obtient par recollement d'une sphère à $h + l$ trous et de la somme de h bandes de Mœbius suivant le difféomorphisme du bord de la somme des bandes sur la réunion de h composantes du bord de la sphère à trous.

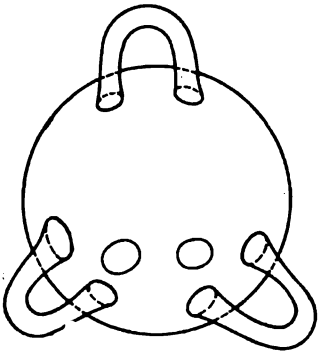


Fig. 7

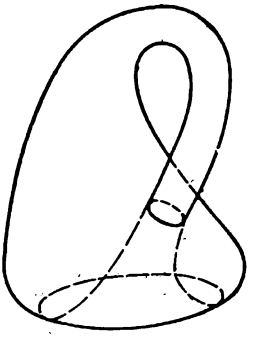
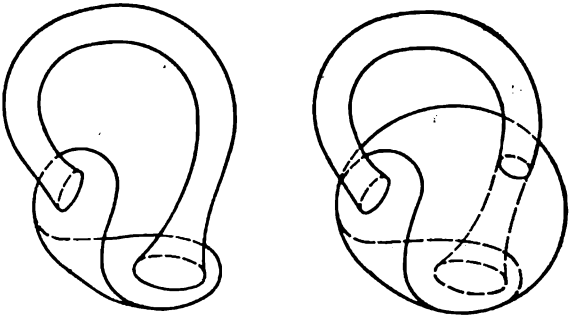


Fig. 8

C'est une variété différentiable compacte de dimension deux, définie par les nombres h, l à un difféomorphisme près; elle possède un bord difféomorphe à la somme de h cercles et n'est orientable que lorsque $h = 0$. Pour $h = 1$, $l = 0$, cette variété est difféomorphe à $\mathbf{R}P^2$;



a *b*

Fig. 9

pour $h = 1$, $l = 1$, à la bande de Mœbius; pour $h = 2$, $l = 0$, on l'appelle *bouteille de Klein*; celle-ci est connue par son immersion dans $\mathbf{R}^3$ représentée sur la figure *8*; pour $h = 2$, $l = 1$, on l'appelle *disque à anse retournée* (fig. 9, *a*). On voit sur la figure 9, *b* que le recollement d'un disque à anse retournée avec un disque ordinaire suivant

un difféomorphisme des bords permet d'obtenir effectivement une bouteille de Klein.

Remarquons que notre liste de surfaces modèles ne comporte pas de surfaces à bandes et à anses, i.e. nous n'y avons pas inclu la sphère à trous dont une partie soit recollée avec des anses et une autre partie avec des bandes de Mœbius. Comme nous montrerons dans *3*, pour $h \geqslant 1$, la sphère à g anses, à h bandes et à l trous est difféomorphe à la sphère à $2g + h$ bandes et à l trous.

Propositions auxiliaires

3 (Lemme). *Soient X_1, X_2 des variétés compactes différentiables de dimension deux et φ un difféomorphisme d'une composante du bord de la variété X_2 sur une composante du bord de la variété X_1; soit X le résultat du recollement de X_1 et X_2 suivant φ. Alors:*

(i) *si X_1 est difféomorphe à une sphère à g_1 anses et à l_1 trous et X_2 est difféomorphe à une sphère à g_2 anses et à l_2 trous, alors X est difféomorphe à une sphère à $g_1 + g_2$ anses et à $l_1 + l_2 - 2$ trous;*

(ii) *si X_1 est difféomorphe à une sphère à h_1 bandes et à l_1 trous tandis que X_2 est difféomorphe à une sphère à h_2 bandes et à l_2 trous; alors X est difféomorphe à une sphère à $h_1 + h_2$ bandes et à $l_1 + l_2 - 2$ trous;*

(iii) *si X_1 est difféomorphe à une sphère à g_1 anses et l_1 trous, X_2 est difféomorphe à une sphère à $h_2 > 0$ bandes et à l_2 trous, alors X est*

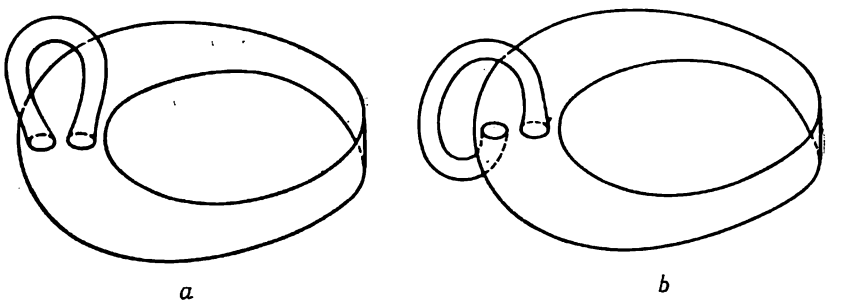


Fig. 10

difféomorphe à une sphère à $2g_1 + h_2$ bandes et à $l_1 + l_2 - 2$ trous.

Seul le cas (iii), dans lequel X est évidemment difféomorphe à une sphère à g_1 anses, h_2 bandes et à $l_1 + l_2 - 2$ trous, nécessite une démonstration.

Supposons d'abord que $g_1 = 1$, $h_2 = 1$ et $l_1 + l_2 - 2 = 1$. Alors X est difféomorphe à la bande de Mœbius à anse représentée sur la figure 10, *a*. Cette dernière est évidemment diffeomorphe à la bande de Mœbius à anse retournée représentée sur la figure 10, *b*;

on peut donc la découper en une sphère à bande et à deux trous et en un disque à anse retournée. D'après (ii), il en découle que X est difféomorphe à la sphère à trois bandes et à un trou.

Dans le cas général, nous ferons une récurrence sur g_1. Pour $g_1 = 0$, il n'y a rien à démontrer. Pour $g_1 > 0$, X peut être recollé de deux sphères, l'une à $g_1 - 1$ anses, $h_2 - 1$ bandes et $l_1 + l_2 - 1$ trous et l'autre à une anse, une bande et un trou. D'après ce que nous avons déjà démontré, la deuxième variété est difféomorphe à une sphère à trois anses et à un trou ; par conséquent, X est difféomorphe à une sphère à $g_1 - 1$ anses, $h_2 + 2$ bandes et $l_1 + l_2 - 2$ trous, et donc à une sphère à $2g_1 + h_2$ bandes et à $l_1 + l_2 - 2$ trous.

4 (Lemme). *Soient X une variété différentiable compacte connexe de dimension deux et X' le résultat du recollement à X d'une anse suivant un difféomorphisme de son bord sur la réunion de deux composantes du bord de X. Alors :*

(i) *si X est difféomorphe à une sphère à g anses et l trous, X' est difféomorphe à une sphère à $g + 1$ anses et $l - 2$ trous ou à une sphère à $2g + 2$ bandes et $l - 2$ trous ;*

(ii) *si X est difféomorphe à une sphère à h bandes et à l trous, X' est difféomorphe à une sphère à $h + 2$ bandes et $l - 2$ trous.*

Ceci découle du lemme *3*, puisque dans les deux cas X' se décompose en deux variétés dont l'une diffère de X seulement par un trou de moins, tandis que l'autre est difféomorphe à une sphère à une anse et un trou ou à un disque à anse retournée.

5. Soient X_1, X_2 des variétés différentiables compactes et φ un difféomorphisme d'une partie non vide du bord ∂X_2 constituée de ses composantes entières sur une partie du bord ∂X_1 constituée de ses composantes entières. Soit ensuite X la variété recollée de X_1 et X_2 suivant φ. Si chacune des variétés X_1, X_2 est difféomorphe à une des surfaces modèles, alors X est également difféomorphe à une surface modèle.

Ceci découle des lemmes *3* et *4*, puisque le recollement suivant φ est équivalent au recollement suivant le difféomorphisme abrégé d'une des composantes du bord ∂X_2 sur la composante correspondante du bord ∂X_1, suivi de recollements d'anses dont le nombre est égal à la moitié du nombre des composantes à identifier des bords ∂X_1, ∂X_2.

Théorème fondamental

6. Chaque variété différentiable compacte connexe de dimension deux est difféomorphe à une surface modèle.

En vertu des théorèmes 2.10 et *5*, il suffit d'établir que les composantes des cobordismes élémentaires de dimension deux sont difféomorphes à des surfaces modèles. Or, ceci se vérifie facilement en considérant tour à tour toutes les possibilités qui se présentent, étant donné qu'une variété différentiable fermée de dimension un est dif-

féomorphe à la somme de plusieurs cercles. A savoir, le cobordisme élémentaire d'indice 0 construit suivant la somme de m cercles est difféomorphe à la somme de m sphères à deux trous et d'une sphère à un trou ; le cobordisme élémentaire d'indice 2, construit d'après la somme de m cercles (et suivant un plongement différentiable du cercle dans cette somme) est difféomorphe à la somme de $m - 1$ sphères à deux trous et d'une sphère à un trou ; le cobordisme élémentaire d'indice 1, construit suivant la somme de m cercles et du plongement différentiel du produit $S^0 \times D^1$ dans cette somme, est difféomorphe soit à la somme de $m - 2$ sphères à deux trous et d'une sphère à trois trous, soit à la somme de $m - 1$ sphères à deux trous et d'une sphère à trois trous ou enfin à la somme de $m - 1$ sphères à deux trous et d'une sphère à une bande et à deux trous (pour $m = 2$, ces trois cas sont montrés sur la figure 11).

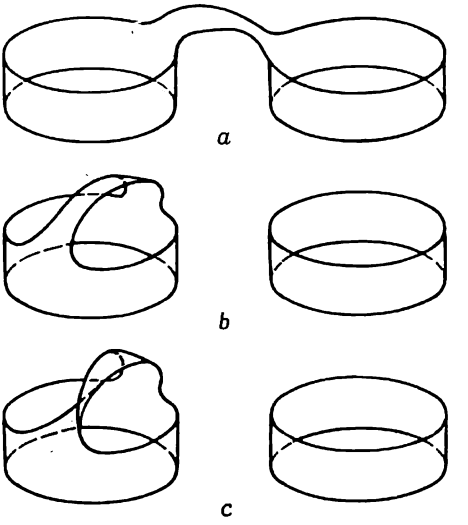


Fig. 11

7 (Information). Toute variété topologique compacte connexe de dimension deux est homéomorphe à une surface modèle.

Partitions cellulaires des surfaces modèles fermées

8. Les surfaces modèles fermées admettent des partitions cellulaires équipées standards qui généralisent la partition canonique en deux cellules de la sphère S^2, la partition canonique en trois cellules du plan projectif $\mathbb{R}P^2$ et la partition canonique en quatre cellules du tore $S^1 \times S^1$. Chacune de ces partitions standards, sauf la partition sans cellules de la surface modèle vide, contient une seule cellule de dimension nulle et une seule cellule de dimension deux, tandis que le nombre des cellules de dimension un est égal à $2g$ dans le cas d'une sphère à g anses, et à h dans le cas d'une sphère à h bandes. Ainsi, le squelette de dimension un est, dans le cas d'une sphère à g anses, un bouquet de $2\,g$ cercles, et dans le cas d'une sphère à h bandes un bouquet de h cercles ; pour décrire toute la partition cellulaire équipée il suffit de décrire l'application de recollement correspondant à la cellule de dimension deux, i.e. une certaine application du cercle S^1 dans le bouquet indiqué.

Laissant de côté les valeurs $g = 0, 1$ et $h = 0, 1$ déjà considérées, nous allons représenter S^1, dans le cas d'une sphère à g anses, comme le périmètre d'un polygone régulier à $4\,g$ côtés numérotés à partir du sommet ort_1 de la manière suivante :

$$a_1,\ b_1,\ a'_1,\ b'_1,\ \ldots,\ a_g,\ b_g,\ a'_g,\ b'_g,$$

et dans le cas d'une sphère à h bandes comme le périmètre d'un polygone régulier à $2h$ côtés numérotés à commencer par le sommet ort_1 comme suit :

$$c_1,\ c'_1,\ \ldots,\ c_h,\ c'_h.$$

Dans les deux cas nous prenons l'espace quotient de S^1 par identification des côtés de même nom et de même indice, seulement a_i est

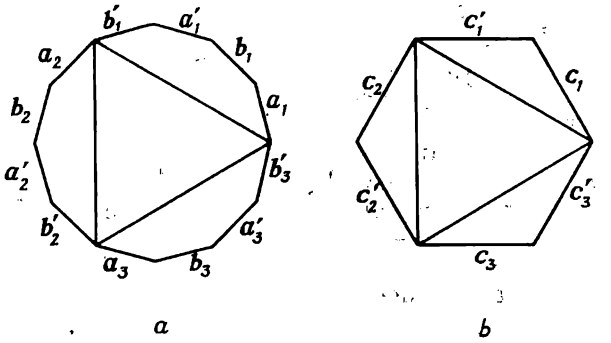


Fig. 12 ($g = 3$, $h = 3$)

identifié avec a'_i et b_i avec b'_i par symétrie relativement à la droite correspondante, tandis que c_i s'identifie à c'_i par rotation du polygone autour de son centre. Dans les deux cas l'espace quotient est un bouquet de cercles : de $2\,g$ cercles dans le premier cas et de h cercles dans le second. Une projection du cercle S^1 sur cet espace quotient sera justement une application de recollement.

Naturellement, il faut encore vérifier que les espaces cellulaires construits sont homéomorphes à nos surfaces modèles. Découpons nos polygones à $4\,g$ et à $2\,h$ côtés de la manière indiquée sur la figure 12. Nous obtenons un polygone à g côtés et g pentagones dans le premier cas et un polygone à h côtés et h triangles dans le second. Par les identifications requises des côtés a_i, a'_i et b_i, b'_i les sommets du polygone à g côtés viennent tous en un seul point, ce qui donne une sphère à g trous circulaires, et les pentagones forment chacun un tore avec un trou circulaire ; en recollant ces tores troués à la sphère à trous pour retrouver la structure détruite par les découpages auxiliaires (suivant les diagonales) nous obtiendrons, à un homéomorphisme près,

une sphère à g anses. Exactement de la même manière, les identifications requises des côtés c_i, c'_i amènent les sommets du polygone à h côtés en un seul point, ce qui nous donne une sphère à h trous circulaires, et à l'identification des côtés des triangles qui transforme chacun d'eux en une bande de Mœbius ; en recollant ces bandes à la sphère trouée, nous obtenons, à un homéomorphisme près, une sphère à h bandes. (Remarque. Les bords des trous circulaires dans la sphère ont un point commun, et pour $g = 2$ et $h = 2$ ils coïncident.)

Structure homotopique des surfaces modèles non fermées

9. La sphère à g anses et à l trous est homotopiquement équivalente à un bouquet de $2g + l - 1$ cercles. La sphère à h bandes et à l trous est homotopiquement équivalente à un bouquet de $h + l - 1$ cercles.

Pour la démonstration, remarquons que le recollement décrit dans *8* du polygone à $4g$ côtés à un bouquet de $2g$ cercles nous amène, à un homéomorphisme près, à une sphère à g anses et à l trous si nous ôtons préalablement de l'intérieur du polygone à $4g$ côtés les intérieurs de l petits disques disjoints. Disposons ces disques de manière à ce que chaque droite qui passe par le premier sommet (ort_1) ne coupe pas plus d'un disque, et désignons par A l'ensemble constitué par : (i) le périmètre du polygone à $4g$ côtés ; (ii) $2l - 2$ segments menés du premier sommet et tangents aux $l - 1$ disques ; (iii) les arcs extérieurs des frontières de ces disques comprenant les points de tangence. Il est clair que A est un rétracte de déformation stricte du polygone troué à $4g$ côtés. La rétraction de déformation stricte correspondante se transforme, après projection du polygone à $4g$ côtés sur la sphère à g anses, en une rétraction de déformation stricte de la sphère trouée à g anses sur l'image de l'ensemble A laquelle est évidemment homéomorphe au bouquet de $2g + l - 1$ cercles.

Le cas de la sphère à h bandes et à l trous se démontre de façon analogue, sauf qu'il faut remplacer le polygone à $4g$ côtés par un polygone à $2h$ côtés.

4. Exercices

1. Montrer qu'une variété différentiable connexe non compacte de dimension un est difféomorphe à une droite ou à une demi-droite (cf. 3.1).

2. Montrer que la sous-variété du plan projectif complexe $\mathbf{C}P^2$ définie en coordonnées homogènes par l'équation $z_1^m + z_2^m + z_3^m = 0$ est difféomorphe à la sphère à $(m - 1)(m - 2)/2$ anses (cf. 2.4.4 et 2.4.5).

3. Montrer que la partie du produit $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ constituée des points $((z_1 : z_2), (w_1 : w_2))$ tels que $z_1^q (w_1^p + w_2^p) = z_2^q (w_1^p - w_2^p)$ est difféomorphe à une sphère à $(p - 1)(q - 1)$ anses.

4. Montrer qu'une variété différentiable orientable fermée connexe de dimension trois peut être obtenue par recollement de deux copies d'un corps à anses suivant un certain difféomorphisme de son bord. (Un corps à anses est la partie de l'espace $\mathbf{R}^3$ limitée par une sphère à anses plongée canoniquement dans $\mathbf{R}^3$).

5. Montrer que la variété qui s'obtient par recollement de deux copies du tore plein $S^1 \times D^2$ suivant le difféomorphisme de son bord $S^1 \times S^1$ défini par la formule $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^a z_2^b, z_1^c z_2^d)$, où a, b, c, d sont des entiers vérifiant $ad - bc = \pm 1$, est difféomorphe à S^3 pour $a = 0$, difféomorphe à $S^2 \times S^1$ pour $a = \pm 1$, et difféomorphe à $\mathbf{R}P^3$ pour $a = \pm 2$.

6. Montrer que sur toute $\mathscr{C}^\infty$-variété fermée connexe, il existe une fonction de Morse propre admettant un minimum local unique et un maximum local unique.

7. Montrer qu'un cobordisme connexe X, à bords $\partial_0 X$ et $\partial_1 X$ non vides, admet une fonction de Morse propre sans maximums locaux et sans minimums locaux contenus dans int X.

8. Montrer que tout cobordisme admet une fonction de Morse propre f telle que si x_1 est son point critique d'indice k_1 et x_2 son point critique d'indice k_2, $k_2 > k_1$, alors $f(x_2) > f(x_1)$.

9. Montrer que si un cobordisme X admet une fonction de Morse sans points critiques d'indice 1 et la variété $\partial_0 X$ est orientable, alors X est orientable et chaque orientation de $\partial_0 X$ est induite par une certaine orientation de X.

CHAPITRE 4

LES FIBRÉS

§ 1. FIBRÉS SANS STRUCTURE DE GROUPE

1. Définitions générales

1. On appelle *fibré* un triplet de la forme (T, p, B) où T et B sont des espaces topologiques et p une application continue du premier espace dans le second. L'espace T est appelé *espace total* du fibré (T, p, B), l'espace B est sa *base*, l'application p sa *projection*. L'espace total du fibré ξ sera désigné par $\mathrm{tl}\,\xi$, sa base par $\mathrm{bs}\,\xi$, sa projection par $\mathrm{pr}\,\xi$.

L'image inverse $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)$ du point $b \in \mathrm{bs}\,\xi$ est appelée *fibre du fibré* ξ *au-dessus du point* b.

On appelle *section* d'un fibré ξ toute application continue s: $\mathrm{bs}\,\xi \to \mathrm{tl}\,\xi$ telle que $\mathrm{pr}\,\xi \circ s = \mathrm{id}\,\mathrm{bs}\,\xi$. Deux sections du fibré ξ sont dites *homotopes* si on peut les lier par une homotopie constituée de sections, i.e. par une homotopie h: $\mathrm{bs}\,\xi \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ telle que $\mathrm{pr}\,\xi \circ h$ coïncide avec pr_1: $\mathrm{bs}\,\xi \times I \to \mathrm{bs}\,\xi$.

On appelle *restriction d'un fibré* ξ *à un sous-espace* B *de la base* $\mathrm{bs}\,\xi$ le fibré à base B, à espace total $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(B)$ et à projection ab $\mathrm{pr}\,\xi$. On le désigne par $\xi \mid_B$.

On appelle *produit de fibrés* ξ_1, ξ_2 un fibré à espace total $\mathrm{tl}\,\xi_1 \times \mathrm{tl}\,\xi_2$, à base $\mathrm{bs}\,\xi_1 \times \mathrm{bs}\,\xi_2$ et à projection $\mathrm{pr}\,\xi_1 \times \mathrm{pr}\,\xi_2$. On le désigne par $\xi_1 \times \xi_2$. Sa fibre au-dessus du point (b_1, b_2) coïncide avec le produit des fibres $\mathrm{pr}\,\xi_1^{-1}(b_1)$, $\mathrm{pr}\,\xi_2^{-1}(b_2)$.

2. On appelle *application d'un fibré* ξ' *dans un fibré* ξ tout couple d'applications continues F: $\mathrm{tl}\,\xi' \to \mathrm{tl}\,\xi$, f: $\mathrm{bs}\,\xi' \to \mathrm{bs}\,\xi$ pour lequel le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{tl}\,\xi' \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{pr}\,\xi'"'] & \mathrm{tl}\,\xi \arrow[d, "\mathrm{pr}\,\xi"] \\ \mathrm{bs}\,\xi' \arrow[r, "f"] & \mathrm{bs}\,\xi. \end{tikzcd} \tag{1}$$

Si $\varphi = (F, f)$ est un tel couple, nous écrivons φ: $\xi' \to \xi$, $F = \mathrm{tl}\,\varphi$, $f = \mathrm{bs}\,\varphi$.

Une application $\varphi : \xi' \to \xi$ est appelée *isomorphisme* si tl φ et bs φ sont des homéomorphismes ; on l'appelle *équivalence* si en outre bs ξ = bs ξ' et bs φ = id bs ξ. Les fibrés que l'on peut lier par un isomorphisme (resp. une équivalence) sont appelés *isomorphes* (resp. *équivalents*).

Une application $\varphi : \xi' \to \xi$ est appelée *inclusion* si tl φ et bs φ sont des inclusions. Par exemple, les inclusions in : pr $\xi^{-1}(B) \to$ tl ξ, in : $B \to$ bs ξ constituent (pour tout sous-ensemble B de l'espace bs ξ) une inclusion du fibré $\xi|_B$ dans ξ.

3. Il découle de la commutativité du diagramme (1) que l'application F *conserve les fibres*, i.e. applique chaque fibre du fibré ξ' dans une certaine fibre du fibré ξ. Il est également clair que si pr ξ' (tl ξ') = bs ξ', alors pour toute application conservant les fibres F : tl $\xi' \to$ tl ξ il existe une application et une seule f : bs $\xi' \to$ bs ξ pour laquelle le diagramme (1) est commutatif ; d'autre part, si l'application pr ξ' est décomposable, la continuité de F implique celle de f. Ainsi, *si ξ' est un fibré à projection factorielle, alors pour toute application continue conservant les fibres F : tl $\xi' \to$ tl ξ il existe une application et une seule $\varphi : \xi' \to \xi$ avec* tl $\varphi = F$.

4. Soit f une application continue d'un espace topologique B dans la base d'un fibré ξ. Un fibré dont la base est B, l'espace total est le sous-espace du produit $B \times$ tl ξ constitué des points (b, x) tels que $f(b)$ = pr $\xi(x)$, et la projection est la restriction de l'application $\mathrm{pr}_1 : B \times$ tl $\xi \to B$ au sous-espace indiqué, est appelé *fibré induit du fibré ξ par f* ; on le désigne par $f^!\xi$.

Il est clair que la restriction de l'application $\mathrm{pr}_2 : B \times$ tl $\xi \to$ tl ξ à tl $(f^!\xi)$ est un homéomorphisme de la fibre du fibré $f^!\xi$ au-dessus du point $b \in$ bs $(f^!\xi)$ sur la fibre du fibré ξ au-dessus du point $f(b)$; cette restriction constitue avec f une application du fibré $f^!\xi$ dans ξ. On dit qu'elle est *adjointe à f* et on la désigne par ad f.

De même que les précédentes, les formulations suivantes ne nécessitent ni démonstration, ni clarification. Si f est un homéomorphisme, alors l'application adjointe ad $f : f^!\xi \to \xi$ est un isomorphisme, tandis que si l'on a f = id bs ξ, alors ad f est une équivalence. Si f est une inclusion, alors l'application ad $f : f^!\xi \to \xi$ établit une équivalence entre $f^!\xi$ et $\xi|_B$. Enfin, quelles que soient les applications continues $f : B \to$ bs ξ, $g : B' \to B$, le fibré $(f \circ g)^!\xi$ est canoniquement équivalent au fibré $g^!(f^!\xi)$.

5. Si φ est une application d'un fibré ξ' dans un fibré ξ, alors la formule $x \mapsto (\mathrm{pr}\ \xi'(x), \mathrm{tl}\ \varphi(x))$ détermine une application continue de l'espace tl ξ' dans tl $((\mathrm{bs}\ \varphi)^!\xi)$ qui constitue, avec id bs ξ', une application du fibré ξ' dans $(\mathrm{bs}\ \varphi)^!\xi$. Nous désignerons cette application par corr φ ; nous dirons qu'elle *corrige* φ. Il est évident que ad (bs φ) $\circ$ corr $\varphi = \varphi$.

2. Fibrés localement triviaux

1. Un exemple évident d'un fibré à base donnée B dont les fibres sont homéomorphes à un espace donné F est le *fibré trivial standard* $(B \times F, \mathrm{pr}_1, B)$. Ses fibres sont les fibres $b \times F$ du produit $B \times F$ qui sont même canoniquement homéomorphes à F.

Remarquons que les sections $B \to B \times F$ du fibré standard trivial à base B et à fibre F sont en bijection naturelle avec les applications continues $B \to F$: à l'application $f: B \to F$ correspond la section $s: B \to B \times F$ définie par la formule $s(b) = (b, f(b))$. Nous dirons que f et s sont *associées l'une à l'autre.*

2. Un fibré ξ est dit *trivial*, ou plus explicitement *topologiquement trivial*, s'il est équivalent au fibré trivial standard. Toute équivalence entre le fibré trivial standard et ξ est appelée *trivialisation* du fibré ξ.

Le fibré ξ est dit *localement trivial*, ou plus explicitement *localement topologiquement trivial*, si chaque point de sa base possède un voisinage U tel que la restriction $\xi|_U$ est triviale.

Puisque la projection d'un produit sur son facteur est une application ouverte, la projection d'un fibré trivial et donc la projection d'un fibré localement trivial sont des applications ouvertes.

Une vérification immédiate montre que le produit de deux fibrés triviaux est toujours un fibré trivial tandis que le produit de deux fibrés localement triviaux est localement trivial. Il est également clair qu'un fibré induit par un fibré trivial (resp. localement trivial) est trivial (resp. localement trivial). En outre, si $f: B \to \mathrm{bs}\, \xi$ est une application constante, le fibré induit $f^!\xi$ est trivial quel que soit ξ.

3. De même que les fibres du fibré trivial standard, les fibres d'un fibré trivial sont homéomorphes entre elles, sauf que dans le cas non standard les homéomorphismes ne sont plus canoniques. Les fibres d'un fibré localement trivial sont également homéomorphes entre elles à condition que la base du fibré soit connexe. En effet, l'ensemble des points de la base dont les fibres sont homéomorphes à une fibre donnée est ouvert, et de tels ensembles constituent une partition de la base (voir 1.3.3.5). D'autre part, l'exemple du fibré

$$((B \times F) \sqcup (B' \times F'), \mathrm{pr}_1 \sqcup \mathrm{pr}'_1, B \sqcup B'),$$

où B, F, B', F' sont des espaces topologiques quelconques, nous montre que les fibres d'un fibré localement trivial situées au-dessus des points de composantes distinctes de la base ne sont pas nécessairement homéomorphes. Nous voyons en même temps qu'un fibré localement trivial peut ne pas être trivial.

Un fibré localement trivial non trivial peut également avoir une base connexe ; voir *5* et *6*.

Revêtements

4. On appelle *revêtement au sens large* tout fibré localement trivial dont les fibres sont des espaces discrets. Dans ce cas, l'espace total est généralement appelé *espace de revêtement.* Il est évident que chaque point de l'espace de revêtement possède un voisinage qui reste homéomorphe par projection sur son image dans la base.

Un revêtement au sens large est appelé *revêtement au sens strict* ou *revêtement* tout court, si l'espace de revêtement et la base sont connexes et non vides. D'après *3*, toutes les fibres d'un revêtement sont de même *cardinalité*; on l'appelle *nombre de feuillets du revêtement.*

5. Un revêtement à nombre de feuillets supérieur à un est non trivial. En effet, l'espace total d'un revêtement trivial étant homéomorphe au produit de la base par une fibre, il ne peut être connexe si la fibre est discrète et contient plus d'un point.

6. (Exemples). Le fibré à espace total et base S^1 dont la projection $\mathrm{hel}_m : S^1 \to S^1$ est définie par la formule complexe $\mathrm{hel}_m(z) = z^m$ est, pour $m \neq 0$, un revêtement à $|m|$ feuillets. Le fibré à espace total R, à base S^1 et à projection $\mathrm{hel} : \mathsf{R} \to S^1$ définie par la formule $\mathrm{hel}\,(x) = e^{2\pi i x}$ est un revêtement à ensemble de feuillets dénombrable.

Le fibré à espace total $G_+\,(n, k)$ et à base $G\,(n, k)$ dont la projection est la submersion indiquée dans 3.2.2.3 est pour $k \neq 0$, n un revêtement à deux feuillets. En particulier, tel est le fibré $(S^n, \mathrm{pr}, \mathsf{R}P^n)$ avec $n \geqslant 1$.

Pour conclure, nous montrerons que pour tout entier positif h une sphère à h bandes admet un revêtement à deux feuillets par une sphère à $h - 1$ anses (voir 3.5.3). Dans le cas $h = 1$, un tel revêtement a déjà été construit: c'est $(S^2, \mathrm{pr}, \mathsf{R}P^2)$. Dans le cas général, on peut le construire en se servant de h copies du revêtement $(S^2, \mathrm{pr}, \mathsf{R}P^2)$. Pour cela, prenons la restriction d'une des copies à un revêtement au-dessus du plan projectif à $h - 1$ trous et les restrictions des autres $h - 1$ copies à des revêtements au-dessus du plan projectif à un seul trou (i.e. au-dessus de la bande de Mœbius) et recollons les bases des h revêtements restreints pour obtenir une sphère à h bandes au moyen des difféomorphismes entre les bords des trous. Ce recollement peut être recouvert par le recollement des espaces totaux dont l'un est une sphère à $h - 1$ paires de trous antipodaux, tandis que les $h - 1$ autres sont des sphères possédant une paire de trous antipodaux, i.e. sont des cylindres sur un cercle. (Pour chacun de ces $h - 1$ cylindres il y a deux recollements possibles pour obtenir un revêtement; on peut se servir de n'importe quel d'entre eux.) Puisque recoller une paire de trous par un cylindre c'est la remplacer par une anse, on obtiendra finalement un revêtement à deux feuillets de la sphère à h bandes par une sphère à $h - 1$ anses.

3. Fibrés de Serre

1. Un fibré ξ est appelé *fibré de Serre* s'il satisfait à la condition de Serre: pour tout entier positif r et pour tout couple d'applications continues $f: I^r \to \mathrm{bs}\,\xi$, $\tilde{f}_0: I^{r-1} \to \mathrm{tl}\,\xi$ qui vérifient $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{f}_0 = f|_{I^{r-1}}$, il existe une application continue $\tilde{f}$: $I^r \to \mathrm{tl}\,\xi$ telle que $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}|_{I^{r-1}} = \tilde{f}_0$. (Le cube I^{r-1} est identifié à la face du cube I^r sur laquelle la dernière coordonnée s'annule; voir 1.2.5.7.)

La relation $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{f} = f$ qui participe à la condition de Serre est fondamentale dans la théorie générale des fibrés; notons que l'espace appliqué n'est pas nécessairement un cube. L'application $\tilde{f}$: $X \to \mathrm{tl}\,\xi$ liée par cette relation à l'application $f: X \to \mathrm{bs}\,\xi$ est appelée, pour des ξ et X quelconques, *application de recouvrement* relativement à f.

Une vérification immédiate nous montre que le produit de deux fibrés de Serre, ainsi que le fibré induit par un fibré de Serre sont également des fibrés de Serre.

2. En guise d'exemples de fibrés qui ne vérifient pas la condition de Serre, citons les fibrés (I, p, I) avec $p(x) = x/2$ et $p(x) = 4x(1-x)$. Le premier n'a pas d'application $\tilde{f}$ pour laquelle $p \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}|_{I^{r-1}} = \tilde{f}_0$ lorsque $r = 1$, $f = \mathrm{id}\, I$, $\tilde{f}_0(0) = 0$, le second, lorsque $r = 2$, f se détermine par la formule $f(x_1, x_2) = 4x_1(1-x_1)(1-x_2)$ et $\tilde{f}_0 = \mathrm{id}\, I$.

Remarquons que le premier fibré possède des fibres vides ainsi que des fibres non vides, tandis que chez le second une fibre est connexe et les autres ne le sont pas. Comme nous verrons par la suite (voir 5.4.3.6), ces deux propriétés sont déjà incompatibles avec la condition de Serre lorsque la base est connexe.

Localité de la condition de Serre

3. Si chaque point de la base d'un fibré ξ possède un voisinage U tel que la restriction $\xi|_U$ est un fibré de Serre, alors ξ est un fibré de Serre.

Démonstration. Soient $f: I^n \to \mathrm{bs}\,\xi$, $\tilde{f}_0: I^{n-1} \to \mathrm{tl}\,\xi$ des applications continues telles que $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{f}_0 = f|_{I^{n-1}}$. Puisque l'espace $\mathrm{bs}\,\xi$ peut être recouvert par des ensembles ouverts tels que la restriction du fibré ξ à ces ensembles vérifie la condition de Serre, il découle du théorème 1.1.7.16 qu'il existe un entier positif N tel que chaque cube à arête $1/N$ situé dans I^n est appliqué par f dans un des ensembles indiqués. Décomposons I^n en N^n cubes à arêtes $1/N$,

numérotons-les dans l'ordre lexicographique $Q_1, \ldots, Q_{N^n}$; posons

$$W_i = I^{n-1} \cup (\bigcup_{j=1}^{i} Q_j), \quad Q'_i = Q_i \cap W_{i-1}.$$

Il est clair que

$$I^{n-1} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{N^n} = I^n$$

et un simple essai des possibilités qui se présentent montre que le couple (Q_i, Q'_i) est homéomorphe au couple (I^n, I^{n-1}). Admettons que pour un entier positif $i \leqslant N^n$, nous avons une application $\tilde{f}_{i-1}: W_{i-1} \to \mathrm{tl}\,\xi$ telle que $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{f}_{i-1} = f|_{W_{i-1}}$ et $\tilde{f}_{i-1}|_{I^{n-1}} = \tilde{f}_0$; posons $g_i = f|_{Q_i}$ et $\tilde{g}_{0i} = \tilde{f}_{i-1}|_{Q'_i}$. Puisque la restriction $\xi|_{f(Q_i)}$ vérifie la condition de Serre, il existe une application continue $\tilde{g}_i$: $Q_i \to \mathrm{tl}\,\xi$ telle que $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{g}_i = g_i$, $\tilde{g}_i|_{Q'_i} = \tilde{g}_{0i}$. Puisque, d'autre part, les applications $\tilde{f}_{i-1}$ et $\tilde{g}_i$ coïncident sur $W_{i-1} \cap Q_i = Q'_i$, elles constituent une certaine application continue $\tilde{f}_i$: $W_i = W_{i-1} \cup Q_i \to \mathrm{tl}\,\xi$ et donc $\mathrm{pr}\,\xi \circ f_i = f|_{W_i}$ et $\tilde{f}_i|_{I^{n-1}} = \tilde{f}_0$. En procédant ensuite par récurrence sur i, en commençant par $i = 0$, nous obtiendrons une application $\tilde{f} = \tilde{f}_{N^n}$ pour laquelle $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}|_{I^{n-1}} = \tilde{f}_0$.

Condition de Serre et trivialité locale

4. Un fibré localement trivial est un fibré de Serre.

D'après le théorème *3*, il suffit d'effectuer la démonstration pour le fibré $(B \times F, \mathrm{pr}_1, B)$, où B et F sont des espaces topologiques quelconques. Soient $f: I^n \to B$ et $\tilde{f}_0: I^{n-1} \to B \times F$ des applications telles que $\mathrm{pr}_1 \circ \tilde{f}_0 = f|_{I^{n-1}}$. Définissons l'application $\tilde{f}: I^n \to B \times F$ par la formule

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, x_n), \mathrm{pr}_2 \circ \tilde{f}_0(x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

Il est évident que $\mathrm{pr}_1 \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f}|_{I^{n-1}} = \tilde{f}_0$.

5. L'exemple suivant nous montre qu'un fibré de Serre n'est pas nécessairement localement trivial. Soit T un triangle dans $\mathbf{R}^2$ à sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et soient p_1, p_2 ses applications sur I, définies par les formules $p_1(x_1, x_2) = x_1$, $p_2(x_1, x_2) = x_2$. Le fibré (T, p_1, I) n'est pas localement trivial, puisque la fibre au-dessus du point 0 n'est pas homéomorphe à celle au-dessus du point 1 quoique la base soit connexe. Néanmoins ce fibré vérifie la condition de Serre : si les applications $f: I^n \to I$, $\tilde{f}_0: I^{n-1} \to T$ sont continues et $p_1 \circ \tilde{f}_0 =$

$= f\,|_{I^{n-1}}$, alors l'application $\tilde{f}\colon I^n \to T$, définie par la formule

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= (f(x_1, \ldots, x_n), \min(1 - f(x_1, \ldots, x_n), p_2 \circ \tilde{f}_0(x_1, \ldots, x_{n-1}))),$$

est continue, recouvre f et coïncide avec $\tilde{f}_0$ sur I^{n-1}.

Cet exemple nous montre également qu'un fibré de Serre à base connexe peut posséder des fibres non homéomorphes. Les fibres d'un fibré de Serre à base connexe peuvent même ne pas être homotopiquement équivalentes et sont équivalentes seulement dans un sens plus faible (voir 5.4.4.3 et 5.4.3.6).

Théorème sur l'homotopie de recouvrement

6. Si ξ est un fibré de Serre et (X, A) un couple cellulaire, alors pour toute application continue $\tilde{f}\colon X \to \mathrm{tl}\,\xi$, toute homotopie $F\colon X \times I \to \mathrm{bs}\,\xi$ de l'application $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{f}$ et toute homotopie $G\colon A \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ de l'application $\tilde{f}\,|_A$ qui recouvre $F\,|_{A \times I}$, il existe une homotopie de l'application $\tilde{f}$ qui recouvre F et prolonge G.

Démonstration. Nous allons supposer que l'espace X est équipé et que, pour un certain $r \geqslant 0$, nous avons l'homotopie

$$\tilde{F}_{r-1}\colon (A \cup \mathrm{ske}_{r-1} X) \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$$

de l'application $\tilde{f}\,|_{A \cup \mathrm{ske}_{r-1} X}$ qui recouvre $F\,|_{(A \cup \mathrm{ske}_{r-1} X) \times I}$. Si e est une cellule de $X \setminus A$ avec $\dim e = r$, alors la formule $\varphi_e(x, t) = F(\mathrm{cha}_e(x), t)$ détermine une application continue $\varphi_e\colon D^r \times I \to \mathrm{bs}\,\xi$, tandis que la formule

$$\tilde{\varphi}_{0,e}(x, t) = \begin{cases} \tilde{f}(\mathrm{cha}_e(x)) & \text{pour } t = 0, \\ \tilde{F}_{r-1}(\mathrm{cha}_e(x), t) & \text{pour } x \in S^{r-1} \end{cases}$$

nous donne une application continue $\tilde{\varphi}_{0,e}\colon (D^r \times 0) \cup (S^{r-1} \times I) \to \mathrm{tl}\,\xi$. Il est clair que le couple $(D^r \times I, (D^r \times 0) \cup (S^{r-1} \times I))$ est homéomorphe au couple (I^{r+1}, I^r) et que $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{\varphi}_{0,e} = \varphi_e\,|_{(D^r \times 0) \cup (S^{r-1} \times I)}$; par conséquent, il existe une application continue $\tilde{\varphi}_e\colon D^r \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ qui recouvre φ_e et prolonge $\tilde{\varphi}_{0,e}$. Puisque $\tilde{\varphi}_e(x, t) = \tilde{F}_{r-1}(\mathrm{cha}_e(x), t)$ pour $x \in S^{r-1}$, les applications $\tilde{\varphi}_e$ correspondant à toutes les cellules de dimension r de $X \setminus A$ définissent avec $\tilde{F}_{r-1}$ une certaine application continue $\tilde{F}_r\colon (A \cup \mathrm{ske}_r X) \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$; il est clair que $\mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{F}_r = F\,|_{(A \cup \mathrm{ske}_r X) \times I}$ et $\tilde{F}_r\,|_{(A \cup \mathrm{ske}_{r-1} X) \times I} = \tilde{F}_{r-1}$. Ceci permet d'effectuer une récurrence sur r en posant $\tilde{F}_{-1} = G$; nous obtenons une suite d'homotopies $\{\tilde{F}_r\colon (A \cup \mathrm{ske}_r X) \times I \to \mathrm{tl}\,\xi\}_{r=-1}^{\infty}$

qui se prolongent de proche en proche et qui constituent une homotopie de l'application $\tilde{f}$ qui recouvre F et prolonge G.

7. Soient X un espace cellulaire et $\tilde{f}: X \to \mathrm{tl}\ \xi$ une application continue. Si ξ est un fibré de Serre, alors chaque homotopie de l'application pr $\xi \circ \tilde{f}$ *se recouvre par une homotopie de l'application $\tilde{f}$.*

Cet énoncé est la variante absolue du théorème *6* et s'en obtient en posant $A = \emptyset$. Remarquons que pour $X = I^n$ elle se réduit à la condition de Serre avec $r = n + 1$.

Le cas des revêtements

8. Soient ξ un revêtement au sens large, X un espace topologique connexe et f, $g: X \to \mathrm{tl}\ \xi$ des applications continues. Si pr $\xi \circ f =$ $=$ pr $\xi \circ g$ *et f coïncide avec g en un certain point, alors $f = g$.*

Démonstration. Puisque l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ est ouvert, tandis que son complémentaire n'est pas vide, il suffit d'établir que ce complémentaire est ouvert, i.e. que si $f(x_0) = g(x_0)$ le point x_0 possède un voisinage sur lequel f coïncide avec g. Soient V un voisinage (du point $f(x_0)$) appliqué homéomorphiquement par pr ξ sur pr $\xi(V)$ (voir 2.4) et U un voisinage du point x_0 tel que $f(U) \subset V$ et $g(U) \subset V$. Puisque pr $\xi(f(x)) =$ pr $\xi(g(x))$ pour tout point $x \in X$, on a $f(x) = g(x)$ pour $x \in U$.

9. Soient ξ un revêtement au sens large, X un espace cellulaire connexe à cellule distinguée x_0 de dimension nulle et f, $g: X \to \mathrm{tl}\ \xi$ des applications continues. Si les applications pr $\xi \circ f$, pr $\xi \circ g$ *sont x_0-homotopes et $f(x_0) = g(x_0)$, alors les applications f, g sont aussi x_0-homotopes.*

Démonstration. D'après le théorème *6*, une x_0-homotopie liant pr $\xi \circ f$ à pr $\xi \circ g$ se recouvre par une x_0-homotopie de l'application f; or, d'après la proposition *8*, l'application à laquelle cette dernière homotopie lie f coïncide avec g.

4. Fibrés d'espaces d'applications

1. On dit qu'un fibré ξ vérifie la condition de Serre forte si quels que soient l'espace topologique X, l'application continue $\tilde{f}: X \to \mathrm{tl}\ \xi$ et l'homotopie F de l'application pr $\xi \circ \tilde{f}$, il existe une homotopie de l'application $\tilde{f}$ qui recouvre F.

Cette condition devient la condition de Serre usuelle si X est un cube de dimension arbitraire; elle est équivalente à la condition usuelle de Serre si l'on se limite aux espaces cellulaires; voir 3.7.

2. Soient (X, A) un couple de Borsuk et Y un espace topologique. Si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors le fibré $(\mathscr{C}(X, Y), \mathscr{C}(\mathrm{in}, \mathrm{id}), \mathscr{C}(A, Y))$ vérifie la condition de Serre forte.

Démonstration. Soient Z un espace topologique, $f: Z \to \mathscr{C}(X, Y)$ une application continue et $F: Z \times I \to \mathscr{C}(A, Y)$ une homotopie de l'application $\mathscr{C}(\text{in}, \text{id}) \circ \tilde{f}$. Puisque X est un espace de Hausdorff localement compact, les applications

$$\tilde{g}: Z \times X \to Y, \quad G: Z \times A \times I \to Y$$

définies par les formules

$$\tilde{g}(z, x) = [\tilde{f}(z)](x),$$
$$G(z, x, t) = [F(z, t)](x)$$

sont continues (voir 1.2.7.6.) et donc G est une homotopie de l'application $\tilde{g} \mid_{Z \times A}$. Comme $(Z \times X, Z \times A)$ est un couple de Borsuk (voir 1.3.5.5 et 1.3.5.3), alors G se prolonge en une certaine homotopie $\tilde{G}$ de l'application $\tilde{g}$ et la formule

$$[F(z, t)](x) = \tilde{G}(z, x, t)$$

définit évidemment une homotopie

$$\tilde{F}: Z \times I \to \mathscr{C}(X, Y)$$

de l'application $\tilde{f}$ qui recouvre F.

3. Les fibres d'un fibré à base connexe vérifiant la condition de Serre forte sont homotopiquement équivalentes deux à deux.

Démonstration. Soient ξ le fibré considéré et s un chemin quelconque qui joint les points donnés de la base. Posons

$$F_0 = \text{pr}\, \xi^{-1}(s(0)), \quad F_1 = \text{pr}\, \xi^{-1}(s(1))$$

et considérons les homotopies

$$J_0: F_0 \times I \to \text{bs}\, \xi, \quad J_1: F_1 \times I \to \text{bs}\, \xi$$

des applications composées

$$F_0 \xrightarrow{\text{in}} \text{tl}\, \xi \xrightarrow{\text{pr}\, \xi} \text{bs}\, \xi,$$
$$F_1 \xrightarrow{\text{in}} \text{tl}\, \xi \xrightarrow{\text{pr}\, \xi} \text{bs}\, \xi.$$

définies par les formules

$$J_0(x, t) = s(t), \quad J_1(x, t) = s^{-1}(t).$$

D'après la condition de Serre forte, elles se recouvrent par certaines homotopies

$$\tilde{J}_0: F_0 \times I \to \text{tl}\, \xi, \quad \tilde{J}_1: F_1 \times I \to \text{tl}\, \xi$$

des applications

$$\text{in}: F_0 \to \text{tl}\, \xi, \quad \text{in}: F_1 \to \text{tl}\, \xi.$$

Puisque

$$\tilde{J}_0 (F_0 \times 1) \subset F_1, \quad \tilde{J}_1 (F_1 \times 1) \subset F_0,$$

on obtient les applications

$$f_0 : F_0 \to F_1, \quad f_1 : F_1 \to F_0$$

définies par les formules

$$f_0 (x) = \tilde{J}_0 (x, 1), \quad f_1 (x) = \tilde{J}_1 (x, 1).$$

Nous montrerons que l'application $f_1 \circ f_0$ est homotope à id F_0. En même temps nous démontrerons que $f_0 \circ f_1$ est homotope à id F_1 car la situation envisagée est symétrique.

Définissons l'application $j : F_0 \times I \to \mathrm{tl}\, \xi$ par la formule

$$j (x, t) = \begin{cases} \tilde{J}_0 (x, 2t) & \text{pour } t \leqslant 1/2, \\ \tilde{J}_1 (f_0 (x), 2t - 1) & \text{pour } t \geqslant 1/2 \end{cases}$$

et l'homotopie $H : (F_0 \times I) \times I \to \mathrm{bs}\, \xi$ de l'application $\mathrm{pr}\, \xi \circ j$ par la formule

$$H (x, t, \tau) = s ((1 - \tau) (1 - | 1 - 2t |)).$$

D'après la condition de Serre forte, H se recouvre par une certaine homotopie $\tilde{H} : (F_0 \times I) \times I \to \mathrm{tl}\, \xi$ de l'application j et puisque

$$(1 - \tau) (1 - | 1 - 2t |) = 0$$

pour $\tau = 1$ et pour $t = 0, 1$, on a

$$\tilde{H} ((F_0 \times (0 \cup 1)) \times I) \cup \tilde{H} ((F_0 \times I) \times 1) \subset F_0.$$

Par conséquent, la formule

$$K (x, t) = \begin{cases} \tilde{H} ((x, 0), 3t) & \text{pour } t \leqslant 1/3, \\ \tilde{H} ((x, 3t - 1), 1) & \text{pour } 1/3 \leqslant t \leqslant 2/3, \\ \tilde{H} ((x, 1), 3 - 3t) & \text{pour } t \geqslant 2/3 \end{cases}$$

détermine une certaine homotopie $K : F_0 \times I \to F_0$ et, puisque

$$K (x, 0) = \tilde{H} ((x, 0), 0) = j (x, 0) = \tilde{J}_0 (x, 0) = x,$$

tandis que

$$K (x, 1) = \tilde{H} ((x, 1), 0) = j (x, 1) = \tilde{J}_1 (f_0 (x), 1) = f_1 (f_0 (x)),$$

cette homotopie lie id F_0 à $f_1 \circ f_0$.

4. *Pour des points quelconques $x_0, x_1 ; x'_0, x'_1$ d'un espace topologique connexe X, les espaces $\mathscr{C} (I, 0, 1 ; X, x_0, x_1)$ et $\mathscr{C} (I, 0, 1 ; X, x'_0, x'_1)$ sont homotopiquement équivalents.*

Démonstration. Les espaces $\mathscr{C} (I, 0, 1 ; X, x_0, x_1)$ et $\mathscr{C} (I, 0, 1 ; X, x'_0, x'_1)$ sont les fibres du fibré $(\mathscr{C} (I, X), \mathscr{C}$ (in, id),

$\mathscr{C}((0 \cup 1), X))$ situées au-dessus des points (x_0, x_1) et (x'_0, x'_1) de sa base $\mathscr{C}((0 \cup 1), X) = X \times X$, par conséquent ils sont homotopiquement équivalents d'après les théorèmes *2* et *3*.

Fibré de Serre adjoint

5. Pour un fibré arbitraire ξ, désignons par ad ξ le fibré ayant pour base la base de ξ, pour espace total le sous-espace du produit tl $\xi \times \mathscr{C}(I, \text{bs}\,\xi)$ constitué des couples (x, s) avec $s(0) = \text{pr}\,\xi(x)$ et pour projection l'application $(x, s) \mapsto s(1)$. Ce fibré est dit *adjoint à* ξ.

Remarquons que l'espace total tl ad ξ est homotopiquement équivalent à tl ξ, en effet, les équivalences homotopiques homotopiquement inverses l'une de l'autre tl $\xi \to$ tl ad ξ, tl ad $\xi \to$ tl ξ se définissent par les formules $x \mapsto (x, u_x)$ $(x, s) \mapsto x$, où u_x est un chemin constant dans bs ξ à origine pr $\xi(x)$. En effet, la composée de la première application avec la seconde est id tl ξ, tandis que la composée de la seconde avec la première peut être liée à id (tl ad ξ) par l'homotopie $((x, s), t) \mapsto (x, s_t)$, où s_t est le chemin dans bs ξ défini par la formule $s_t(\tau) = s(t\tau)$.

6. *Le fibré* ad ξ *vérifie la condition de Serre forte quel que soit le fibré* ξ.

D é m o n s t r a t i o n. Soient Z un espace topologique, $\tilde{f}$: $Z \to$ tl ad ξ une application continue et $F: Z \times I \to$ bs ad ξ (= bs ξ) une homotopie de l'application pr ad $\xi \circ \tilde{f}$. Désignons par g_1, g_2 les applications composées

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\tilde{f}"] & \text{tl ad}\,\xi \arrow[r, "\text{in}"] & \text{tl}\,\xi \times \mathscr{C}(I, \text{bs}\,\xi) \arrow[r, "\text{pr}_1"] \arrow[dr, "\text{pr}_2"'] & \text{tl}\,\xi, \\ & & & \mathscr{C}(I, \text{bs}\,\xi) \end{tikzcd}$$

et définissons l'homotopie $g: Z \times I \to \mathscr{C}(I, \text{bs}\,\xi)$ par la formule

$$[g(z, t)](\tau) = \begin{cases} [g_2(z)](\tau(1+t)) & \text{si } \tau \leqslant 1/(1+t), \\ F(z, \tau(1+t)-1) & \text{si } \tau \geqslant 1/(1+t). \end{cases}$$

Une vérification immédiate nous montre que l'application $\tilde{F}$: $Z \times I \to$ tl ad ξ définie par la formule $\tilde{F}(z, t) = (g_1(z), g(z, t))$ est une homotopie de l'application $\tilde{f}$ recouvrant F.

5. Exercices

1. Montrer que pour tout $g \geqslant 1$, une sphère à g anses possède un revêtement par une sphère à $2g - 1$ anses.

2. Montrer que pour tout $h \geqslant 1$, une sphère à $2h - 2$ bandes est revêtement d'une sphère à h bandes.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ l'espace $\mathscr{C}(S^1, \mathrm{ort}_1; \mathbf{R}P^n, (1:0:\ldots:0))$ est homéomorphe à $\mathscr{C}(S^1, \mathrm{ort}_1; S^n, \mathrm{ort}_1) \times S^0$.

4. Montrer qu'un fibré à espace total $\mathscr{C}(I, 0; S^n, \mathrm{ort}_1)$ à base S^n et à projection $s \mapsto s(1)$ est localement trivial (cf. 1.2.9.4).

§ 2. DIGRESSION : GROUPES TOPOLOGIQUES ET GROUPES DE TRANSFORMATIONS

1. Groupes topologiques

1. On appelle *groupe topologique* ou *espace à structure de groupe* un ensemble G muni aussi bien d'une structure topologique que d'une structure de groupe, à condition que les opérations de groupe, i.e. les applications $G \times G \to G$ et $G \to G$, définies par les formules $(g, h) \mapsto gh$ et $g \mapsto g^{-1}$, soient continues. Il est évident que la continuité de ces deux applications est équivalente à la continuité de l'application $G \times G \to G$ définie par la formule $(g, h) \mapsto g^{-1}h$.

D'après la définition de la topologie dans $G \times G$, la continuité de l'application $(g, h) \to gh$ au point (g_0, h_0) signifie que pour chaque voisinage W du point g_0h_0 il existe des voisinages U, V des points g_0, h_0 avec $UV \subset W$, tandis que la continuité de l'application $(g, h) \mapsto g^{-1}h$ au point (g_0, h_0) signifie que pour chaque voisinage W du point $g_0^{-1}h_0$ il existe des voisinages U, V des points g_0, h_0 pour lesquels $U^{-1}V \subset W$.

Il est évident qu'un groupe devient groupe topologique si on le munit de la topologie discrète.

2. Il découle de la continuité des opérations de groupe que les translations à gauche et à droite effectuées par les éléments du groupe G (i.e. les applications $G \to G$ définies par les formules $g \mapsto ag$, $g \mapsto ga$), et l'application $g \to g^{-1}$ sont des homéomorphismes de l'espace à structure de groupe G. En particulier, si B est un sous-ensemble fermé ou ouvert de l'espace à structure de groupe G, il en est de même pour l'ensemble B^{-1} et les ensembles gB, Bg quel que soit $g \in G$.

Remarquons également que si l'ensemble B est ouvert, alors les ensembles AB et BA sont ouverts quel que soit l'ensemble A. En effet, $AB = \bigcup_{a \in A} aB$, $BA = \bigcup_{a \in A} Ba$.

Sous-groupes et groupes quotients

3. Si un sous-ensemble d'un groupe topologique G est son sous-groupe au sens algébrique, alors il hérite de G sa structure topologique et sa structure de groupe ; il est clair que l'opération de groupe reste dans ce cas continue. Le groupe topologique que l'on obtient ainsi est appelé *sous-groupe* du groupe topologique donné G.

Un sous-groupe d'un groupe topologique est dit *normal* s'il est normal au sens algébrique.

En guise d'exemple de sous-groupe normal du groupe topologique G qui ne possède pas de notion analogue dans la théorie des groupes ordinaires, nous pouvons citer la *composante de l'unité*, i.e. la composante de l'espace G qui contient l'unité e_G du groupe G. Le fait que c'est un sous-groupe est évident : si u et v sont des chemins dans G qui joignent e_G à g et h, alors le chemin $t \mapsto u(t)^{-1} v(t)$ joint e_G à $g^{-1} h$. Ce sous-groupe est normal en raison du fait que les automorphismes intérieurs du groupe G sont des homéomorphismes et appliquent e_G dans e_G. Il est également évident que les classes d'équivalence relativement à ce sous-groupe normal coïncident avec les composantes de l'espace G, tandis que le groupe quotient correspondant coïncide en tant qu'ensemble avec l'ensemble comp G.

4. Un sous-groupe d'un groupe topologique ouvert est également fermé.

En effet, le complémentaire d'un sous-groupe ouvert est la réunion des classes d'équivalence à gauche relativement à ce groupe et comme chacune de ces classes est ouverte d'après *2*, le complémentaire tout entier est ouvert.

5. La partition d'un groupe topologique G en classes d'équivalence à gauche relativement à un sous-groupe H sera désignée par zer (G, H), l'espace quotient correspondant sera appelé *espace quotient par H* et désigné par G/H. La notion d'espace quotient à droite nous ne sera pas utile par la suite.

La propriété topologique fondamentale de la partition zer (G, H) et de la projection $G \to G/H$ consiste en ce qu'elles sont ouvertes. Pour la démonstration il suffit de remarquer que le saturé de l'ensemble B relativement à la partition zer (G, H) coïncide avec le produit BH qui est ouvert en même temps que H (voir *2*).

6. L'espace quotient d'un groupe topologique par son sous-groupe fermé est régulier. En particulier, un espace à structure de groupe dont l'élément unité est un ensemble fermé est régulier.

D é m o n s t r a t i o n. L'axiome T_1 est pour G/H une conséquence du fait que les classes d'équivalence gH sont fermées (voir *2*). Pour démontrer T_3 pour G/H, il suffit de construire, à partir d'un voisinage donné U saturé relativement à zer (G, H) d'une classe d'équivalence donnée g_0H, un voisinage saturé V tel que Cl $V \subset U$. En effet, nous construirons ainsi, pour un point arbitraire pr (g_0) de l'espace G/H et un voisinage arbitraire pr (U) de ce point, un voisinage pr (V) tel que Cl pr $(V) \subset$ pr (U) ; cette dernière inclusion est une conséquence de l'inclusion pr $(V) \subset$ pr (Cl V) et du fait que l'ensemble pr (Cl V) est fermé, ce qui à son tour découle du fait que l'ensemble Cl V est saturé et fermé (le fait que l'ensemble Cl V est saturé découle du fait que la partition zer (G, H) est ouverte, voir 1.2.3.10).

Puisque $e_G^{-1}\, g_0 = g_0$, les points e_G, g_0 possèdent des voisinages W, W_0 tels que $W^{-1}W_0 \subset U$. Posons $V = W_0H$. Si $g \in \mathrm{Cl}\ V$, alors l'ensemble Wg étant un voisinage du point g, coupe V, i.e. il existe des points $w \in W$, $w_0 \in W_0$, $h \in H$ tels que $wg = w_0h$. Cette dernière relation nous montre que $g = w^{-1}\, w_0h$, et ceci démontre l'inclusion $\mathrm{Cl}\ U \subset V$, puisque $w^{-1}w_0h \in W^{-1}W_0H \subset UH = U$.

7. Si H est un sous-groupe normal d'un groupe topologique G, alors, d'après la théorie des groupes ordinaire, l'ensemble quotient G/H possède une structure de groupe. Montrons que l'application $(G/H) \times (G/H) \to G/H$ déterminée par la formule $(x, y) \mapsto x^{-1}\, y$ est continue.

Pour cela, remarquons que la composée $\psi\colon G \times G \to G/H$ de l'application $G \times G \to G$ définie par la formule $(g, h) \mapsto g^{-1}\, h$ et de la projection $G \to G/H$ est constante sur les éléments de la partition $\mathrm{zer}\,(G, H) \times \mathrm{zer}\,(G, H)$ et que l'application $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ est la composée de l'application

$$(G/H) \times (G/H) \to (G \times G)/(\mathrm{zer}\,(G, H) \times \mathrm{zer}(G, H)),$$

inverse du quotient injectif de l'application

$$\mathrm{pr} \times \mathrm{pr}\colon G \times G \to (G/H) \times (G/H),$$

et de l'application

$$\mathrm{fact}\,\psi\colon (G \times G)/\,(\mathrm{zer}\,(G, H) \times \mathrm{zer}\,(G, H)) \to G/H.$$

La partition $\mathrm{zer}\,(G, H)$ étant ouverte, le quotient injectif indiqué est un homéomorphisme (voir 1.2.3.11), d'où découle la continuité de l'application $(x, y) \mapsto x^{-1}y$.

Ainsi G/H est un groupe topologique. On l'appelle *groupe quotient* du groupe topologique donné G par H.

Homomorphismes

8. L'application $f\colon G \to G'$ d'un groupe topologique dans un autre est appelée *homomorphisme* si elle est en même temps un homomorphisme algébrique et une application continue.

Comme dans la théorie des groupes ordinaires, le noyau $\mathrm{Ker}\, f$ est défini comme l'image inverse de l'unité du groupe G'. L'homomorphisme f est appelé *monomorphisme* lorsqu'il est injectif, i.e. si le noyau $\mathrm{Ker}\, f$ se réduit à l'élément unité du groupe G ; on l'appelle *épimorphisme* si l'image $\mathrm{Im}\, f$ coïncide avec G'. En guise de monomorphisme, on peut citer l'inclusion d'un sous-groupe dans un groupe topologique ; en guise d'épimorphisme, la projection d'un groupe topologique sur son groupe quotient.

Un homomorphisme est appelé *isomorphisme* lorsqu'il est bijectif et l'application inverse est également un homomorphisme. Autrement dit, l'isomorphisme d'un groupe topologique dans un autre est

une application qui est en même temps un isomorphisme algébrique et un homéomorphisme.

9. Si f est un homomorphisme d'un groupe topologique G dans un groupe topologique G', alors: (i) *l'image* Im f *est un sous-groupe du groupe G' et l'abréviation* ab f: $G \to$ Im f *est un épimorphisme*; (ii) *le noyau* Ker f *est un sous-groupe normal du groupe G, tandis que le quotient injectif* fact f: $G/\mathrm{Ker}\, f \to G'$ *est un monomorphisme.*

Cette proposition diffère de la proposition correspondante de la théorie des groupes ordinaires seulement par le fait qu'elle insiste également sur la continuité des applications ab f et fact f.

10. Un épimorphisme f: $G \to G'$ est ouvert si et seulement si son quotient injectif fact f: $G/\mathrm{Ker}\, f \to G'$ *est un isomorphisme.*

La nécessité de cette condition est évidente, sa suffisance découle du fait que la projection $G \to G/\mathrm{Ker}\, f$ est ouverte.

11. Un épimorphisme d'un groupe topologique compact sur un groupe topologique à l'unité fermée est une application ouverte.

D é m o n s t r a t i o n. Soit f: $G \to G'$ l'épimorphisme indiqué. La compacité de l'espace G entraîne celle de l'espace $G/\mathrm{Ker}\, f$, tandis que le fait que l'unité est fermée dans G' implique que G' est un espace de Hausdorff (voir *6*). Ensuite, la bijectivité et la continuité de l'application fact f: $G/\mathrm{Ker}\, f \to G'$ permettent de conclure que c'est un homéomorphisme (voir 1.1.7.10) et enfin, d'après *10* l'application f est ouverte.

Produit cartésien

12. Soient G_1, G_2 des groupes topologiques. Dans la théorie des groupes, le produit $G_1 \times G_2$ des ensembles G_1, G_2 se munit d'une structure de groupe, en topologie, d'une structure topologique (voir 1.2.2.1). Il est clair que ces structures sont compatibles dans le sens de *1*, i.e. les opérations de groupe sont continues. Ainsi $G_1 \times G_2$ est un groupe topologique. On l'appelle *produit direct* ou *cartésien* des groupes topologiques G_1, G_2.

Le produit est commutatif et associatif: on a les isomorphismes canoniques évidents

$$G_1 \times G_2 \to G_2 \times G_1 \quad \text{et} \quad (G_1 \times G_2) \times G_3 \to G_1 \times (G_2 \times G_3).$$

Remarquons que les inclusions in_1: $G_1 \to G_1 \times G_2$, in_2: $G_2 \to G_1 \times G_2$ définies par les formules $x_1 \mapsto (x_1, e_{G_2})$, $x_2 \mapsto (e_{G_1}, x_2)$ sont des monomorphismes dans le sens de *8*, tandis que les projections pr_1: $G_1 \times G_2 \to G_1$, pr_2: $G_1 \times G_2 \to G_2$ sont des épimorphismes ouverts et enfin $\mathrm{Ker}\, \mathrm{pr}_1 = \mathrm{in}_2 (G_2)$, $\mathrm{Ker}\, \mathrm{pr}_2 = \mathrm{in}_1 (G_1)$. D'après le théorème *10*, il en découle que les applications

$$\mathrm{fact}\, \mathrm{pr}_1\colon (G_1 \times G_2)/\mathrm{in}_2 (G_2) \to G_1, \quad \mathrm{fact}\, \mathrm{pr}_2\colon (G_1 \times G_2)/\mathrm{in}_1 (G_1) \to G_2$$

sont des isomorphismes.

13. On dit qu'*un groupe topologique G se décompose en produit direct de ses sous-groupes G_1, G_2* si l'application $G_1 \times G_2 \to G$ définie par la formule $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ est un isomorphisme dans le sens de *8*. Dans ce dernier cas, G est généralement identifié avec $G_1 \times G_2$ à l'aide de cet isomorphisme.

Rappelons que dans la théorie des groupes, la définition correspondante s'énonce de la même manière, sauf que par isomorphisme on entend un isomorphisme algébrique. Dans ce cas, pour que le groupe G se décompose en produit direct des sous-groupes G_1, G_2, il est nécessaire et suffisant que G_1 et G_2 engendrent G, se coupent en e_G et soient des sous-groupes normaux ; par conséquent, si dans notre situation ces conditions sont satisfaites, l'application $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ est un isomorphisme algébrique. Il est clair que cette application est continue, mais l'isomorphisme algébrique inverse n'est pas nécessairement continu comme le montrent des exemples évidents. D'autre part, la continuité de cet isomorphisme algébrique inverse est garantie si l'espace G est un espace de Hausdorff compact ; ainsi un groupe topologique de Hausdorff compact qui admet une décomposition algébrique en produit direct de ses sous-groupes, se décompose en produit direct de ces mêmes sous-groupes également dans le sens de la définition précédente.

Exemples élémentaires

14. La droite réelle $\mathbf{R}$ est un groupe topologique relativement à l'addition. Il en est de même pour $\mathbf{R}^n$. Il est évident que $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ (le produit de n facteurs est entendu ici dans le sens de *12*).

15. La droite réelle trouée $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus 0$, avec la multiplication en guise d'opération de groupe, est également un groupe topologique. Son sous-groupe $\mathbf{R}^*_+$ constitué par les nombres réels positifs est isomorphe à $\mathbf{R}$: l'isomorphisme se définit par une fonction exponentielle à base positive arbitraire (différente de 1). Un autre sous-groupe de $\mathbf{R}^*$ est S^0, et évidemment $\mathbf{R}^* = S^0 \times \mathbf{R}^*_+$.

La droite complexe trouée $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus 0$, ainsi que la droite des quaternions trouée $\mathbf{H}^* = \mathbf{H} \setminus 0$, avec la multiplication en guise d'opération de groupe, sont également des groupes topologiques. Le premier contient comme sous-groupe S^1, le deuxième S^3, et on a évidemment $\mathbf{C}^* = S^1 \times \mathbf{R}^*_+$ et $\mathbf{H}^* = S^3 \times \mathbf{R}^*_+$.

16. L'application hel : $\mathbf{R} \to S^1$ (voir 1.2.6) est un épimorphisme ouvert. Son noyau est le sous-groupe $\mathbf{Z}$ des nombres entiers du groupe $\mathbf{R}$. Ainsi le groupe quotient $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est isomorphe à S^1.

L'application

$$\text{hel} \times \ldots \times \text{hel} : \mathbf{R}^n \to (S^1)^n = S^1 \times \ldots \times S^1$$

est également un épimorphisme ouvert. Son noyau est le sous-ensemble des points aux coordonnées entières $\mathbf{Z} \times \ldots \times \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^n$ dans l'espace $\mathbf{R}^n$. Ainsi le groupe quotient $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ est isomorphe à $(S^1)^n$.

17. Le sous-groupe du groupe S^3 constitué par les quaternions réels (i.e. par les quaternions (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_2 = x_3 = x_4 = 0$) est S^0. Ce sous-groupe est normal et le groupe quotient S^3/S^0 coïncide en tant qu'espace topologique avec $\mathbf{R}P^3$.

Le sous-groupe du groupe S^3 constitué par les quaternions complexes (i.e. par les quaternions (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_3 = x_4 = 0$) est S^1. Ce sous-groupe n'est pas normal. L'espace quotient S^3/S^1 est canoniquement homéomorphe à S^2 : l'homéomorphisme canonique $S^3/S^1 \to S^2$ est défini comme le quotient injectif de l'application de Hopf $S^3 \to S^2$ (il est évident que zer $(S^3, S^1) =$ zer $(S^3 \to S^2)$).

2. Groupes d'homéomorphismes

1. D'après 1.1.4.7, les homéomorphismes d'un espace topologique X constituent un sous-groupe du groupe Sym X de toutes les transformations bijectives de l'ensemble X, i.e. constituent un groupe relativement à l'opération de groupe $\circ$. Ce groupe est désigné par Top X.

Nous munissons Top X de deux topologies. La première est induite par l'inclusion Top $X \subset \mathscr{C}(X, X)$ (voir 1.2.7.1), i.e. se définit par la prébase constituée des ensembles

$$\mathrm{Nb}\,(K, O) = \mathscr{C}(X, K;\ X, O) \cap \mathrm{Top}\ X$$

avec K compact et O ouvert. La deuxième topologie se définit par la prébase constituée des ensembles U, U^{-1}, où U est un ensemble ouvert dans la première topologie ou, ce qui revient au même, par la prébase constituée des ensembles

$$\mathrm{Nb}\,(K, O),\ [\mathrm{Nb}\,(K, O)]^{-1}.$$

2 (Lemme). *Si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors l'application $(g, h) \mapsto gh$ est continue pour les deux topologies.*

Démonstration. Si $gh \in \mathrm{Nb}\,(K, O)$, alors $h(K) \subset g^{-1}(O)$ et, en vertu de 1.1.7.22, chaque point de l'ensemble $h(K)$ possède un voisinage à adhérence compacte contenue dans $g^{-1}(O)$. Soit O' la réunion d'un nombre fini de tels voisinages qui recouvre $h(K)$. Il est clair que l'ensemble Cl O' est compact et que

$$g \in \mathrm{Nb}\,(\mathrm{Cl}\,O', O),\ h \in \mathrm{Nb}\,(K, O'),$$

$$\mathrm{Nb}\,(\mathrm{Cl}\,O', O)\ \mathrm{Nb}\,(K, O') \subset \mathrm{Nb}\,(K, O).$$

Si $gh \in [\mathrm{Nb}\,(K, O)]^{-1}$, alors $h^{-1}g^{-1} \in \mathrm{Nb}\,(K, O)$ et d'après ce que nous venons de démontrer, il existe des ensembles U, $V \subset$ Top X ouverts pour la première topologie tels que

$$h^{-1} \in V,\quad g^{-1} \in U,\quad VU \subset \mathrm{Nb}\,(K, O).$$

Il est clair que $g \in U^{-1}$, $h \in V^{-1}$, $U^{-1}V^{-1} \subset [\mathrm{Nb}\,(K, O)]^{-1}$.

3. Si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors le groupe Top X, *muni de la deuxième topologie, est un groupe topologique.*

Ceci découle de *2* et du fait évident que l'application $g \mapsto g^{-1}$ est continue pour la deuxième topologie.

4. Si X est un espace de Hausdorff compact, alors la deuxième topologie coïncide dans Top X *avec la première.*

Ceci découle de la formule évidente

$$[\mathrm{Nb}\,(K, O)]^{-1} = \mathrm{Nb}\,(X \setminus O, X \setminus K).$$

5 (Lemme). *Si X est un espace de Hausdorff localement compact et localement connexe, alors les ensembles* Nb (K, O) *avec K adhérence d'un ouvert connexe constituent une prébase de la première topologie dans* Top X.

Pour la démonstration il suffit de construire, d'après un ensemble compact K, un ensemble ouvert O et un homéomorphisme f de Nb (K, O) donnés, des ensembles ouverts connexes $U_1, \ldots, U_s$ à adhérences compactes tels que $f \in \bigcap_1^s \mathrm{Nb}\,(\mathrm{Cl}\ U_i, O) \subset \mathrm{Nb}\,(K, O)$. Fixons pour chaque point x de K son voisinage connexe V_x à adhérence compacte continue dans $f^{-1}(O)$ (voir 1.1.7.22 et 1.3.4.3); recouvrons K par un nombre fini d'ensembles V_x, mettons par les ensembles $V_{x_1}, \ldots, V_{x_s}$. Il est clair que les ensembles $U_i = V_{x_i}$ possèdent les propriétés nécessaires.

6. Si X est un espace de Hausdorff localement compact et localement connexe, alors la deuxième topologie coïncide dans Top X *avec la première.*

En vertu du lemme *5*, il suffit de construire, d'après un ensemble ouvert connexe U à adhérence compacte, un ensemble ouvert O et un homéomorphisme f de Nb (Cl U, O) donnés, un sous-ensemble $\mathcal{U}$ de l'ensemble Top X ouvert pour la première topologie tel que $f \in \mathcal{U}^{-1} \subset \mathrm{Nb}\,(\mathrm{Cl}\ U, O)$. Laissant de côté le cas trivial $U = \varnothing$, choisissons un point x_0 dans l'ensemble $f(U)$ et considérons d'abord un ensemble ouvert W qui contient f (Cl U) et possède une adhérence compacte contenue dans O et ensuite un ensemble ouvert V à adhérence contenue dans W.

Posons

$$\mathcal{U} = \mathrm{Nb}\,(x_0, U) \cap \mathrm{Nb}\,(\mathrm{Cl}\ W \setminus U, f^{-1}(0) \setminus \mathrm{Cl}\ U).$$

L'inclusion $f \in \mathcal{U}^{-1}$ est évidente et il nous faut démontrer seulement que $\mathcal{U}^{-1} \subset \mathrm{Nb}\,(\mathrm{Cl}\ U, O)$, i.e. si $g \in \mathcal{U}$, alors $g^{-1}(\mathrm{Cl}\ U) \subset O$. Il découle de l'inclusion $g \in \mathcal{U}$ que $g(\mathrm{Cl}\ W \setminus U) \subset f^{-1}(O) \setminus \mathrm{Cl}\ U$ et donc $U \subset g(V) \cup g(X \setminus \mathrm{Cl}\ W)$. Puisque $g(V)$ et $g(X \setminus \mathrm{Cl}\ W)$ sont ouverts et disjoints, tandis que U est connexe, la dernière inclusion montre que soit $U \subset g(V)$, soit $U \cap g(V)$ est vide. Mais l'in-

tersection $U \cap g(V)$ ne peut être vide puisqu'elle contient le point $g(x_0)$; en effet, $g(x_0) \subset U$ en vertu de l'inclusion $g \in \mathcal{U}$, tandis que $g(x_0) \subset g(V)$ en vertu des inclusions $x_0 \in f(U) \subset V$. Ainsi $U \subset \subset g(V)$, i.e. $g^{-1}(U) \subset V$ et par conséquent $g^{-1}(\mathrm{Cl}\, U) \subset \mathrm{Cl}\, V \subset O$.

Groupes de difféomorphismes

7. Soit X une variété de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$. D'après 3.1.2.9, l'ensemble de ses $\mathscr{C}^r$-difféomorphismes, i.e. $\mathrm{Diff}^r X$, est un groupe relativement à l'opération de groupe $\circ$ et il possède, d'après 3.4.1.1, une $\mathscr{C}^r$-topologie. Nous montrerons que *ces structures font de* $\mathrm{Diff}^r X$ *un groupe topologique.*

Le cas $r = \infty$ se réduit d'une manière évidente au cas $r < \infty$, et nous supposerons donc r fini. Envisageons l'application

$$\underbrace{d \circ \ldots \circ d}_{r} : \mathrm{Diff}^r X \to \underbrace{\mathrm{Top}\,(\mathrm{Tang} \ldots \mathrm{Tang}\, X)}_{r}.$$

Il est clair que $d \circ \ldots \circ d$ est un monomorphisme de groupe. En outre, d'après 3.4.1.1, $d \circ \ldots \circ d$ est un plongement topologique lorsque le groupe $\mathrm{Top}\,(\mathrm{Tang} \ldots \mathrm{Tang}\, X)$ est muni de la première topologie. Mais dans $\mathrm{Top}\,(\mathrm{Tang} \ldots \mathrm{Tang}\, X)$ la première topologie coïncide avec la deuxième (voir *6*), ce qui fait que les opérations $\circ$ et $f \mapsto f^{-1}$ sont continues pour cette topologie. Par conséquent, les deux opérations sont continues dans $\mathrm{Diff}^r X$.

Ajoutons que l'inclusion $\mathrm{Diff}^r X \to \mathrm{Top}\, X$ est un monomorphisme dans le sens de 1.8, et il en est de même pour les inclusions $\mathrm{Diff}^r X \to \mathrm{Diff}^s X$ lorsque $s < r$.

Groupes classiques

8. Les variétés analytiques $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ de même que $GL(n, \mathsf{R})$, $GL_+(n, \mathsf{R})$, $GL(n, \mathsf{C})$, $GL(n, \mathsf{H})$ définies au p. 3.2.1 (voir 3.2.1.2, 3.2.1.5 à 3.2.1.9) et y munies d'une structure de groupe, sont également des groupes topologiques. Le groupe $O(n)$ est appelé *orthogonal*, le groupe $SO(n)$ *orthogonal spécial*, le groupe $U(n)$ *unitaire*, le groupe $SU(n)$ *spécial unitaire*, le groupe $Sp(n)$ *simplectique*. Les groupes $GL(n, \mathsf{R})$, $GL(n, \mathsf{C})$, $GL(n, \mathsf{H})$ sont les *groupes linéaires généraux*. Il est clair que $SO(n)$ est la composante de l'unité du groupe $O(n)$, tandis que $GL_+(n, \mathsf{R})$ est la composante de l'unité du groupe $GL(n, \mathsf{R})$.

9. Il est clair que le groupe topologique $GL(n, \mathsf{R})$ est un sous-groupe du groupe topologique $\mathrm{Top}\, \mathsf{R}^n$ dans le sens de 1.3. Dans le même sens les groupes $O(n)$, $SO(n)$ et $GL_+(n, \mathsf{R})$ sont des sous-groupes du groupe topologique $\mathrm{Top}\, \mathsf{R}^n$.

De même, le groupe topologique $GL(n, \mathsf{C})$ et ses sous-groupes $U(n)$, $SU(n)$ sont des sous-groupes du groupe topologique $\mathrm{Top}\, \mathsf{C}^n$,

tandis que le groupe topologique $GL(n, \mathsf{H})$ et son sous-groupe $Sp(n)$ sont des sous-groupes du groupe topologique Top H^n.

Remarquons également que les inclusions

$$U(n) \subset SO(2n), \quad Sp(n) \subset SU(2n),$$
$$GL(n, \mathsf{C}) \subset GL_+(2n, \mathsf{R}), \quad GL(n, \mathsf{H}) \subset GL(2n, \mathsf{C})$$

sont des inclusions d'un sous-groupe dans un groupe dans le sens de 1.3.

3. Action de groupe

1. On appelle *action d'un groupe G dans un ensemble X* une application $G \times X \to X$ ayant les propriétés suivantes: (i) $(e_G, x) \mapsto x$; (ii) si $(g_1, x) \mapsto x_1$, $(g_2, x_1) \mapsto x_2$, alors $(g_2 g_1, x) \mapsto x_2$. L'image du couple (g, x) est généralement désignée par gx, ce qui permet d'écrire les conditions (i), (ii) sous la forme $e_G x = x$, $g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x$.

On dira que l'application $X \to X$ définie par l'élément g du groupe G suivant la formule $x \mapsto gx$ est la *transformation effectuée par g*. En vertu de (i), (ii) cette application est bijective (la transformation inverse est celle qui est effectuée par l'élément g^{-1}), de sorte que l'on obtient ainsi une application du groupe G dans Sym X qui est un homomorphisme. On dira que cet homomorphisme est *associé à l'action*. Il est clair qu'il détermine l'action elle-même et que tout homomorphisme $h: G \to \mathrm{Sym}\, X$ est associé à une action (à savoir, à l'action $(g, x) \mapsto (h(g))(x)$). Ainsi, *l'action du groupe G dans X peut être interprétée comme son homomorphisme dans* Sym X *).

En premier lieu nous nous intéresserons au cas où l'homomorphisme associé est un monomorphisme. Dans ce cas, l'action est dite *fidèle* (ou parfois *effective*), et dans le cas général le noyau de l'homomorphisme associé est appelé *noyau de non-fidélité de l'action*. Si K est ce noyau, alors l'homomorphisme associé se présente comme la composée de la projection $G \to G/K$ et du monomorphisme $G/K \to \mathrm{Sym}\, X$, et l'action elle-même comme la composée de l'application $\mathrm{pr} \times \mathrm{id}\, X: G \times X \to (G/K) \times X$ et de l'action fidèle $(G/K) \times X \to X$. Par rapport à l'action $G \times X \to X$, l'action $(G/K) \times X \to X$ est appelée *action fidèle correspondante*.

Le sous-ensemble de l'ensemble X sur lequel l'action $G \times X \to X$ applique l'ensemble $G \times x$ est appelé *orbite* du point x. Il est clair que les orbites de deux points ou bien ne se coupent pas, ou bien coïncident; ainsi les orbites constituent une partition de l'ensemble X. Dans le cas où il y a une seule orbite, l'action est dite *transitive*. Dans le cas général l'ensemble des orbites est désigné par X/G.

---

*) Cet homomorphisme est souvent appelé *opération* de G dans X; on dit aussi que G *opère* (ou *agit*) dans X. — *N.d.T.*

Si $h: G_1 \to G$ est un homomorphisme de groupe, alors la composée de l'application $h \times \mathrm{id}\, X: G_1 \times X \to G \times X$ avec l'action du groupe G dans X est une action du groupe G_1 dans X. On dit que cette dernière *est induite* par l'action donnée à l'aide de h. Il est évident que l'homomorphisme associé à l'action induite est la composée de l'homomorphisme h avec l'homomorphisme associé à l'action donnée. Une action induite par une action fidèle à l'aide d'un monomorphisme est fidèle, tandis qu'une action induite par une action transitive à l'aide d'un épimorphisme est transitive.

Si G_1 est un sous-groupe d'un groupe G et h est une inclusion, on dit que l'action induite est obtenue à partir de l'action donnée par *restriction du groupe G à G_1*; inversement, l'action donnée est obtenue à partir de l'action induite par *extension du groupe G_1 à G*. Il découle du précédent que, pour une restriction du groupe, une action fidèle reste fidèle; il est clair également que pour une extension du groupe une action transitive reste transitive.

Un sous-ensemble X_1 d'un ensemble X est dit *invariant par l'action* $G \times X \to X$ s'il est saturé relativement à la partition en orbites. Dans ce cas, l'action restreinte $G \times X_1 \to X_1$ est définie. Il est clair que si cette dernière est fidèle, alors l'action donnée l'est également.

On appelle *produit d'actions* $G_1 \times X_1 \to X_1$, $G_2 \times X_2 \to X_2$ l'action $(G_1 \times G_2) \times (X_1 \times X_2) \to X_1 \times X_2$ définie par la formule $(g_1, g_2)(x_1, x_2) = (g_1x_1, g_2x_2)$. Il est clair que le produit d'actions fidèles est fidèle, tandis que le produit d'actions transitives est transitif.

Une application f d'un ensemble X dans un ensemble X', tous deux munis d'une action du groupe G, est appelée *G-application* si $f(gx) = gf(x)$ quels que soient $g \in G$, $x \in X$. Dans une situation plus générale où dans X opère le groupe G et dans X' un groupe G' et en outre on a un homomorphisme $\gamma: G \to G'$, l'application $f: X \to X'$ telle que $f(gx) = \gamma(g) f(x)$ quels que soient $g \in G$, $x \in X$, est appelée *γ-application*.

Les actions du groupe G dans des ensembles X, X' sont dites *équivalentes* si ces ensembles peuvent être liés par une G-application bijective.

2. L'action définie dans *1* est appelée plus explicitement *action à gauche* pour la distinguer de l'*action à droite* qui se définit comme étant l'application $X \times G \to X$ vérifiant: (i) $(x, e_G) \mapsto x$; (ii) si $(x, g_1) \mapsto x_1$, $(x_1, g_2) \mapsto x_2$, alors $(x, g_1g_2) \mapsto x_2$. Dans le cas d'une action à droite, on écrit xg à la place de gx et les conditions (i), (ii) s'écrivent alors sous la forme $xe_G = x$, $(xg_1)g_2 = xg_1g_2$; l'homomorphisme associé devient un antihomomorphisme associé; pour le reste, tout ce qui a été dit dans *1* s'applique à une action à droite.

Il est évident que la formule $xg = g^{-1}x$ transforme une action à gauche en une action à droite, tandis que la formule $gx = xg^{-1}$

transforme une action à droite en une action à gauche. Ces actions sont dites *adjointes* ou *duales* l'une à l'autre.

Par la suite le terme *action* signifiera toujours une action à gauche, sauf mention expresse du contraire.

3. Si les transformations effectuées par les éléments du groupe G qui opère dans X à gauche ou à droite appartiennent au sous-groupe H du groupe $\operatorname{Sym} X$, alors l'action (resp. action à droite) peut être interprétée comme un homomorphisme (resp. antihomomorphisme) du groupe G dans H. On dit dans ce cas que G opère dans X (resp. opère à droite) *par transformations appartenant à* H.

Le groupe H n'est pas toujours indiqué explicitement. Par exemple, si X est un espace topologique et $H = \operatorname{Top} X$, on dit simplement que G opère dans X (resp. opère à droite) par homéomorphismes; si X est un groupe et H le groupe des automorphismes de X, on dit que G opère dans X (resp. opère à droite) par automorphismes; l'action elle-même (resp. action à droite) est alors appelée *action de groupe*.

En guise d'exemples spéciaux particulièrement importants considérons les actions $G \times G \to G$ définies par les formules $(g, x) \mapsto gx$, $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$ et les actions à droite $G \times G \to G$ définies par les formules $(g, x) \mapsto xg$, $(g, x) \mapsto g^{-1}xg$ (tous les produits sont entendus dans le sens de la multiplication dans le groupe G). La première action est dite *action canonique à gauche* *), la deuxième, *action intérieure à gauche*, la troisième, *action canonique à droite*, la quatrième, *action intérieure à droite*. Il est évident que les actions canoniques sont fidèles et transitives tandis que les actions intérieures sont des actions de groupe.

Remarquons que par restriction d'une action canonique à gauche $G \times G \to G$ à l'action $G_1 \times G \to G$, où G_1 est un sous-groupe du groupe G, les orbites deviennent des classes d'équivalence relativement à G_1. Ainsi, les deux significations que pourrait avoir dans ce cas la notation G/G_1 (celle qui correspond au point de vue ensembliste et celle introduite dans *1*) coïncident.

4. La généralisation suivante de l'action canonique à gauche est d'ordre plus général. Soit G_1 un sous-groupe du groupe G. Puisque la translation à gauche laisse une classe d'équivalence à gauche une classe d'équivalence à gauche, la formule $(g, x) \mapsto gx$ définit une application $G \times (G/G_1) \mapsto G/G_1$ qui est évidemment une action. On dit que le groupe G *opère canoniquement dans* G/G_1. Cette action est transitive et son noyau de non-fidélité coïncide avec l'intersection de tous les sous-groupes du groupe G conjugués à G_1. La projection $G \to G/G_1$ est évidemment une G-application relativement à l'action canonique à gauche du groupe G dans G et à son action canonique dans G/G_1.

*) Les actions canoniques à droite et à gauche sont également appelées translations à droite et à gauche. — *N.d.T.*

Il s'avère que chaque action transitive du groupe G est équivalente à son action canonique dans un certain ensemble quotient G/G_1. Notamment: soient $G \times X \to X$ une action transitive et x_1 un point quelconque donné de l'ensemble X; alors l'image inverse du point x_1 par une application $f: G \to X$ définie par la formule $f(g) = gx_1$ est un sous-groupe du groupe G, les images inverses des autres points de l'ensemble X par l'application f sont les classes d'équivalence à gauche relativement à ce sous-groupe, tandis que le quotient injectif fact $f: G/G_1 \to X$ de l'application f est une G-application. Toutes les vérifications sont immédiates.

Le sous-groupe G_1 a un nom spécial: on l'appelle *sous-groupe de stabilité ou stabilisateur du point* x_1. Il est évident que le point gx_1 a pour sous-groupe de stabilité gG_1g^{-1}. Ainsi les groupes de stabilité qui apparaissent pour une action transitive du groupe G coïncident précisément avec une de ses classes de sous-groupes conjugués.

Action continue

5. On appelle *action continue d'un groupe topologique G dans un espace topologique X* une application continue $G \times X \to X$ qui est une action dans le sens de *1*.

Il est clair que, dans le cas d'une action continue, les transformations effectuées par les éléments du groupe sont des homéomorphismes. Cela signifie que l'homomorphisme associé à une action continue $G \times X \to X$ peut être réduit à un homomorphisme algébrique du groupe G dans Top X. D'après 1.2.7.6, ce dernier homomorphisme est continu pour la première topologie du groupe Top X (voir 2.1), tandis que dans le cas où X est un espace de Hausdorff localement compact, le fait que l'homomorphisme associé possède une abréviation $G \to \mathrm{Top}\, X$, continue pour cette topologie, est même équivalent à la continuité de l'action. Il est également évident qu'un homomorphisme algébrique $G \to \mathrm{Top}\, X$, continu pour l'une des deux topologies du groupe Top X, est continu pour l'autre et, d'après 2.3, dans le cas où X est un espace de Hausdorff localement compact, Top X est un groupe topologique pour la deuxième topologie. Ainsi, *si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors l'action continue d'un groupe topologique G dans X peut être définie comme un homomorphisme* $G \to \mathrm{Top}\, X$ (*dans le sens de* 1.8).

Remarquons qu'un groupe discret opérant par homéomorphisme opère toujours continûment. Cette remarque permet de considérer les actions des groupes non topologisés opérant par homéomorphismes comme des actions continues.

6. Un espace topologique muni d'une action continue du groupe G est appelé *G-espace*. Un G-espace muni d'une action fidèle du groupe G est appelé *G-espace fidèle* (ou *effectif*).

Dans le cas général, le passage à l'action fidèle correspondante fait d'un G-espace un (G/K)-espace fidèle, où K est le noyau de non-fidélité.

Dans le cas d'une action continue $G \times X \to X$ l'ensemble X/G est un espace topologique (espace quotient de l'espace X); on l'appelle *espace des orbites*. Puisque le saturé d'un sous-ensemble quelconque A de l'espace X (relativement à la partition en orbites) est la réunion des ensembles gA avec $g \in G$, la partition en orbites est toujours ouverte, et dans le cas où le groupe G est fini, cette partition est également fermée. En particulier, l'espace X/G est à base dénombrable en même temps que X, et si le groupe G est fini, il est normal en même temps que X; voir 1.2.3.10 et 1.2.3.9. Ajoutons que la partition en orbites est également fermée dans le cas où X est un espace de Hausdorff compact et le groupe G est compact; en effet, l'action $G \times X \to X$ est dans ce cas une application fermée, et comme elle applique le produit $G \times A$ dans le saturé de l'ensemble A, il découle du fait que l'ensemble A est fermé que son saturé est fermé.

La restriction du groupe topologique G à son sous-groupe G_1 transforme d'une manière évidente un G-espace en un G_1-espace. Les sous-ensembles invariants d'un G-espace sont de manière évidente des G-espaces; on les appelle *G-sous-espaces*. Dans un sens tout aussi évident, le produit de deux actions continues est une action continue, de sorte que le produit d'un G_1-espace par un G_2-espace est un $(G_1 \times G_2)$-espace.

Les G-applications et les γ-applications pour les actions continues doivent être définies à nouveau: on appelle *G-application d'un G-espace dans un G-espace* une application continue qui est une G-application dans le sens de *1*, et on appelle *γ-application d'un G-espace dans un G'-espace* une application continue qui est une γ-application dans le sens de *1*; on suppose que γ est un homomorphisme dans le sens de 1.8. Deux actions continues d'un groupe G sont dites *équivalentes* si les G-espaces correspondants peuvent être liés par un G-homéomorphisme.

Les actions spéciales — canonique à gauche et intérieure à gauche — envisagées dans *3* sont continues dans le cas d'un groupe topologique G.

Remarquons que la notation G/G_1 possède ici, de même que dans *3*, deux significations (espace quotient d'un groupe par son sous-groupe et espace des orbites) et que ces deux significations coïncident.

7. L'action canonique d'un groupe G dans son espace quotient G/G_1 par un sous-groupe quelconque G_1 est également continue. Pour la démonstration, envisageons la composée ψ: $G \times G \to G/G_1$ de l'application $G \times G \to G$ définie par la formule $(g, h) \mapsto gh$ et de la projection $G \to G/G_1$. Il est évident que cette composée est constante sur les éléments de la partition zer $(G, e_G) \times$ zer (G, G_1)

et l'action $G \times (G/G_1) \to G/G_1$ qui nous intéresse est la composée de l'application

$$G \times (G/G_1) \to (G \times G)/(\mathrm{zer})\ (G,\ e_G) \times \mathrm{zer}\ (G,\ G_1)),$$

inverse du quotient injectif de l'application

$$\mathrm{id}\ G \times \mathrm{pr}\colon\ G \times G \to G \times (G/G_1),$$

et de l'application

$$\mathrm{fact}\ \psi\colon\ (G \times G)/(\mathrm{zer}\ (G,\ e_G) \times \mathrm{zer})\ (G,\ G_1)) \to G/G_1.$$

Puisque les partitions zer $(G,\ e_G)$ et zer $(G,\ G_1)$ sont ouvertes, le quotient injectif envisagé est un homéomorphisme (voir 1.2.3.11) d'où l'on tire la continuité de notre action.

Le G-espace en lequel se transforme l'espace quotient G/G_1 par l'action canonique $G \times (G/G_1) \to G/G_1$ est appelé *espace homogène.*

L'équivalence d'une action transitive quelconque $G \times X \to X$ à l'action canonique du groupe G dans son espace quotient par le sous-groupe de stabilité G_1 établie dans *4* ne peut pas être étendue intégralement au cas d'une action continue : bien que dans ce cas l'application $f\colon G \to X$ définie par la formule $f\ (g) = gx_1$, ainsi que son quotient injectif fact $f\colon G/G_1 \to X$ soient continus, l'application $(\mathrm{fact}\ f)^{-1}$, comme le montrent des exemples évidents, peut ne pas être continue. Pourtant la continuité de l'application $(\mathrm{fact}\ f)^{-1}$ est assurée lorsque G est un espace compact et X un espace de Hausdorff ; *ainsi une action continue transitive d'un groupe topologique compact dans un espace de Hausdorff à point de base est canoniquement équivalente à l'action canonique du groupe dans l'espace quotient par le groupe de stabilité de ce point.*

8. Une action continue $G \times X \to X$ est dite *libre* si l'application $G \to X$ définie par la formule $g \mapsto gx$ est un plongement pour tout point $x \in X$. On dit alors aussi que G *opère librement* dans X.

Il est clair que toute action libre est fidèle. Il est également évident que la restriction du groupe G à son sous-groupe et la restriction d'un G-espace à son sous-espace transforme une action libre en action libre et que le produit de deux actions libres est une action libre. L'action canonique $G \times G \to G$ est libre, l'action canonique $G \times (G/G_1) \to G/G_1$ n'est par libre lorsque $G_1 \neq e_G$.

Considérons, pour une action libre $G \times X \to X$, le fibré $(X,\ \mathrm{pr},\ X/G)$. Si chaque point de l'espace X possède un voisinage que les transformations effectuées par les éléments du groupe G appliquent sur des ensembles deux à deux disjoints (en particulier, si le groupe G est fini et X est un espace de Hausdorff), alors l'image d'un tel voisinage par la projection $X \to X/G$ est ouverte et la restriction du fibré $(X,\ \mathrm{pr},\ X/G)$ à cette image est un fibré trivial

à fibres discrètes. Ainsi, dans ce cas $(X, \mathrm{pr}, X/G)$ est un revêtement au sens large.

9. On appelle action continue à d r o i t e d'un groupe topologique G dans un espace topologique X une application continue $X \times G \to G$ qui est une action à droite dans le sens de *2*.

Toutes les définitions et tous les faits exposés dans *5*, *6* et *8* peuvent être appliqués d'une manière évidente aux actions à droite. En particulier, un espace topologique muni d'une action continue à droite est appelé *G-espace à droite*. Nous n'appellerons jamais un G-espace à droite tout simplement G-espace ; ce terme désignera toujours un G-espace à gauche.

Exemples

10. L'homomorphisme identique $\mathrm{Top}\, X \to \mathrm{Top}\, X$ définit pour tout espace topologique X une action fidèle du groupe $\mathrm{Top}\, X$ dans X et donc une action fidèle dans X de tout sous-groupe de ce groupe. Si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors $\mathrm{Top}\, X$ est un groupe topologique et toutes ces actions sont continues. En particulier, les groupes $GL(n, \mathbf{R})$, $GL_+(n, \mathbf{R})$, $O(n)$, $SO(n)$ opèrent fidèlement et continûment dans $\mathbf{R}^n$, les groupes $GL(n, \mathbf{C})$, $U(n)$, $SU(n)$ dans $\mathbf{C}^n$ et les groupes $GL(n, \mathbf{H})$, $Sp(n)$ dans $\mathbf{H}^n$.

Si $r \leqslant \infty$, alors l'inclusion $\mathrm{Diff}^r X \to \mathrm{Top}\, X$ détermine, pour chaque $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété X une action libre et continue du groupe $\mathrm{Diff}^r X$ dans X.

11. Puisque la sphère S^{n-1} est invariante relativement à l'action du groupe $O(n)$ dans $\mathbf{R}^n$, ce dernier opère continûment dans S^{n-1}, de même que son sous-groupe $SO(n)$. D'une façon analogue, les groupes $U(n)$ et $SU(n)$, étant des sous-groupes du groupe $O(2n)$, opèrent continûment dans S^{2n-1}, tandis que $Sp(n)$, sous-groupe du groupe $O(4n)$, opère continûment dans S^{4n-1}. Toutes ces actions sont fidèles et, si sauf les cas triviaux, à savoir, $SO(1) \times S^0 \to S^0$ et $SU(1) \times S^1 \to S^1$, sont également transitives.

Pour les actions $O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, $SO(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ les sous-groupes de stabilité associés au point ort_n sont $O(n-1)$, $SO(n-1)$; pour les actions $U(n) \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$, $SU(n) \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$, les sous-groupes de stabilité du point ort_{2n} sont $U(n-1)$, $SU(n-1)$; pour l'action $Sp(n) \times S^{4n-1} \to S^{4n-1}$ le sous-groupe de stabilité du point ort_{4n} est $Sp(n-1)$. Les homéomorphismes correspondants

$$O(n)/O(n-1) \to S^{n-1}, \quad SO(n)/SO(n-1) \to S^{n-1},$$

$$U(n)/U(n-1) \to S^{2n-1}, \quad SU(n)/SU(n-1) \to S^{2n-1},$$

$$Sp(n)/Sp(n-1) \to S^{4n-1}$$

(voir 7) coïncident avec les quotients injectifs des submersions

$$V(n, n)\,[=O(n)] \to V(n, 1)\,[=S^{n-1}], \quad V(n, n-1) \to V(n, 1),$$
$$\mathbf{C}V(n, n) \to \mathbf{C}V(n, 1), \quad \mathbf{C}V(n, n-1) \to \mathbf{C}V(n, 1),$$
$$\mathbf{H}V(n, n) \to \mathbf{H}V(n, 1)$$

définies dans 3.2.1 (voir 3.2.1.3, 3.2.1.5, 3.2.1.6).

Si l'on restreint les groupes $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ (pour $n \geqslant 1$) aux sous-groupes des matrices scalaires et que l'on effectue l'identification usuelle de ces sous-groupes avec S^0, S^1, S^3, on obtient les actions continues

$$S^0 \times S^{n-1} \to S^{n-1}, \quad S^1 \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}, \quad S^3 \times S^{4n-1} \to S^{4n-1}.$$

Ces sous-groupes opèrent librement et les espaces quotients S^{n-1}/S^0, S^{2n-1}/S^1, S^{4n-1}/S^3 coïncident avec $\mathbf{R}P^{n-1}$, $\mathbf{C}P^{n-1}$, $\mathbf{H}P^{n-1}$.

Remarquons aussi que les boules D^n, D^{2n}, D^{4n} sont invariantes relativement aux actions des groupes $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ dans $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{H}^n$; par conséquent, les groupes $O(n)$, $SO(n)$ opèrent continûment dans D^n, les groupes $U(n)$, $SU(n)$ dans D^{2n} et le groupe $Sp(n)$ dans D^{4n}. Toutes ces actions sont fidèles.

12. Dans la variété $V(n, k)$ les groupes $O(n)$, $SO(n)$ opèrent continûment à gauche et les groupes $O(k)$, $SO(k)$ à droite: les actions à gauche sont définies par la formule $(g, v) \mapsto g \circ v$ ($g \in O(n)$ ou $g \in SO(n)$, $v \in V(n, k)$; g et v sont interprétés comme des applications), les actions à droite par la formule $(v, g) \mapsto v \circ g$. D'une manière analogue, dans $\mathbf{C}V(n, k)$ les groupes $U(n)$, $SU(n)$ opèrent continûment à gauche et les groupes $U(k)$, $SU(k)$ à droite, tandis que dans $\mathbf{H}V(n, k)$ le groupe $Sp(n)$ opère continûment à gauche et le groupe $Sp(k)$ à droite.

Toutes les actions à gauche sont fidèles si $k \neq 0$. En outre, elles sont transitives sauf les actions $SO(n) \times V(n, n) \to V(n, n)$ et $SU(n) \times \mathbf{C}V(n, n) \to \mathbf{C}V(n, n)$ pour $n \geqslant 1$. Les sous-groupes de stabilité des groupes $O(n)$, $SO(n)$ coïncident, pour le point

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_k)$$

de la variété $V(n, k)$ (cette dernière est envisagée comme l'ensemble des applications linéaires isométriques $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$), avec $O(n-k)$, $SO(n-k)$, les sous-groupes de stabilité des groupes $U(n)$, $SU(n)$ et $Sp(n)$ coïncident, pour les points

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_k)$$

des variétés $\mathbf{C}V(n, k)$ et $\mathbf{H}V(n, k)$, avec $U(n-k)$, $SU(n-k)$ et $Sp(n-k)$, tandis que les homéomorphismes correspondants

$$O(n)/O(n-k) \to V(n, k), \quad SO(n)/SO(n-k) \to V(n, k),$$
$$U(n)/U(n-k) \to \mathbf{C}V(n, k), \quad SU(n)/SU(n-k) \to \mathbf{C}V(n, k),$$
$$Sp(n)/Sp(n-k) \to \mathbf{H}V(n, k)$$

coïncident avec les quotients injectifs des applications

$$O(n) \to V(n, k), \quad SO(n) \to V(n, k), \quad U(n) \to \mathbf{C}V(n, k),$$
$$SU(n) \to \mathbf{C}V(n, k), \quad Sp(n) \to \mathbf{H}V(n, k)$$

(voir 3.2.1.3, 3.2.1.5, 3.2.1.6). Pour $k = 1$ on y reconnaît les actions indiquées dans *11*.

Toutes les actions à droite sont libres. Les espaces quotients

$$V(n, k)/O(k), \quad V(n, k)/SO(k), \quad \mathbf{C}V(n, k)/U(k), \quad \mathbf{H}V(n, k)/Sp(k)$$

sont canoniquement homéomorphes aux variétés $G(n, k)$, $G_+(n, k)$, $\mathbf{C}G(n, k)$, $\mathbf{H}G(n, k)$, les homéomorphismes canoniques étant les quotients injectifs des applications

$$V(n, k) \to G(n, k), \quad V(n, k) \to G_+(n, k),$$
$$\mathbf{C}V(n, k) \to \mathbf{C}G(n, k), \quad \mathbf{H}V(n, k) \to \mathbf{H}G(n, k)$$

(voir 3.2.2.3, 3.2.2.7, 3.2.2.8).

13. Les mêmes formules $(g, v) \mapsto g \circ v$ et $(v, g) \mapsto v \circ g$ définissent les actions à gauche des groupes $GL(n, \mathbf{R})$, $GL_+(n, \mathbf{R})$ dans $V'(n, k)$, du groupe $GL(n, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}V'(n, k)$ et du groupe $GL(n, \mathbf{H})$ dans $\mathbf{H}V'(n, k)$, de même que les actions à droite des groupes $GL(k, \mathbf{R})$, $GL_+(k, \mathbf{R})$ dans $V'(n, k)$, du groupe $GL(k, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}V'(n, k)$ et du groupe $GL(k, \mathbf{H})$ dans $\mathbf{H}V'(n, k)$.

Toutes les actions à gauche sont fidèles et, à l'exclusion de l'action $GL_+(n, \mathbf{R}) \times V'(n, n) \to V'(n, n)$, transitives. Les sous-groupes de stabilité des groupes $GL(n, \mathbf{R})$, $GL(n, \mathbf{C})$, $GL(n, \mathbf{H})$ coïncident, pour les points

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_k)$$

des variétés $V'(n, k)$, $\mathbf{C}V'(n, k)$, $\mathbf{H}V'(n, k)$, avec

$$GL(n-k, \mathbf{R}), \quad GL(n-k, \mathbf{C}), \quad GL(n-k, \mathbf{H});$$

les homéomorphismes canoniques

$$GL(n, \mathbf{R})/GL(n-k, \mathbf{R}) \to V'(n, k),$$
$$GL(n, \mathbf{C})/GL(n-k, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}V'(n, k),$$
$$GL(n, \mathbf{H})/GL(n-k, \mathbf{H}) \to \mathbf{H}V'(n, k)$$

coïncident avec les quotients injectifs des applications

$$GL(n, \mathbf{R}) \to V'(n, k), \quad GL(n, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}V'(n, k),$$
$$GL(n, \mathbf{H}) \to \mathbf{H}V'(n, k)$$

(voir 3.2.1.7 à 3.2.1.9). Le sous-groupe de stabilité du groupe $GL_+(n, \mathbf{R})$ coïncide, pour le point $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_k)$ de la variété $V'(n, k)$, avec $GL_+(n-k, \mathbf{R})$.

Toutes les actions à droite sont libres. Les espaces quotients

$$V'(n, k)/GL(k, \mathsf{R}), \quad V'(n, k)/GL_+(k, \mathsf{R}),$$
$$\mathsf{C}V'(n, k)/GL(k, \mathsf{C}), \quad \mathsf{H}V'(n, k)/GL(k, \mathsf{H})$$

sont canoniquement homéomorphes à

$$G(n, k), \quad G_+(n, k), \quad \mathsf{C}G(n, k), \quad \mathsf{H}G(n, k),$$

les homéomorphismes canoniques étant donnés par les quotients injectifs des applications

$$V'(n, k) \to G(n, k), \quad V'(n, k) \to G_+(n, k),$$
$$\mathsf{C}V'(n, k) \to \mathsf{C}G(n, k), \quad \mathsf{H}V'(n, k) \to \mathsf{H}G(n, k),$$

(voir 3.2.2.3, 3.2.2.7, 3.2.2.8).

14. Sur les variétés $G(n, k)$, $G_+(n, k)$ opèrent continûment (à gauche) le groupe $GL(n, \mathsf{R})$ et ses sous-groupes $GL_+(n, \mathsf{R})$, $O(n)$, $SO(n)$, sur la variété $\mathsf{C}G(n, k)$ le groupe $GL(n, \mathsf{C})$ et ses sous-groupes $U(n)$, $SU(n)$, sur la variété $\mathsf{H}G(n, k)$ le groupe $GL(n, \mathsf{H})$ et son sous-groupe $Sp(n)$. Les actions des groupes $O(n)$, $SO(n)$ sur les variétés $G_+(n, k)$ pour k pair sont fidèles. Les noyaux de non-fidélité des actions $GL(n, \mathsf{R}) \times G_+(n, k) \to G_+(n, k)$, $GL_+(n, \mathsf{R}) \times G_+(n, k) \to G_+(n, k)$ pour k impair sont des matrices scalaires à éléments diagonaux positifs. Les autres actions, si l'on laisse de côté les cas triviaux $k = 0$ et $k = n$, ont des noyaux de non-fidélité constitués de toutes les matrices scalaires du groupe respectif. Seules les actions suivantes sont non transitives:

$$GL(n, \mathsf{R}) \times G_+(n, 0) \to G_+(n, 0),$$
$$GL_+(n, \mathsf{R}) \times G_+(n, 0) \to G_+(n, 0),$$
$$O(n) \times G_+(n, 0) \to G_+(n, 0), \quad SO(n) \times G_+(n, 0) \to G_+(n, 0),$$
$$GL_+(n, \mathsf{R}) \times G_+(n, n) \to G_+(n, n),$$
$$SO(n) \times G_+(n, n) \to G_+(n, n).$$

Si dans chacune des variétés $G(n, k)$, $G_+(n, k)$, $\mathsf{C}G(n, k)$ et $\mathsf{H}G(n, k)$ on choisit en guise de point de base le plan $x_1 = 0, \ldots$ $\ldots, x_{n-k} = 0$ en le munissant dans le cas de $G_+(n, k)$ de l'orientation naturelle, alors pour les actions du groupe $GL(n, \mathsf{R})$ dans $G(n, k)$, du groupe $GL(n, \mathsf{R})$ dans $G_+(n, k)$, du groupe $GL(n, \mathsf{C})$ dans $\mathsf{C}G(n, k)$ et du groupe $GL(n, \mathsf{H})$ dans $\mathsf{H}G(n, k)$ les sous-groupes de stabilité seront constitués par les matrices de la forme $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, où A et B sont des matrices carrées non dégénérées d'ordres $n - k$ et k, tandis que C est une $(n - k) \times k$-matrice quelconque, B étant contenue dans le cas de $G_+(n, k)$ dans $GL_+(k, \mathsf{R})$.

Lorsqu'on prend la restriction des groupes initiaux, ces sous-groupes de stabilité se réduisent à l'intersection des sous-groupes

indiqués avec les nouveaux groupes. En particulier, pour les actions du groupe $O(n)$ dans $G(n, k)$ et dans $G_+(n, k)$, l'action du groupe $SO(n)$ dans $G_+(n, k)$, du groupe $U(n)$ dans $\mathbf{C}G(n, k)$ et du groupe $Sp(n)$ dans $\mathbf{H}G(n, k)$, les sous-groupes de stabilité seront les images des monomorphismes

$$O(n-k) \times O(k) \to O(n), \quad O(n-k) \times SO(k) \to O(n),$$
$$SO(n-k) \times SO(k) \to SO(n),$$
$$U(n-k) \times U(k) \to U(n), \quad Sp(n-k) \times Sp(k) \to Sp(n)$$

définis par la formule matricielle $(A, B) \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$. En identifiant les produits indiqués avec leurs images, on obtient les homéomorphismes canoniques :

$$O(n)/[O(n-k) \times O(k)] \to G(n, k),$$
$$O(n)/[O(n-k) \times SO(k)] \to G_+(n, k),$$
$$SO(n)/[SO(n-k) \times SO(k)] \to G_+(n, k),$$
$$U(n)/[U(n-k) \times U(k)] \to \mathbf{C}G(n, k),$$
$$Sp(n)/[Sp(n-k) \times Sp(k)] \to \mathbf{H}G(n, k).$$

15. Soient m ; $l_1, \ldots, l_n$ des entiers naturels premiers entre eux. La formule complexe

$$(k, (z_1, \ldots, z_n)) \mapsto (z_1 e^{2\pi i k l_1/m}, \ldots, z_n e^{2\pi i k l_n/m}),$$

où k est un entier et $(z_1, \ldots, z_n)$ un point de la sphère S^{2n-1}, définit une action $\mathbf{Z} \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ avec noyau de non-fidélité $m\mathbf{Z}$; elle devient action libre du groupe $\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ dans S^{2n-1} lorsqu'on passe à l'action fidèle correspondante. L'espace quotient $S^{2n-1}/\mathbf{Z}_m$ est désigné par $L(m ; l_1, \ldots, l_n)$; on l'appelle *lentille*.

Des *lentilles infinies* $L(m ; l_1, l_2, \ldots)$, où $m ; l_1, l_2 \ldots$ sont des nombres premiers entre eux, existent également. Une lentille $L(m ; l_1, l_2, \ldots)$ se définit comme l'espace quotient $S^\infty/\mathbf{Z}_m$ engendré par l'action libre de $\mathbf{Z}_m$, celle-ci étant l'action fidèle correspondante à l'action

$$(k, (z_1, z_2, \ldots)) \mapsto (z_1 e^{2\pi i k l_1/m}, z_2 e^{2\pi i k l_2/m}, \ldots)$$

du groupe $\mathbf{Z}$ dans S^∞. Description équivalente :

$$L(m ; l_1, l_2, \ldots) =$$
$$= \lim (L(m ; l_1, \ldots, l_n), \text{ in} : L(m ; l_1, \ldots, l_n) \to$$
$$\to L(m ; l_1, \ldots, l_{n+1})).$$

La lentille infinie $L(m ; 1, 1, \ldots)$ se désigne plus brièvement par $L(m)$.

D'après *8*, les triplets $(S^{2n-1}, \text{pr}, L(m; l_1, \ldots, l_n))$ et $(S^\infty, \text{pr}, L(m; l_1, l_2, \ldots))$ sont des revêtements.

16. La formule $(y, x) \mapsto yxy^{-1}$, où x est un quaternion et y un quaternion de norme 1, définit une action continue $S^3 \times \mathsf{R}^4 \to \mathsf{R}^4$. L'espace R^3_1 des quaternions imaginaires est invariant relativement à cette action; ainsi ce dernier espace, et avec lui R^3, est un S^3-espace. (L'identification de R^3_1 avec R^3 s'effectue par l'application shi: $\mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^3_1$; voir 3.2.3.1). Le noyau de non-fidélité de l'action $S^3 \times \mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^3$ est évidemment S^0; il est également clair que l'action fidèle du groupe quotient $S^3/S^0 = \mathsf{R}P^3$ dans R^3 devient par l'identification canonique de l'espace $\mathsf{R}P^3$ avec $SO(3)$ (voir 3.2.3.1) l'action standard du groupe $SO(3)$ dans R^3 (voir *11*).

17. Soit P un polyèdre convexe régulier dans R^3 (un tetraèdre, un cube, un octaèdre, un dodécaèdre ou un icosaèdre) de centre O. Désignons par GP le sous-groupe du groupe $SO(3)$ constitué des rotations qui appliquent P dans P et par $\widetilde{G}P$, l'image inverse du groupe GP par la projection $S^3 \to SO(3)$ (voir *16*). Il est clair que GP et $\widetilde{G}P$ ne sont pas changés lorsqu'on passe de P à son dual, et sont remplacés par des sous-groupes conjugués des groupes $SO(3)$, S^3 lorsqu'on prend au lieu de P un polyèdre régulier convexe de même nom et de centre O. Ainsi, $SO(3)$ possède exactement trois classes de sous-groupes conjugués à GP, et S^3 exactement trois classes de sous-groupes conjugués à $\widetilde{G}P$. Les premiers sont respectivement groupes du tetraèdre, groupes du cube (ou de l'octaèdre) et groupes du dodécaèdre (ou de l'icosaèdre), les seconds, groupes binaires du tetraèdre, groupes binaires du cube (ou de l'octaèdre) et groupes binaires du dodécaèdre (ou de l'icosaèdre).

Si l'on associe à chaque rotation de GP l'image d'une arête orientée distinguée du polyèdre P, on obtient une bijection du groupe GP sur l'ensemble des arêtes orientées du polyèdre P. Ainsi, l'ordre du groupe GP est égal à deux fois le nombre d'arêtes du polyèdre P, i.e. à 12 dans le cas du tétraèdre, à 24 dans le cas du cube (ou de l'octaèdre) et à 60 dans le cas du dodécaèdre (ou de l'icosaèdre). Pour le groupe binaire correspondant $\widetilde{G}P$, ces ordres valent respectivement 24, 48 et 120.

Les espaces quotients à structure de groupe $SO(3)/GP$, $S^3/\widetilde{G}P$ sont les espaces des orbites d'actions libres induites à partir des actions canoniques à gauche des groupes $SO(3)$, S^3 par les inclusions $GP \to SO(3)$, $\widetilde{G}P \to S^3$; par conséquent, les triplets

$$(SO(3), \text{pr}, SO(3)/GP), \quad (S^3, \text{pr}, S^3/\widetilde{G}P)$$

sont des revêtements (voir *8*). Dans un sens évident on a $SO(3)/GP = S^3/\widetilde{G}P$.

4. Exercices

1. Montrer que si X est une variété différentiable, les deux topologies de Top X coïncident.

2. Montrer que si X est un sous-ensemble de la droite $\mathbf{R}$, constitué du point 0 et des points 2^n avec $n \in \mathbf{Z}$, alors la deuxième topologie dans Top X diffère de la première.

3. Montrer que le difféomorphisme canonique $SU(2) \to S^3$ (voir 3.2.1.5) est un isomorphisme de groupe.

4. Montrer que les lentilles $L(m; l_1, \ldots, l_k)$, $L(m; l'_1, \ldots, l'_k)$ sont homéomorphes si pour chaque i la somme $l_i + l'_i$ ou la différence $l_i - l'_i$ sont des multiples de m.

5. Montrer que la sous-variété $\mathrm{Tang}_1\, \mathbf{R}P^2$ de la variété $\mathrm{Tang}\, \mathbf{R}P^2$ constituée des vecteurs tangents unité (i.e. des vecteurs qui sont les images des vecteurs tangents unité par l'application $d\,\mathrm{pr}: \mathrm{Tang}\, S^2 \to \mathrm{Tang}\, \mathbf{R}P^2$) est homéomorphe à la lentille $L(4; 1, 1)$.

6. Considérons l'action du groupe $\mathbf{Z}_2$ dans la variété $V(3, 2)$ des vecteurs unité tangents à la sphère S^2, par laquelle l'élément non nul du groupe $\mathbf{Z}_2$ envoie le vecteur tangent v dans $-v$. Montrer que l'espace quotient $V(3, 2)/\mathbf{Z}_2$ est homéomorphe à $L(4; 1, 1)$.

7. Considérons l'action du groupe $\mathbf{Z}_2$ dans $\mathrm{Tang}_1\, \mathbf{R}P^2$ (voir *5*) telle que l'élément non nul du groupe $\mathbf{Z}_2$ envoie le vecteur v dans $-v$. Montrer que l'espace quotient $\mathrm{Tang}_1\, \mathbf{R}P^2/\mathbf{Z}_2$ est homéomorphe à l'espace quotient S^3/H, où H est le sous-groupe du groupe S^3 constitué des quaternions $\pm\mathrm{ort}_1$, $\pm\mathrm{ort}_2$, $\pm\mathrm{ort}_3$, $\pm\mathrm{ort}_4$.

8. Considérons l'action du groupe $\mathbf{Z}_2$ dans $\mathbf{C}P^2$ par laquelle l'élément non nul du groupe $\mathbf{Z}_2$ applique le point $(z_1 : z_2 : z_3)$ dans $(\bar{z}_1 : \bar{z}_2 : \bar{z}_3)$. Montrer que l'espace quotient $\mathbf{C}P^2/\mathbf{Z}_2$ est homéomorphe à S^4.

9. Considérons l'action du groupe $\mathbf{Z}_2$ dans $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ par laquelle l'élément non nul du groupe $\mathbf{Z}_2$ applique le point $((z_1 : z_2), (w_1 : w_2))$ dans $((\bar{z}_1 : \bar{z}_2), (\bar{w}_1 : \bar{w}_2))$. Montrer que l'espace quotient $(\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1)/\mathbf{Z}_2$ est homéomorphe à S^4.

10. Considérons l'action du groupe $\mathbf{Z}_2$ dans $S^2 \times S^2$ par laquelle l'élément non nul du groupe $\mathbf{Z}_2$ applique le point (x, y) dans (y, x). Montrer que l'espace quotient $(S^2 \times S^2)/\mathbf{Z}_2$ est homéomorphe à $\mathbf{C}P^2$.

§ 3. FIBRÉS À STRUCTURE DE GROUPE

1. Espaces à F-structure

1. Les fibres des fibrés que l'on rencontre le plus souvent ne sont pas seulement des espaces topologiques, mais sont munies d'une structure supplémentaire naturelle, par exemple, celle d'un espace vectoriel, euclidien ou hermitien. Dans le présent paragraphe

on introduit systématiquement cette structure supplémentaire dans la théorie des fibrés.

Nous commencerons par une description précise des structures du type nécessaire, puis nous étudierons ce qu'elles font apparaître dans les définitions données au § 1.

2. Soient G un groupe topologique et F un G-espace fidèle. On munit un espace topologique W d'une *F-structure* par la donnée d'un ensemble A non vide d'homéomorphismes $F \to W$ tel que pour tout homéomorphisme $\alpha \in$ A l'homéomorphisme $\beta : F \to W$ appartient à A si et seulement si $\beta^{-1} \circ \alpha$ est une transformation effectuée par un certain élément du groupe G. Les homéomorphismes appartenant à A sont dits *distingués.*

Chaque homéomorphisme distingué transfère l'action du groupe G de F dans W. Si G est un groupe abélien, alors l'action $G \times W \to W$ ne dépend pas du choix de l'homéomorphisme, de sorte que la F-structure se réduit dans ce cas à l'action du groupe G. Si le groupe G n'est pas abélien, la F-structure ne détermine aucune action canonique de ce groupe dans W.

Remarquons que l'espace F lui-même possède une F-structure canonique pour laquelle les homéomorphismes distingués sont les transformations effectuées par les éléments du groupe G.

Dans le cas le plus simple où G est le groupe trivial, un espace à F-structure est tout simplement un espace topologique canoniquement homéomorphe à F.

3 (Exemples). Si $G = GL\,(n, \mathbf{R})$, tandis que F est $\mathbf{R}^n$ avec l'action usuelle de ce groupe, l'espace à F-structure correspondant est tout simplement l'espace vectoriel réel de dimension n. Fixer un homéomorphisme distingué c'est choisir une base.

Si G est un des groupes $GL_+\,(n, \mathbf{R})$, $O\,(n)$, $SO\,(n)$, et F est $\mathbf{R}^n$ avec l'action usuelle du groupe correspondant, l'espace à F-structure sera respectivement l'espace vectoriel réel orienté de dimension n, l'espace euclidien de dimension n, l'espace euclidien orienté de dimension n.

Si G est un des groupes $GL\,(n, \mathbf{C})$, $U\,(n)$, et F est $\mathbf{C}^n$ avec l'action usuelle du groupe correspondant, l'espace à F-structure est respectivement l'espace vectoriel complexe de dimension n et l'espace hermitien de dimension n.

Si $G = \mathrm{Diff}^r X$, où X est une variété de classe $\mathscr{C}^r$ $(1 \leqslant r \leqslant a)$, et F est X avec l'action usuelle de ce groupe, alors l'espace à F-structure est une $\mathscr{C}^r$-variété $\mathscr{C}^r$-difféomorphe à X.

Si $G = \mathrm{Top}\, X$, où X est un espace de Hausdorff localement compact, et F est X avec l'action usuelle de ce groupe, alors l'espace à F-structure est un espace topologique homéomorphe à X.

Si G est le groupe de tous les homéomorphismes simpliciaux du simplexe unité T^n, et F est le simplexe T^n avec l'action usuelle de

ce groupe, alors l'espace à F-structure est le simplexe topologique de dimension n.

4. Un homéomorphisme d'un espace à F-structure dans un autre qui applique l'ensemble des homéomorphismes distingués dans l'ensemble des homéomorphismes distingués est appelé *isomorphisme* ou plus précisément, F-isomorphisme.

Dans chacun des exemples, les F-isomorphismes constituent une classe d'applications bien connue : dans le premier et le cinquième exemple ce sont les isomorphismes linéaires, dans le troisième et le sixième, les isomorphismes linéaires isométriques, dans le quatrième les isomorphismes linéaires isométriques conservant l'orientation, dans le septième les $\mathscr{C}^r$-difféomorphismes, dans le huitième, les homéomorphismes, et dans le neuvième, les homéomorphismes simpliciaux.

5. Le produit d'un espace W à F-structure par un espace W' à F'-structure est dans un sens évident un espace à $F \times F'$-structure (voir 2.3.6) : en guise d'homéomorphismes distingués, il faut prendre les applications $F \times F' \to W \times W'$ de la forme $\alpha \times \alpha'$, où α, α' sont des homéomorphismes distingués.

Soit F_1 le G_1-espace obtenu à partir du G-espace F par restriction du groupe G à G_1 ; le passage inverse de F_1 à F transforme chaque espace W_1 à F_1-structure en un espace W à F-structure : du point de vue topologique, W et W_1 sont identiques et les nouveaux homéomorphismes distingués sont les composées des transformations effectuées par les éléments du groupe G avec les anciens homéomorphismes distingués. On dit alors que W s'obtient de W_1 *par extension du groupe* G_1 *à* G.

2. Fibrés de Steenrod

1. Soient G un groupe topologique et F un G-espace fidèle. Un fibré ξ est appelé *F-fibré au sens faible*, ou *W-F-fibré*, si toutes ses fibres possèdent une F-structure. Dans ce cas, F s'appelle *fibre standard* du fibré ξ, et G, son *groupe structural*. L'ensemble de tous les homéomorphismes distingués de l'espace F sur ces fibres est désigné par $DH(\xi)$. Le groupe G opère de manière naturelle dans $DH(\xi)$ à droite, suivant la règle $[\alpha g](y) = \alpha(gy)$ $[\alpha \in DH(\xi), g \in G, y \in F]$.

Le fibré $f^!\xi$ induit par un W-F-fibré ξ au moyen de l'application $f : B \to \mathrm{bs}\,\xi$ est un W-F-fibré dans un sens évident : une F-structure est introduite dans ses fibres par les homéomorphismes

$$\mathrm{ab\ tl\ ad} : \mathrm{pr}\, f^!\xi^{-1}(b) \to \mathrm{pr}\, \xi^{-1}(f(b)) \quad [b \in B].$$

L'application f d'un W-F-fibré ξ dans un W-F-fibré η est appelée *W-F-application* si les applications ab tl f des fibres du fibré ξ dans les fibres du fibré η sont des isomorphismes (voir 1.4). Une W-F-application qui est un isomorphisme (resp. une équivalence) au sens

purement topologique (i.e. au sens de 1.1.2) est appelée *W-F-isomorphisme* (resp. *W-F-équivalence*). Deux *W-F*-fibrés que l'on peut lier par un *W-F*-isomorphisme (resp. par une *W-F*-équivalence) sont *W-F-isomorphes* (resp. *W-F-équivalents*).

A chaque *W-F*-application $f: \xi \to \eta$ correspond l'application $DH(f): DH(\xi) \to DH(\eta)$ qui fait correspondre à l'homéomorphisme $\alpha: F \to \mathrm{pr}\, \xi^{-1}(b)$ l'homéomorphisme composé $F \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{pr}\, \xi^{-1}(b) \xrightarrow{\mathrm{ab\,tl}\, f} \mathrm{pr}\, \eta^{-1}(\mathrm{bs}\, f(b))$. Il est clair que $DH(f)$ est une G-application relativement aux actions naturelles à droite du groupe G dans $DH(\xi)$ et $DH(\eta)$.

Le fibré trivial standard $(B \times F, \mathrm{pr}_1, B)$, où B est un espace topologique quelconque, est dans un sens évident un *W-F*-fibré: la *F*-structure est introduite dans ses fibres par les homéomorphismes $F \to b \times F$ définis par la formule $y \mapsto (b, y)$. Dans l'esprit du p. 1.2, nous appellerons les *W-F*-fibrés qui sont *W-F*-équivalents à de tels *W-F*-fibrés, *W-F-fibrés W-F-triviaux*.

2. Un fibré ξ est appelé *F-fibré au sens fort*, ou plus brièvement *F-fibré*, si c'est un *W-F*-fibré et l'ensemble $DH(\xi)$ est muni d'une topologie.

Le fibré $f^!\xi$ induit par le *F*-fibré ξ au moyen de l'application $f: B \to \mathrm{bs}\, \xi$ est un *F*-fibré dans un sens évident: on munit l'ensemble $DH(f^!\xi)$ d'une topologie à l'aide de l'application injective $DH(f^!\xi) \to B \times DH(\xi)$ définie par la formule $\alpha \mapsto (\mathrm{pr}\, f^!\xi(\alpha(F)), [DH(\mathrm{ad}\, f)](\alpha))$.

Une application f d'un *F*-fibré ξ dans un *F*-fibré η est appelée *F-application* si c'est une *W-F*-application et, en outre, l'application $DH(f)$ est continue. Une *F*-application f est appelée *F-isomorphisme* (resp. *F-équivalence*) si c'est un isomorphisme (resp. équivalence) dans le sens topologique et $DH(f)$ est un homéomorphisme.

Le fibré trivial standard $(B \times F, \mathrm{pr}_1, B)$, où B est un espace topologique quelconque, est un *F*-fibré dans un sens évident: la *F*-structure de ses fibres a déjà été décrite dans *1*, tandis que l'ensemble $DH(B \times F, \mathrm{pr}_1, B)$ se munit d'une topologie à l'aide de l'application bijective $B \times G \to DH(B \times F, \mathrm{pr}_1, B)$ qui fait correspondre au couple (b, g) l'homéomorphisme $F \to b \times F$ défini par la formule $y \mapsto (b, gy)$. Un *F*-fibré *F*-équivalent à de tels *F*-fibrés sera appelé *F-trivial* et l'équivalence elle-même, *F-trivialisation*.

3. Un *F*-fibré ξ est dit *localement F-trivial* si chaque point de sa base possède un voisinage U tel que la restriction $\xi|_U$ est *F*-triviale. Les fibrés localement *F*-triviaux sont appelés *F-fibrés de Steenrod.*

Les fibrés de Steenrod joueront un rôle fondamental dans ce qui va suivre, d'où l'importance des *F*-fibrés. Les *F*-fibrés au sens faible jouent seulement un rôle auxiliaire.

Remarquons que dans le cas d'un fibré de Steenrod l'action canonique à droite du groupe structural dans l'espace des homéo-

morphismes distingués est continue et libre. Dans le cas trivial standard ceci est évident, le cas général se réduit facilement à ce cas particulier.

4. Le fibré $f^!\xi$ induit par un F-fibré de Steenrod au moyen de l'application $f: B \to \mathrm{bs}\,\xi$ est un F-fibré de Steenrod: en effet, c'est un F-fibré d'après *2*, et sa F-trivialité locale découle du fait évident qu'il est F-trivial lorsque ξ est F-trivial. Il est clair que l'application $\mathrm{ad}\, f: f^!\xi \to \xi$ est une F-application, que l'équivalence canonique $(\mathrm{id}\ \mathrm{bs}\ \xi)^!\ \xi \to \xi$ et les équivalences canoniques de la forme $g^!\ (f^!\xi) \to (f \circ g)^!\ \xi$ (voir 1.1.4) sont des F-équivalences et enfin pour chaque F-application h du fibré ξ dans un autre fibré de Steenrod l'application de correction $\mathrm{corr}\ h$ est une F-application.

Le produit d'un F-fibré de Steenrod ξ par un F'-fibré de Steenrod ξ' est dans un sens évident un $(F \times F')$-fibré de Steenrod: la $(F \times F')$-structure s'introduit dans ses fibres suivant la règle indiquée dans 1.5; l'ensemble $DH\ (\xi \times \xi')$ se munit d'une topologie par l'application bijective $DH\ (\xi) \times DH\ (\xi') \to DH\ (\xi \times \xi')$ définie par la formule $(\alpha, \alpha') \mapsto \alpha \times \alpha'$; la $(F \times F')$-trivialité locale du $(F \times F')$-fibré obtenu découle du fait qu'il est $(F \times F')$-trivial lorsque ξ est F-trivial et ξ' est F'-trivial.

Lorsque le G_1-espace F_1 s'obtient à partir d'un G-espace F fidèle par restriction du groupe G à G_1, alors le passage inverse de F_1 à F fait de chaque F_1-fibré de Steenrod ξ_1 un F-fibré de Steenrod ξ: du point de vue topologique, ξ coïncide avec ξ_1; la F-structure dans les fibres est définie par la règle indiquée dans 1.5; l'ensemble $DH\ (\xi)$ se munit d'une topologie à l'aide de l'action du groupe G_1 dans $G \times DH\ (\xi_1)$, définie par l'action canonique à droite du groupe G_1 dans $DH\ (\xi_1)$ (voir *1*) suivant la formule $g_1\ (g, \alpha) \mapsto (g_1 g, \alpha^{-1} g_1)$, par l'application bijective $(G \times DH\ (\xi_1))/G_1 \to DH\ (\xi)$ qui fait correspondre à l'orbite du couple (g, α) l'homéomorphisme $y \mapsto \alpha\,(gy)$; la F-trivialité locale du F-fibré obtenu découle du fait qu'il est F-trivial lorsque ξ_1 est F_1-trivial. Cette transformation d'un F_1-fibré en un F-fibré est appelée *extension du groupe structural.* Il est clair qu'elle transforme les F_1-applications en F-applications et les F_1-équivalences en F-équivalences. Il est clair également qu'elle est permutable à l'opération de passage aux fibrés induits: si ξ s'obtient par extension du groupe structural de ξ_1 et f est une application continue d'un espace topologique quelconque dans $\mathrm{bs}\ \xi$, alors $f^!\xi$ s'obtient par une même extension du groupe structural de $f^!\xi_1$.

5. Les F-fibrés de Steenrod à groupe structural trivial sont F-triviaux.

Démonstration. Soit ξ un fibré de Steenrod à fibre standard F et à groupe structural trivial; soit Γ un recouvrement ouvert de l'espace $\mathrm{bs}\ \xi$ tel que tous les fibrés $\xi\,|_U$ avec $U \in \Gamma$ sont F-triviaux. Posons $\eta = (\mathrm{bs}\ \xi \times F,\ \mathrm{pr}_1,\ \mathrm{bs}\ \xi)$. Il est clair que la F-tri-

vialisation $\eta\,|_U \to \xi\,|_U$ est unique pour chaque $U \in \Gamma$ et que toutes les F-trivialisations $\eta\,|_U \to \xi\,|_U$ constituent ensemble une F-trivialisation $\eta \to \xi$.

Théorèmes sur les F-applications

6. Soient ξ, ξ' des fibrés de Steenrod à fibre standard F, B un espace topologique et $p : B \to \mathrm{bs}\,\xi$ une application décomposable. Si les applications $\tau : \mathrm{tl}\,\xi \to \mathrm{tl}\,\xi'$, $\beta : \mathrm{bs}\,\xi \to \mathrm{bs}\,\xi'$ sont telles que $(\tau \circ \mathrm{tl}\,\mathrm{ad}\,p,\ \beta \circ p)$ est une F-application du fibré $p^!\xi$ dans ξ', alors (τ, β) est une F-application du fibré ξ dans ξ'.

Seule mérite une vérification la continuité des applications β, τ et $DH\,(\tau, \beta)$. La continuité de β découle immédiatement de celle de la composée $\beta \circ p$ et du fait que p est décomposable. Quant à la continuité de τ et de $DH\,(\tau, \beta)$, il suffit de l'établir dans le cas où ξ, ξ' sont des F-fibrés triviaux standards. Dans ce cas, τ se décrit par la formule $\tau\,(b, y) = (\beta\,(b), \varphi\,(b)\,y)$, où φ est une application de l'espace $\mathrm{bs}\,\xi$ dans le groupe structural G. Les applications

$$DH\,(\tau \circ \mathrm{tl}\,\mathrm{ad}\,p,\ \beta \circ p) : DH\,(p^!\xi) \to DH\,(\xi'),$$
$$DH\,(\tau, \beta) : DH\,(\xi) \to DH\,(\xi'),$$

transformées au moyen des homéomorphismes topologiques

$$B \times G \to DH\,(p^!\xi), \quad \mathrm{bs}\,\xi \times G \to DH\,(\xi), \quad \mathrm{bs}\,\xi' \times G \to DH\,(\xi')$$

(voir *2*), deviennent

$$B \times G \to \mathrm{bs}\,\xi' \times G, \qquad \mathrm{bs}\,\xi \times G \to \mathrm{bs}\,\xi' \times G$$

et se décrivent par les formules

$$(b, g) \mapsto (\beta \circ p\,(b),\ (\varphi \circ p\,(b))\,g), \qquad (b, g) \mapsto (\beta\,(b),\ \varphi\,(b)\,g).$$

La première formule nous montre que l'application $\varphi \circ p$ est continue ; sa continuité et le fait que p est décomposable impliquent la continuité de φ laquelle implique à son tour celle de τ et de $DH\,(\tau, \beta)$.

7. Soient ξ, ξ' des fibrés de Steenrod à fibre standard F et soit $\beta : \mathrm{bs}\,\xi \to \mathrm{bs}\,\xi'$ une application continue. Si $\tau : \mathrm{tl}\,\xi \to \mathrm{tl}\,\xi'$ est une application telle que pour chaque élément U d'un certain recouvrement fondamental de l'espace $\mathrm{bs}\,\xi$ les restrictions $\tau\,|_{\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(U)}$, $\beta\,|_U$ constituent une F-application du fibré $\xi\,|_U$ dans ξ', alors (τ, β) est une F-application du fibré ξ dans ξ'.

Ceci découle de *6* : en guise de p il faut prendre $\mathrm{pr} : \coprod_{U \in \Gamma} U \to \mathrm{bs}\,\xi$, où Γ est le recouvrement donné.

8. Si les F-fibrés de Steenrod ξ, ξ' ont une base commune, alors chaque F-application $f : \xi \to \xi'$ vérifiant $\mathrm{bs}\,f = \mathrm{id}\,\mathrm{bs}\,\xi$ est une F-équivalence.

Seule la continuité des applications $\mathrm{tl}\,f^{-1}$, $DH\,(f)^{-1}$ nécessite une démonstration et il suffit de l'établir dans le cas où ξ est le

F-fibré trivial standard et $\xi' = \xi$. Dans ce cas, les applications $\mathrm{tl}\, f$, $\mathrm{tl}\, f^{-1}$: $\mathrm{bs}\, \xi \times F \to \mathrm{bs}\, \xi \times F$ se décrivent par les formules

$$(b,\ y) \mapsto (b,\ \varphi\,(b)\, y),$$

$$(b,\ y) \mapsto (b,\ \psi\,(b)\, y) \qquad [b \in \mathrm{bs}\, \xi,\ y \in F],$$

où φ, ψ sont des applications de l'espace $\mathrm{bs}\, \xi$ dans le groupe structural G, tandis que les applications $DH\,(f)$, $DH\,(f)^{-1}$, après transformation par l'homéomorphisme $\mathrm{bs}\, \xi \times G \to DH\,(\xi)$ dans les applications $\mathrm{bs}\, \xi \times G \to \mathrm{bs}\, \xi \times G$, se décrivent par les formules

$$(b,\ g) \mapsto (b,\ \varphi\,(b)\, g),\ (b,\ g) \mapsto (b,\ \psi\,(b)\, g) \quad [b \in \mathrm{bs}\, \xi,\quad g \in G].$$

Il est clair que $\psi\,(b) = [\varphi\,(b)]^{-1}$, de sorte que la continuité de $DH\,(f)$ implique successivement celle de φ, de ψ et de $\mathrm{tl}\, f^{-1}$, $DH\,(f)^{-1}$.

9 (Corollaire). *L'application* corr f *est une F-équivalence pour chaque F-application f d'un F-fibré de Steenrod dans un autre.*

Fibrés principaux

10. Un fibré de Steenrod est dit *principal* si sa fibre standard est le groupe structural G qui opère sur lui-même canoniquement à gauche (voir 2.3.6). Par abus de langage, nous nous permettrons de désigner ce G-espace simplement par G et, dans cet esprit, nous appellerons les fibrés principaux à groupe structural G tout simplement *G-fibrés de Steenrod.*

La propriété fondamentale des fibrés principaux consiste en ce que leur espace des homéomorphismes distingués coïncide avec l'espace total. Plus précisément, si ξ est un fibré principal, l'application $DH\,(\xi) \to \mathrm{tl}\, \xi$ définie par la formule $\alpha \mapsto \alpha\,(e_G)$ est un homéomorphisme. Dans le cas trivial standard ceci est évident, le cas général se réduisant aisément au cas trivial standard.

L'identification de l'espace $DH\,(\xi)$ avec $\mathrm{tl}\, \xi$ par l'homéomorphisme $\alpha \mapsto \alpha\,(e_G)$ transforme l'action naturelle à droite du groupe G dans $DH\,(\xi)$ (voir *1*) dans son action libre à droite dans $\mathrm{tl}\, \xi$. Il est aisé de décrire cette dernière explicitement de la manière suivante : il est clair que ses orbites sont les fibres du fibré ξ et l'action elle-même coïncide sur chaque fibre avec l'action canonique à droite, transférée dans cette fibre de G par les homéomorphismes distingués.

11. Cette construction de l'action libre à droite du groupe G dans l'espace total d'un fibré principal à groupe structural G peut être inversée partiellement. Supposons que le groupe topologique G opère continûment et librement à droite dans un espace topologique X. Considérons le fibré $(X,\ \mathrm{pr},\ X/G)$. Ses fibres (orbites) possèdent une G structure naturelle : les homéomorphismes distingués $G \to \mathrm{pr}^{-1}\,(b)$ $[b \in X/G]$ se définissent par la formule $g \mapsto xg$ pour $x \in \mathrm{pr}^{-1}\,(b)$. Puisqu'à des x différents correspondent des homéomorphismes $g \mapsto xg$ différents, nous obtenons en même temps une bijec-

tion de l'espace X sur l'ensemble des homéomorphismes distingués, ce qui nous donne une topologie sur cet ensemble. Ainsi $(X, \mathrm{pr}, X/G)$ est un G-fibré.

Nous avons appelé cette construction inversion partielle de la construction précédente, ayant en vue que son application à l'action à droite $\mathrm{tl}\,\xi \times G \to \mathrm{tl}\,\xi$ construite dans *10* donne ξ. Plus exactement, le quotient injectif de la projection $\mathrm{pr}\,\xi$ applique $\mathrm{tl}\,\xi/G$ sur $\mathrm{bs}\,\xi$ et constitue avec $\mathrm{id}\,(\mathrm{tl}\,\xi)$ un G-isomorphisme du fibré $(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{pr}, \mathrm{tl}\,\xi/G)$ sur ξ.

12. Si le G-fibré $(X, \mathrm{pr}, X/G)$ défini par l'action libre à droite du groupe G possède une section, alors il est G-trivial. En particulier, tout G-fibré de Steenrod possédant une section est G-trivial.

En effet, si $s: X/G \to X$ est une section, alors l'application $f: (X/G \times G, \mathrm{pr}_1, X/G) \to (X, \mathrm{pr}, X/G)$ définie par la formule $\mathrm{tl}\,f\,(b, g) = s\,(b)\,g$ est une G-trivialisation du fibré $(X, \mathrm{pr}, X/G)$.

13 (Corollaire). *Si le G-fibré $(X, \mathrm{pr}, X/G)$ défini par l'action libre à droite du groupe G est topologiquement trivial, alors il est G-trivial. S'il est localement topologiquement trivial, alors il est localement G-trivial, c'est donc un G-fibré de Steenrod.*

3. Fibrés associés

1. Soient G un groupe topologique et F, F' des G-espaces fidèles. La construction ci-après rapporte à chaque F-fibré de Steenrod ξ un certain F'-fibré de Steenrod de même base.

Définissons l'action à droite du groupe G dans $DH\,(\xi) \times F'$ d'après son action canonique à droite dans $DH\,(\xi)$ (voir 2.3) par la formule

$$g\,(\alpha, y) = (\alpha g, g^{-1}y) \qquad [g \in G,\ \alpha \in DH\,(\xi),\ y \in F'],$$

et désignons par ξ' le fibré à espace total $(DH\,(\xi) \times F')/G$ de base $\mathrm{bs}\,\xi$ et de projection qui applique le couple $(\alpha, y) \in DH\,(\xi) \times F'$ dans le point $\mathrm{pr}\,\xi\,(\alpha\,(F))$. Les fibres de ce fibré possèdent une F'-structure naturelle: les homéomorphismes distingués $F' \to (\mathrm{pr}\,\xi')^{-1}\,(b)$ se définissent par la formule $y \mapsto \mathrm{pr}\,(\alpha, y)$, où α est un homéomorphisme de $DH\,(\xi)$ tel que $\alpha\,(F) = \mathrm{pr}\,\xi^{-1}\,(b)$. Puisqu'à des α différents correspondent des homéomorphismes différents $y \mapsto \mathrm{pr}\,(\alpha, y)$, nous obtenons en même temps une bijection de l'espace $DH\,(\xi)$ sur l'ensemble $DH\,(\xi')$, ce qui munit cet ensemble d'une topologie et fait de ξ' un F'-fibré. Enfin, il est évident que la restriction $\xi'|_U$ est F'-triviale pour chaque ensemble U pour lequel la restriction $\xi\,|_U$ est F-triviale, d'où l'on déduit que le fibré ξ' est localement F'-trivial, i.e. est un F'-fibré de Steenrod. On l'appelle *fibré associé à F* et l'on note $\mathrm{asso}\,(\xi, F')$.

2. Faisons quatre remarques suivantes concernant la construction asso.

(i) L'application de l'espace tl ξ dans $(DH(\xi) \times F)/G$, qui fait correspondre au point $x \in$ tl ξ l'orbite constituée des couples $(\alpha, y) \in DH(\xi) \times F$ vérifiant $\alpha(y) = x$, est évidemment un homéomorphisme et détermine avec id bs ξ une F-équivalence entre ξ et asso (ξ, F). Ainsi, *le fibré* asso (ξ, F) *est canoniquement F-équivalent à* ξ.

(ii) La bijection $DH(\xi) \to DH$ (asso (ξ, F')) qui nous a servi pour topologiser DH (asso (ξ, F')) est une G-application relativement aux actions canoniques à droite du groupe G dans $DH(\xi)$ et DH (asso (ξ, F')). Par conséquent, pour chaque G-espace fidèle F'', le produit de la bijection indiquée par id F'' est une G-application relativement aux actions à droite du groupe G dans $DH(\xi) \times F''$ et DH (asso $(\xi, F')) \times F''$ définies par la formule $g(\alpha, y) = (\alpha g, g^{-1}y)$; il est clair que l'homéomorphisme correspondant

$$(DH(\xi) \times F'')/G \to (DH(\text{asso}(\xi, F')) \times F'')/G$$

constitue avec id bs ξ une F''-équivalence entre asso (ξ, F'') et asso (asso (ξ, F'), F''). Ainsi, *le fibré* asso (asso (ξ, F'), F'') *est canoniquement F''-équivalent à* asso (ξ, F'').

(iii) Le fibré asso (ξ, G), i.e. le fibré principal associé à ξ, est canoniquement G-isomorphe au G-fibré $(DH(\xi), \text{pr}, DH(\xi)/G)$ défini par l'action canonique à droite du groupe G dans $DH(\xi)$ (voir 2.11). Le G-isomorphisme canonique

$$(DH(\xi), \text{pr}, DH(\xi)/G) \to \text{asso}(\xi, G)$$

se définit par l'homéomorphisme

$$DH(\xi) \to (DH(\xi) \times G)/G,$$

qui fait correspondre à chaque homéomorphisme distingué α l'orbite du couple (α, e_G).

(iv) Si F' est un sous-espace du G-espace F'' (voir 2.3.6), alors $(DH(\xi) \times F')/G$ est une partie de l'espace $(DH(\xi) \times F'')/G$ et l'inclusion

$$(DH(\xi) \times F')/G \to (DH(\xi) \times F'')/G$$

constitue avec id bs ξ une inclusion du fibré asso (ξ, F') dans asso (ξ, F''). Dans ce cas DH (asso (ξ, F')) est constitué précisément des applications de la forme ab α: $F' \to \alpha(F')$ avec $\alpha \in DH$ (asso (ξ, F'')).

Fonctorialité

3. Soient, comme précédemment, F et F' des G-espaces fidèles et soient ξ, η des fibrés de Steenrod à fibre standard F et, enfin, f: $\xi \to \eta$ une F-application quelconque. Définissons l'application

$$\text{asso}(f, F'): \text{asso}(\xi, F') \to \text{asso}(\eta, F')$$

par les formules

$$\text{bs asso}\,(f,\ F') = \text{bs}\, f,$$

$$\text{tl asso}\,(f,\ F') =$$

$$= [\text{fact}\,(DH\,(f) \times \text{id}\, F') : (DH\,(\xi) \times F')/G \to (DH\,(\eta) \times F')/G].$$

Il est clair que asso $(f,\ F')$ est une F'-application et même un F'-isomorphisme (resp. une F'-équivalence) lorsque f est un F-isomorphisme (resp. une F-équivalence). On voit également que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\xi \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \text{asso}\,(\xi, F) \arrow[d, "\text{asso}\,(f,\,F)"] \\
\eta \arrow[r] & \text{asso}\,(\eta, F),
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\text{asso}\,(\xi, F'') \arrow[r] \arrow[d, "\text{asso}\,(f,\,F'')"'] & \text{asso}\,(\text{asso}\,(\xi, F'), F'') \arrow[d, "\text{asso}\,(\text{asso}\,(f,\,F'),\,F'')"] \\
\text{asso}\,(\eta, F''), \arrow[r] & \text{asso}\,(\text{asso}\,(\eta, F'), F''),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(DH\,(\xi),\ \text{pr},\ DH\,(\xi)/G) \arrow[r] \arrow[d, "(DH\,(f),\ \text{fact}\,DH\,(f))"'] & \text{asso}\,(\xi, G) \arrow[d, "\text{asso}\,(f,\,G)"] \\
(DH\,(\eta),\ \text{pr},\ DH\,(\eta)/G) \arrow[r] & \text{asso}\,(\eta, G),
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs, étant donné que F'' est un G-espace fidèle quelconque et les flèches horizontales désignent respectivement les F-équivalences canoniques de *2* (i) et de *2* (ii) et les F-isomorphismes canoniques de *2* (iii).

4. L'opération asso est permutable à l'opération de passage aux applications induites. Plus précisément, pour tout F-fibré de Steenrod ξ et toute application continue $h : B \to \text{bs}\,\xi$, l'application

$$\text{corr}\,[\text{asso}\,(\text{ad}\, h,\ F')] : \text{asso}\,(h^!\xi,\ F') \to h^!\,\text{asso}\,(\xi,\ F')$$

est une F'-équivalence ; voir 2.9.

L'opération asso est également permutable à l'extension du groupe structural. Plus précisément : soient F_1, F'_1 des G_1-espaces fidèles obtenus de F, F' par restriction du groupe G à son sous-groupe G_1 ; si le F_1-fibré de Steenrod ξ_1 est transformé par l'extension du groupe G_1 à G dans ξ, alors l'application

$$\text{fact}\,(\text{in} \times \text{id}\, F') : (DH\,(\xi_1) \times F'_1)/G_1 \to (DH\,(\xi) \times F')/G$$

avec $\text{in} = [\text{in} : DH\,(\xi_1) \to DH\,(\xi)]$ définit une F'-équivalence entre le fibré obtenu de asso $(\xi_1,\ F'_1)$ par l'extension du groupe G_1 à G, et le fibré asso $(\xi,\ F')$.

Fibrés faiblement associés

5. La construction décrite dans *1* se généralise d'une manière naturelle aux actions non fidèles de G dans F' : il faut préalablement passer à l'action fidèle correspondante, transformant ainsi F' en un certain G/K-espace $F'_{\sim}$, où K est le noyau de non-fidélité.

Ainsi le fibré asso (ξ, F') est défini pour chaque F-fibré de Steenrod ξ et chaque G-espace F' ; dans le cas général ce sera un fibré de Steenrod à groupe structural G/K et à fibre standard $F'_{\sim}$. Il est dit *faiblement associé à* ξ.

Cette généralisation de la construction asso conserve également l'application asso (f, F') définie dans *3* en la transformant en une $F'_{\sim}$-application. Les propriétés énumérées dans *2*, *3*, *4* de cette construction se modifient d'une manière évidente ; par exemple, la F''-équivalence canonique asso $(\xi, F'') \to$ asso (asso (ξ, F'), F'') devient, dans le cas d'un F'' non fidèle (et d'un F' fidèle), une $F''_{\sim}$-équivalence.

Sections associées aux F-applications

6. Supposons que ξ, ξ' sont des fibrés de Steenrod à groupe structural G et à fibre standard F ; soit f : bs $\xi \to$ bs ξ' une application continue. La construction ci-après établit une bijection entre les F-applications h : $\xi \to \xi'$ telles que bs $h = f$ et les sections d'un certain fibré de construction spéciale Fibr $(\xi, \xi' ; f)$.

Désignons par $G^{\times}$ le groupe G muni de l'action du groupe $G \times G$ définie par la formule $(g_1, g_2)\, g = g_1\, g\, g_2^{-1}$ (cette action n'est pas en général fidèle) et posons

$$\text{Fibr}\,(\xi, \xi' ; f) = \text{asso}\,(\text{diag}^!\,(\xi \times f^!\xi'), G^{\times}),$$

où diag $=$ [diag : bs $\xi \to$ bs $\xi \times$ bs ξ] et asso est entendu dans le sens de *5*. Il est clair que pour chaque F-application h vérifiant bs $h = f$ et chaque point $b \in$ bs ξ, l'homéomorphisme composé

$$F \xrightarrow{\alpha} \text{pr}\,\xi^{-1}(b) \xrightarrow{\text{ab tl } h)} (\text{pr}\,\xi')^{-1}(f(b)) \xrightarrow{(\text{ab tl ad } f)^{-1}} (\text{pr}\,f^!\,\xi')^{-1}(\beta(F)) \xrightarrow{\beta^{-1}} F,$$

où $\alpha \in DH\,(\xi)$, pr $\xi\,(\alpha\,(F)) = b$ et $\beta \in DH\,(f^!\xi')$, pr$f^!\,\xi'\,(\beta\,(F)) = b$, est une transformation effectuée par un élément du groupe G. Ayant désigné cet élément par $g\,(\alpha, \beta)$, nous voyons que $g\,(\alpha g_1, \beta g_2) = g_1 g\,(\alpha, \beta)\, g_2^{-1}$ quels que soient $g_1, g_2 \in G$ (ici il s'agit de l'action canonique à droite du groupe G dans $DH\,(\xi)$ et $DH\,(f^!\xi')$). Il en découle que, pour une action à droite du groupe $G \times G$ dans $DH\,(\xi \times f^!\xi') \times G^{\times}$ construite selon *1*, l'orbite du couple $(\alpha \times \beta, g\,(\alpha, \beta))$ ne dépend pas du choix de α et de β lorsque h et b sont fixes. En faisant correspondre cette orbite au point b, h étant fixe, nous obtenons une application continue de l'espace bs ξ dans $(DH\,(\xi \times f^!\xi') \times G^{\times})/(G \times G)$; il est clair que ce sera une section du fibré Fibr $(\xi, \xi' ; f)$. On dit qu'elle est *associée à* h et on la désigne par $h^{\times}$. La correspondance $h \mapsto h^{\times}$ est une bijection de l'ensemble des F-applications h : $\xi \to \xi'$ vérifiant bs $h = f$ sur l'ensemble des sections du fibré Fibr $(\xi, \xi' ; f)$: l'application inverse fait correspondre à la section s : bs $\xi \to$ tl Fibr $(\xi, \xi' ; f)$ la F-application

$h: \xi \to \xi'$ définie par la formule

$$\mathrm{tl}\, h\,(x) = \mathrm{tl}\, \mathrm{ad}\, f\,(\beta_x\,(g_x\,(\alpha_x^{-1}\,(x)))),$$

où $x \in \mathrm{tl}\, \xi$, $\alpha_x \in DH\,(\xi)$, $\beta_x \in DH\,(f^!\xi')$, $g_x \in G$ et $(\alpha_x \times \beta_x,\ g_x) \in \in s \circ \mathrm{pr}\, \xi\,(x)$.

Remarquons que si $\mathrm{bs}\, \xi' = \mathrm{bs}\, \xi$ et $f = \mathrm{id}\, \mathrm{bs}\, \xi$, alors une F-application $h: \xi \to \xi'$ vérifiant $\mathrm{bs}\, h = f$ est précisément une F-équivalence (voir 2.8). Ainsi, dans le cas où ξ et ξ' ont une base commune, la construction décrite ci-dessus établit une bijection entre les F-équivalences $\xi \to \xi'$ et les sections du fibré Fibr $(\xi,\ \xi'\ ;\ \mathrm{id}\ \mathrm{bs}\ \xi)$.

4. Fibrés d'Ehresmann-Feldbau

1. On appelle fibré d'Ehresmann-Feldbau tout W-F-fibré localement W-F-trivial; cette dernière condition signifie que chaque point de la base possède un voisinage au-dessus duquel le fibré est W-F-trivial.

La théorie des fibrés d'Ehresmann-Feldbau n'est qu'une variante de la théorie des fibrés à groupe structural, plus simple que la théorie des fibrés de Steenrod (elle possède moins de structures) et moins intéressante (on n'y considère pas de fibrés associés). Ce dernier fait lui enlève presque entièrement sa valeur intrinsèque. Sa signification consiste en ce que, pour une large classe de fibres standards, comprenant tous les cas importants, elle s'avère équivalente à la théorie des fibrés de Steenrod et permet ainsi de simplifier cette dernière.

Le cas d'une action topologiquement fidèle

2. Une action continue fidèle $G \times X \to X$ est dite *topologiquement fidèle* si chaque application $f: Y \to G$, où Y est un espace topologique quelconque, à application composée continue

$$Y \times X \xrightarrow{f \times \mathrm{id}} G \times X \to X \tag{1}$$

est continue. Le G-espace X est lui aussi topologiquement fidèle.

Il est clair qu'une action topologiquement fidèle reste topologiquement fidèle par restriction du groupe et qu'un G-espace possédant un sous-espace topologiquement fidèle est topologiquement fidèle.

Des exemples évidents d'actions topologiquement fidèles sont donnés par les actions libres; en particulier, l'action canonique à gauche d'un groupe topologique est toujours topologiquement fidèle. D'autres exemples, tout aussi évidents, sont les actions usuelles du groupe $GL\,(n,\ \mathbf{R})$ et de ses sous-groupes dans $\mathbf{R}^n$.

Pour qu'un G-espace X soit topologiquement fidèle il est nécessaire, et dans le cas où X est un espace de Hausdorff localement compact, également suffisant, que l'application $c: G \to \mathscr{C}\,(X,\ X)$

qui fait correspondre à chaque élément du groupe G la transformation effectuée par cet élément, soit un plongement topologique. La nécessité de cette condition est évidente (il faut poser $Y = c\,(G)$, $f = [(\mathrm{ab}\,c)^{-1} : c\,(G) \to G]$); lorsqu'elle est satisfaite, la continuité de l'application $f : Y \to G$ est équivalente à celle de l'application composée $Y \xrightarrow{f} G \xrightarrow{c} \mathscr{C}(X, X)$ qui découle, dans le cas d'un espace de Hausdorff localement compact X, de la continuité de l'application composée (1) en vertu du théorème 1.2.7.6. En particulier, si le groupe G est compact, alors chaque G-espace de Hausdorff localement compact fidèle est topologiquement fidèle (voir 1.1.7.10 et 1.2.7.2); si l'espace X est un espace de Hausdorff localement compact et localement connexe, ainsi que lorsqu'il est un espace de Hausdorff compact, alors l'action usuelle du groupe Top X dans X est topologiquement fidèle (voir 2.2.5 et 2.2.6).

3. Si la fibre standard F est topologiquement fidèle, alors chaque W-F-application (resp. chaque W-F-isomorphisme, chaque W-F-équivalence) d'un F-fibré de Steenrod dans un autre est une F-application (resp. un F-isomorphisme, une F-équivalence).

Seule la continuité de l'application $DH\,(f)$ qui correspond à la W-F-application $f : \xi \to \xi'$ d'un F-fibré de Steenrod dans un autre nécessite une démonstration. Par ailleurs, il suffit de démontrer cette continuité dans le cas où ξ, ξ' sont des fibrés triviaux standards. Dans ce cas

$$\mathrm{tl}\,\xi = \mathrm{bs}\,\xi \times F, \quad \mathrm{tl}\,\xi' = \mathrm{bs}\,\xi' \times F,$$

et $\mathrm{tl}\,f$ est de la forme

$$(b,\ y) \mapsto (\mathrm{bs}\,f\,(b),\ \varphi\,(b)\,y),$$

où φ est une application de l'espace $\mathrm{bs}\,\xi$ dans le groupe structural G, tandis que l'application $\mathrm{bs}\,\xi \times G \to \mathrm{bs}\,\xi' \times G$ en laquelle $DH\,(f)$ est transformée par les homéomorphismes canoniques

$$\mathrm{bs}\,\xi \times G \to DH\,(\xi), \quad \mathrm{bs}\,\xi' \times G \to DH\,(\xi')$$

(voir 2.2), se définit par la formule

$$(b,\ g) \mapsto (\mathrm{bs}\,f\,(b),\ \varphi\,(b)\,g).$$

Il découle de la continuité de $\mathrm{tl}\,f$ que la composée des applications $\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{tl}\,f : \mathrm{bs}\,\xi \times F \to F$ qui coïncide avec l'application composée $\mathrm{bs}\,\xi \times F \xrightarrow{\varphi \times \mathrm{id}} G \times F \to F$ (où la deuxième flèche figure une action) est continue. Puisque cette action est topologiquement fidèle, φ est continue ainsi que $DH\,(f)$.

4. Tout fibré d'Ehresmann-Feldbau à fibre standard topologiquement fidèle se transforme de manière unique, par topologisation de l'ensemble des homéomorphismes distingués, en un fibré de Steenrod.

L'unicité d'une telle topologie découle du théorème *3*; démontrons son existence. Soit ξ un fibré d'Ehresmann-Feldbau à fibre

standard topologiquement fidèle F. Recouvrons bs ξ par des ouverts au-dessus desquels ξ est W-F-trivial, fixons pour chaque ensemble U de ce recouvrement une W-F-équivalence

$$h_U : (U \times F,\ \mathrm{pr}_1,\ U) \to \xi\,|_U$$

et munissons les ensembles $DH\,(\xi\,|_U)$ d'une topologie à l'aide des applications

$$DH\,(h_U) : DH\,(U \times F,\ \mathrm{pr}_1,\ U) \to DH\,(\xi\,|_U).$$

Nous obtenons un recouvrement de l'ensemble $DH\,(\xi)$ par des ensembles topologisés $DH\,(\xi\,|_U)$; il découle du théorème *3* que leurs topologies sont compatibles sur les intersections, conformément aux conditions de la construction 1.2.4.3. La topologie dans $DH\,(\xi)$ obtenue par cette construction transforme justement ξ en fibré de Steenrod.

Fibrés localement triviaux comme fibrés d'Ehresmann-Feldbau

5. Si F est un espace de Hausdorff localement compact, muni de l'action usuelle du groupe Top F, alors tout W-F-fibré d'Ehresmann-Feldbau est tout simplement un fibré localement trivial à fibres homéomorphes à F. Ainsi, les fibrés localement triviaux usuels dont les fibres sont des espaces de Hausdorff localement compacts homéomorphes entre eux, peuvent être envisagés comme des fibrés d'Ehresmann-Feldbau et possèdent dans cette optique une structure de groupe implicite. Si les fibres sont en outre localement connexes ou compactes, alors de tels fibrés peuvent être envisagés comme des fibrés de Steenrod. Remarquons que cette classe de fibrés comprend tous les revêtements (au sens large) à base connexe.

5. Exercices

1. Montrer que toutes les actions fidèles énumérées dans 2.3.11, 2.3.12, 2.3.13 et 2.3.14 sont topologiquement fidèles.

2. Montrer que pour toute $\mathscr{C}^r$-variété de dimension positive, avec $r \geqslant 1$, l'action usuelle du groupe $\mathrm{Diff}^r X$ dans X est topologiquement non fidèle.

3. Nous allons considérer R comme un Z-espace avec l'action $(n,\ t) \mapsto t + n\ (n \in \mathsf{Z},\ \ t \in \mathsf{R})$; considérons l'extension de cette action à l'action, définie par la même formule, du groupe additif R envisagé comme groupe discret. Montrer que le fibré obtenu à partir de asso $((\mathsf{R},\ \mathrm{hel},\ S^1),\ \mathsf{R})$ à l'aide de l'extension du groupe structural indiquée ci-dessus est non trivial comme fibré de Steenrod, mais trivial comme fibré d'Ehresmann-Feldbau (cf. 4.3).

4. Soient G un groupe topologique connexe, F un G-espace fidèle et ξ un F-fibré de Steenrod non trivial à base simplement connexe.

Désignons par G^δ le groupe G muni de la topologie discrète, par F^δ l'espace F envisagé comme un G^δ-espace et enfin par ξ^δ le fibré ξ envisagé comme un W-F^δ-fibré. Montrer qu'aucune topologie de l'ensemble des homéomorphismes distingués du fibré ξ^δ ne le transforme en un F^δ-fibré de Steenrod (cf. 4.4).

§ 4. CLASSIFICATION DES FIBRÉS DE STEENROD

1. Fibrés de Steenrod et homotopie

1. Nous abordons le problème de la classification des fibrés de Steenrod à fibre standard donnée F et à base cellulaire donnée B relativement à la F-équivalence. Dans ce paragraphe notre résultat principal sera la construction d'une bijection canonique entre les classes de fibrés F-équivalents au-dessus de B et les classes d'homotopie des applications de l'espace B dans un espace de construction spéciale dépendant seulement du groupe structural. Cette construction permet de réduire le problème de classification des fibrés à un problème ordinaire de la théorie de l'homotopie.

Lemmes sur les fibrés F-triviaux

2. Soient ξ un fibré de Steenrod à fibre standard F et B_1, B_2 des sous-ensembles fermés de la base $\mathrm{bs}\,\xi$ *tels que* $B_1 \cup B_2 = \mathrm{bs}\,\xi$ *et* $B_1 \cap B_2$ *est un rétracte de l'espace* B_2. *Si les restrictions* $\xi\,|_{B_1}$, $\xi\,|_{B_2}$ *sont F-triviales, alors ξ est également F-trivial.*

D é m o n s t r a t i o n. Fixons une rétraction $\rho : B_2 \to B_1 \cap B_2$ et des F-trivialisations

$$h_1 : \eta_1 = (B_1 \times F,\ \mathrm{pr}_1,\ B_1) \to \xi\,|_{B_1},$$
$$h_2 : \eta_2 = (B_2 \times F,\ \mathrm{pr}_1,\ B_2) \to \xi\,|_{B_2};$$

désignons par f la F-équivalence composée

$$\eta_2|_{B_1 \cap B_2} \xrightarrow{\mathrm{id}} \eta_1|_{B_1 \cap B_2} \xrightarrow{\mathrm{ab}\,h_1} \xi|_{B_1 \cap B_2} \xrightarrow{(\mathrm{ab}\,h_2)^{-1}} \eta_2|_{B_1 \cap B_2}.$$

Il est évident que tl f se décrit par la formule

$$(b,\ y) \mapsto (b,\ \varphi\,(b)\,y) \qquad [b \in B_1 \cap B_2,\quad y \in F],$$

où φ est une certaine application de l'intersection $B_1 \cap B_2$ dans le groupe structural G, tandis que $DH\,(f)$, après transformation par l'homéomorphisme canonique $(B_1 \cap B_2) \times G \to DH\,(\eta_2\,|_{B_1 \cap B_2})$ en une application $(B_1 \cap B_2) \times G \to (B_1 \cap B_2) \times G$, se décrit par la formule

$$(b,\ g) \mapsto (b,\ \varphi\,(b)\,g) \qquad [b \in B_1 \cap B_2,\quad g \in G].$$

Ainsi, la continuité de $DH(f)$ implique celle de φ et par suite celle de l'application $B_2 \times F \to B_2 \times F$ définie par la formule $(b, y) \mapsto (b, \varphi \circ \rho(b)\, y)$. Cette dernière, réunie à $\mathrm{id}\, B_2$, constitue une F-équivalence $f' : \eta_2 \to \eta_2$ et l'égalité évidente

$$f = [\mathrm{ab}\, f' : \eta_2|_{B_1 \cap B_2} \to \eta_2|_{B_1 \cap B_2}]$$

montre que les F-applications composées

$$\eta_1 \xrightarrow{h_1} \xi|_{B_1} \xrightarrow{\mathrm{in}} \xi, \quad \eta_2 \xrightarrow{f'} \eta_2 \xrightarrow{h_2} \xi|_{B_2} \xrightarrow{\mathrm{in}} \xi$$

coïncident au-dessus de $B_1 \cap B_2$. D'après 3.2.7, il en découle qu'elles constituent une F-application du fibré $(B \times F, \mathrm{pr}_1, B)$ dans ξ; en vertu de 3.2.8, cette dernière application sera une F-équivalence.

3. Chaque F-fibré de Steenrod à base I^n est F-trivial.

Démonstration. Soit η un F-fibré de Steenrod avec $\mathrm{bs}\, \eta = I^n$. Choisissons un entier positif N tel que η soit F-trivial au-dessus de chaque cube d'arête $1/N$ contenu dans I^n, et décomposons I^n de manière usuelle en N^n cubes que nous numéroterons dans l'ordre lexicographique en une suite $Q_1, \ldots, Q_{N^n}$; posons $W_i = \bigcup_{j=1}^{i} Q_j$. Une récurrence évidente montre que η est F-trivial au-dessus de chacun des ensembles $W_1, \ldots, W_{N^n}$: le passage de W_i à W_{i+1} s'effectue à l'aide du lemme *2* appliqué à $\xi = \eta\, |_{W_{i+1}}$, $B_1 = W_i$, $B_2 = Q_{i+1}$. Ainsi η est F-trivial au-dessus de $W_{N^n} = I^n$.

4. Soient ξ_1, ξ_2 des fibrés de Steenrod à fibre standard commune F et de même base B; soit A un rétracte de l'espace B. Si ξ_1, ξ_2 sont F-triviaux, alors pour toute F-équivalence $h : \xi_1|_A \to \xi_2|_A$ il existe une F-équivalence $h' : \xi_1 \to \xi_2$ telle que $[\mathrm{ab}\, h' : \xi_1|_A \to \xi_2|_A] = h$.

Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où ξ_1 est le F-fibré trivial standard $(B \times F, \mathrm{pr}_1, B)$ et $\xi_2 = \xi_1$. Soit $\rho : B \to A$ une rétraction. Il est évident que tl h se décrit par la formule

$$(a, y) \mapsto (a, \varphi(a)\, y) \qquad [a \in A, \quad y \in F],$$

où φ est une application de l'ensemble A dans le groupe structural G, tandis que $DH(h)$, après transformation par l'homéomorphisme canonique $A \times G \to DH(\xi_1|_A)$ $[= DH(\xi_2|_A)]$ en $A \times G \to A \times G$ se définit par la formule

$$(a, g) \mapsto (a, \varphi(a)\, g) \qquad [a \in A, \quad g \in G].$$

Ainsi la continuité de $DH(h)$ implique celle de φ et donc celle de l'application $B \times F \to B \times F$ définie par la formule $(b, y) \mapsto (b, \varphi \circ \rho(b)\, y)$. Cette dernière application constitue avec $\mathrm{id}\, B$ une F-équivalence $h' : \xi_1 \to \xi_2$ qui prolonge h.

Invariance homotopique du fibré induit

5. Soient ξ *un fibré de Steenrod à fibre standard* F *et* f_1, f_2 *des applications continues d'un espace cellulaire* X *dans* bs ξ. *Si* f_1, f_2 *sont homotopes, alors les fibrés* $f_1^!\xi$, $f_2^!\xi$ *sont* F*-équivalents; en outre, si* f_1, f_2 *sont* A*-homotopes, où* A *est un sous-espace cellulaire de* X *alors il existe une* F*-équivalence* $f_1^!\xi \to f_2^!\xi$ *qui est l'identité sur* $f_1^!\xi\,|_A$.

Démonstration. Fixons une A-homotopie $H: X \times I \to$ bs ξ qui joint f_1 à f_2 et posons $\xi_1 = (f_1^!\xi) \times (I, \mathrm{id}\, I, I)$, $\xi_2 = H^!\xi$. Il est clair que $\xi_1\,|_{(X\times 0)\cup(A\times I)} = \xi_2\,|_{(X\times 0)\cup(A\times I)}$ et que l'homéomorphisme canonique $X \to X \times 1$ transforme $\xi_1\,|_{X\times 1}$, $\xi_2|_{X\times 1}$ en $f_1^!\xi$, $f_2^!\xi$. Par conséquent, il suffit de construire une F-équivalence $\xi_1 \to \xi_2$ qui est l'identité au-dessus de $(X \times 0) \cup (A \times I)$.

Nous l'obtiendrons comme la limite d'une suite de F-équivalences $h_i: \xi_1\,|_{C_i} \to \xi_2\,|_{C_i}$ qui se prolongent où

$$C_i = (X \times 0) \cup (A \times I) \cup (\mathrm{ske}_i\, X \times I).$$

L'application h_{-1} est l'identité par définition, la F-équivalence h_{i+1} se construit à partir de la F-équivalence h_i de la manière suivante. Nous supposerons que l'espace X est équipé. Soit la cellule $e \in \mathrm{cell}_{i+1}X \setminus \mathrm{cell}_{i+1}A$; désignons par g_e la F-équivalence, définie par la F-équivalence h_i, entre le fibré

$$[\mathrm{ab}\,(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)]^!\,(\xi_1\,|_{C_i}) = [(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)^!\ \xi_1]\,|_{(D^{i+1}\times 0)\cup(S^i\times I)},$$

où

$$\mathrm{ab}\,(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I) = [\mathrm{ab}\,(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I): (D^{i+1} \times 0) \cup (S^i \times I) \to C_i],$$

et le fibré

$$[\mathrm{ab}\,(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)]^!\,(\xi_2\,|_{C_i}) = [(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)^!\ \xi_2]\,|_{(D^{i+1}\times 0)\cup(S^i\times I)}.$$

D'après le lemme *3*, les fibrés

$$(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)^!\ \xi_1, \quad (\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)^!\ \xi_2$$

sont F-triviaux, et puisque $(D^{i+1} \times 0) \cup (S^i \times I)$ est un rétracte du cylindre $D^{i+1} \times I$, le lemme *4* permet de prolonger g_e en une certaine F-équivalence

$$\tilde{g}_e: (\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)^!\ \xi_1 \to (\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)^!\ \xi_2.$$

En remarquant que l'application tl $\tilde{g}_e$ est constante sur les éléments de la partition zer (tl ad $(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)$) et en appliquant le théorème 3.2.6 (en y prenant $B = D^{r+1} \times I$ et $p = [\mathrm{ab}\,(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I): D^{r+1} \times I \to \mathrm{Cl}\, e \times I]$), nous voyons que la F-application composée

$$(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)^!\ \xi_1 \xrightarrow{\tilde{g}_e} (\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)^!\ \xi_2 \xrightarrow{\mathrm{ab\ ad}\,(\mathrm{cha}_e \times \mathrm{id}\, I)} \xi_2\,|_{\mathrm{Cl}\, e\times I}$$

définit une F-application $\xi_1|_{\mathrm{Cl}\, e\times I} \to \xi_2|_{\mathrm{Cl}\, e\times I}$, tandis que d'après le théorème 3.2.8 cette dernière est une F-équivalence. Nous désignons cette F-équivalence par h_e, et remarquons que, pour des cellules $e_1, e_2 \in \mathrm{cell}_{i+1} X \setminus \mathrm{cell}_{i+1} A$ quelconques, les applications $\mathrm{tl}\, h_{e_1}$, $\mathrm{tl}\, h_{e_2}$ coïncident au-dessus de $(\mathrm{Cl}\, e_1 \times I) \cap (\mathrm{Cl}\, e_2 \times I)$ et que pour chaque cellule $e \in \mathrm{cell}_{i+1} X \setminus \mathrm{cell}_{i+1} A$ l'application $\mathrm{tl}\, h_e$ coïncide au-dessus de $(\mathrm{Cl}\, e \times I) \cap C_i$ avec $\mathrm{tl}\, h_i$. Les ensembles C_i et $\mathrm{Cl}\, e \times I$ pour $e \in \mathrm{cell}_{i+1} X \setminus \mathrm{cell}_{i+1} A$ constituent un recouvrement fondamental de l'espace C_{i+1}, par conséquent, en vertu de 3.2.7, les applications h_i et h_e pour $e \in \mathrm{cell}_{i+1} X \setminus \mathrm{cell}_{i+1} A$ constituent une F-application $\xi_1|_{C_{i+1}} \to \xi_2|_{C_{i+1}}$ que nous prendrons en guise de h_{i+1}. Il est clair qu'elle prolonge h_i et d'après 3.2.7 h_{i+1}^{-1} est également une F-application.

Il reste à établir que la suite $\{h_i : \xi_1|_{C_i} \to \xi_2|_{C_i}\}$ converge vers une F-équivalence $\xi_1 \to \xi_2$. Pour cela, il suffit de remarquer que les ensembles C_i constituent un recouvrement fondamental de l'espace $X \times I$ et d'appliquer le théorème 3.2.7 aux suites $\{h_i\}$ et $\{h_i^{-1}\}$.

Les ensembles Stee(B, F)

6. Nous désignerons par Stee (B, F) l'ensemble des classes de F-fibrés de Steenrod F-équivalents au-dessus de B. Nous envisageons les applications que l'on fait subir à cet ensemble par l'opération de passage au fibré induit, l'extension du groupe structural et l'opération de passage au fibré associé.

Pour une application continue $f: B' \to B$, la correspondance $\xi \mapsto f^!\xi$ définit une application

$$f^!: \mathrm{Stee}\,(B, F) \to \mathrm{Stee}\,(B', F).$$

Le théorème *5* nous montre que, dans le cas où B' est un espace cellulaire, l'application $f^!$ est déterminée par la classe d'homotopie de l'application f. D'où il découle que si les deux espaces B, B' sont cellulaires et f est une équivalence d'homotopie, l'application $f^!$ est bijective.

L'extension du groupe structural, qui fait du G_1-espace F_1 un G-espace fidèle F, définit pour tout espace topologique B l'application

$$\mathrm{ext}: \mathrm{Stee}\,(B, F_1) \to \mathrm{Stee}\,(B, F).$$

Cette application est naturelle dans le sens que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Stee}\,(B, F_1) & \xrightarrow{\mathrm{ext}} & \mathrm{Stee}\,(B, F) \\ {\scriptstyle f^!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^!} \\ \mathrm{Stee}\,(B', F_1) & \xrightarrow{\mathrm{ext}} & \mathrm{Stee}\,(B', F) \end{array}$$

est commutatif pour chaque application continue $f: B' \to B$, comme on le voit immédiatement.

Si F' est un autre G-espace fidèle, alors la correspondance $\xi \mapsto$ $\mapsto$ asso (ξ, F') définit, pour tout espace topologique B, l'application

$$\text{asso}: \text{Stee}(B, F) \to \text{Stee}(B, F').$$

Cette application est bijective (l'application inverse est asso : Stee $(B, F') \to$ Stee (B, F)) et naturelle dans ce sens que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Stee}(B, F) & \xrightarrow{\text{asso}} & \text{Stee}(B, F') \\ {\scriptstyle f^!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^!} \\ \text{Stee}(B', F) & \xrightarrow{\text{asso}} & \text{Stee}(B', F') \end{array}$$

est commutatif pour chaque application continue $f: B' \to B$ (voir 3.3.4).

En outre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Stee}(B, F_1) & \xrightarrow{\text{asso}} & \text{Stee}(B, F'_1) \\ {\scriptstyle \text{ext}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{ext}} \\ \text{Stee}(B, F) & \xrightarrow{\text{asso}} & \text{Stee}(B, F') \end{array} \qquad (1)$$

est commutatif quels que soient l'espace topologique B, les G_1-espaces fidèles F_1, F'_1 et les G-espaces F, F' fidèles qui s'en obtiennent par extension du groupe structural (voir 3.3.5).

2. Fibrés universels

1. Soit F un G-espace fidèle. Il découle du théorème 1.5 que pout tout F-fibré de Steenrod ξ et tout espace cellulaire B la corresponr dance entre le fibré $f^!\xi$ et l'application continue $f: B \to \text{bs}\,\xi$ défini- une application $\pi(B, \text{bs}\,\xi) \to \text{Stee}(B, F)$. Nous désignerons cette application par induz (B, ξ).

Il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi(B,C) \arrow[rr, "\text{induz}(B, g^!\xi)"] \arrow[dr, "\pi(\text{id}B, g)"'] & & \text{Stee}(B,F) \\ & \pi(B, \text{bs}\,\xi) \arrow[ur, "\text{induz}(B,\xi)"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif pour chaque espace topologique C et chaque application continue $g\colon C \to \mathrm{bs}\,\xi$, tandis que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi(B, \mathrm{bs}\,\xi) \arrow[rr, "\mathrm{induz}(B, \mathrm{asso}(\xi, F'))"] \arrow[dr, "\mathrm{induz}(B, \xi)"'] & & \mathrm{Stee}(B, F') \\
& \mathrm{Stee}(B, F) \arrow[ur, "\mathrm{asso}"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour chaque G-espace fidèle F'.

2. Un F-fibré de Steenrod ζ est dit *universel* si l'application induz (B, ζ) est bijective pour chaque espace cellulaire B. Autrement dit, un F-fibré de Steenrod ζ est appelé universel si: (i) pour chaque F-fibré de Steenrod ξ à base cellulaire, il existe une application continue $f\colon \mathrm{bs}\,\xi \to \mathrm{bs}\,\zeta$ telle que le fibré $f^!\zeta$ est F-équivalent à ξ; (ii) deux applications continues quelconques f_1, f_2 d'un espace cellulaire dans bs ζ qui donnent des fibrés $f_1^!\zeta$, $f_2^!\zeta$ F-équivalents sont homotopes.

Remarquons que la condition (i) est équivalente à la condition (i'): pour chaque fibré de Steenrod ξ à base cellulaire il existe une F-application $\xi \to \zeta$. Démonstration: si $f\colon \mathrm{bs}\,\xi \to \mathrm{bs}\,\zeta$ et $g\colon \xi \to f^!\zeta$ sont respectivement une application continue et une F-équivalence, alors $\mathrm{ad}\, f \circ g\colon \xi \to \zeta$ est une F-application; réciproquement, si $h\colon \xi \to \zeta$ est une F-application, alors $\mathrm{corr}\, h\colon \xi \to (\mathrm{bs}\, h)^!\,\zeta$ est une F-équivalence (voir 3.2.9).

D'une manière analogue, la condition (ii) est équivalente à la condition (ii'): pour chaque F-fibré de Steenrod ξ à base cellulaire et deux F-applications quelconques h_0, $h_1\colon \xi \to \zeta$, les applications bs h_0, bs h_1 sont homotopes. En effet, si ξ, h_0 et h_1 possèdent les propriétés indiquées, alors chacun des fibrés $(\mathrm{bs}\, h_0)^!\,\zeta$, $(\mathrm{bs}\, h_1)^!\,\zeta$ est F-équivalent à ξ et (ii) implique que les applications bs h_0, bs h_1 sont homotopes; réciproquement, si f_0, f_1 sont des applications continues d'un espace cellulaire dans bs ξ et $h\colon f_0^!\zeta \to f_1^!\zeta$ est une F-équivalence, alors $f_0 = \mathrm{bs}\,\mathrm{ad}\, f_0$, $f_1 = \mathrm{bs}\,(\mathrm{ad}\, f_1 \circ h)$ de sorte que (ii') implique que f_0, f_1 sont homotopes.

Remarquons également que les conditions (i'), (ii') (et donc les conditions (i), (ii)) sont les conséquences de la condition suivante: pour chaque F-fibré ξ à base cellulaire, et chaque sous-espace A de cette base, toute F-application $\xi|_A \to \zeta$ se prolonge en une F-application $\xi \to \zeta$. Pour déduire (i') de cette condition, il suffit de poser $A = \varnothing$. Pour en déduire (ii'), il suffit de l'appliquer au F-fibré $\xi \times (I, \mathrm{id}\, I, I)$ en prenant pour sous-espace de la base $\mathrm{bs}\,(\xi \times (I, \mathrm{id}\, I, I)) = \mathrm{bs}\,\xi \times I$, à partir duquel on effectue le

prolongement, la réunion $(\mathrm{bs}\,\xi \times 0) \cup (\mathrm{bs}\,\xi \times 1)$ et en définissant l'application à prolonger

$$g\colon (\xi \times (I, \mathrm{id}\, I, I))\,|_{(\mathrm{bs}\,\xi\times 0)\cup(\mathrm{bs}\,\xi\times 1)} \to \zeta$$

par les formules

$$\mathrm{bs}\, g\,(b, 0) = \mathrm{bs}\, h_0\,(b), \quad \mathrm{bs}\, g\,(b, 1) = \mathrm{bs}\, h_1\,(b) \quad [b \in \mathrm{bs}\,\xi],$$

$$\mathrm{tl}\, g\,(x, 0) = \mathrm{tl}\, h_0\,(x), \quad \mathrm{tl}\, g\,(x, 1) = \mathrm{tl}\, h_1\,(x) \quad [x \in \mathrm{tl}\,\xi].$$

3. Un fibré induit par un fibré universel au moyen d'une équivalence homotopique est lui-même un fibré universel.

En effet, si ζ est un F-fibré universel et $f\colon B \to \mathrm{bs}\,\zeta$ une équivalence homotopique, alors l'application induz $(B, f^!\zeta)$ coïncide pour chaque espace cellulaire B avec la composée induz $(B, \zeta) \circ \circ\, \pi\,(f, \mathrm{id}\, B)$ (voir *1*); elle est donc bijective.

4. Si deux F-fibrés ζ, ζ' sont universels et les espaces bs ζ, bs ζ' *cellulaires, alors l'application* bs g: bs $\zeta \to$ bs ζ' *est une équivalence homotopique pour toute F-application g: $\zeta \to \zeta'$.*

D é m o n s t r a t i o n. Fixons une F-application de sens inverse g': $\zeta' \to \zeta$. Puisque les composées $g' \circ g$: $\zeta \to \zeta$, $g \circ g'$: $\zeta' \to \zeta'$ sont des F-applications, la condition *2* (ii') implique que l'application bs $g' \circ$ bs $g =$ bs $(g' \circ g)$ est homotope à id (bs ζ), tandis que l'application bs $g \circ$ bs $g' =$ bs $(g \circ g')$ est homotope à id (bs ζ').

5. Tout fibré associé à un fibré universel est universel.

En effet, si ζ est un F-fibré universel et F' un G-espace fidèle, alors l'application induz $(B,$ asso $(\zeta, F'))$ coïncide, pour tout espace cellulaire B, avec la composée des applications induz (B, ζ) et asso: Stee $(B, F) \to$ Stee (B, F') (voir *1*); elle est donc bijective.

Espaces classifiants

6. Le théorème *5* nous montre que la base d'un fibré universel à groupe structural G est en même temps la base des fibrés universels à groupe structural G et à fibres standards quelconques et ne dépend pas en ce sens du choix de la fibre standard. On l'appelle *espace classifiant* du groupe G.

Il découle du théorème *3* qu'un espace homotopiquement équivalent à un espace classifiant du groupe G est également un espace classifiant du groupe G. Le théorème *4* implique que deux espaces cellulaires classifiants pour G sont homotopiquement équivalents.

Fibrés *k*-universels

7. Un F-fibré de Steenrod ζ est dit *k-universel* si l'application

$$\text{induz}\,(B, \zeta)\colon \pi\,(B, \mathrm{bs}\,\zeta) \to \text{Stee}\,(B, F)$$

est surjective pour tout espace cellulaire B de dimension $\leqslant k$ et si elle est injective lorsque B est de dimension $\leqslant k - 1$. Autrement

dit, un F-fibré de Steenrod ζ est appelé k-universel si, premièrement, pour chaque F-fibré de Steenrod ξ à base cellulaire de dimension $\leqslant k$, il existe une application continue f: bs $\xi \to$ bs ζ telle que le fibré $f^!\zeta$ est F-équivalent à ξ et, deuxièmement, si deux applications continues f_0, f_1 d'un espace cellulaire de dimension $\leqslant k - 1$ dans bs ζ telles que les fibrés $f_0^!\zeta$, $f_1^!\zeta$ s'avèrent F-équivalents, sont homotopes. Conditions équivalentes: pour chaque F-fibré de Steenrod ξ à base cellulaire de dimension $\leqslant k$ il existe une F-application $\xi \to \zeta$; quels que soient le F-fibré de Steenrod ξ à base cellulaire de dimension $\leqslant k - 1$ et les F-applications g_0, g_1: $\xi \to \zeta$, les applications bs g_0, bs g_1 sont homotopes.

Dans ces énoncés, k est un nombre naturel; par analogie, les fibrés universels sont appelés parfois ∞-*universels*. Il est évident qu'un fibré k-universel est l-universel si $l \leqslant k$. Les théorèmes 2.3.2.4 et 2.3.2.5 impliquent que, pour $l \leqslant k$, la restriction d'un fibré k-universel à base cellulaire à un sous-espace de la base qui contient le squelette de dimension l est l-universelle.

Les théorèmes *3* et *5* restent valables pour les fibrés k-universels: le fibré induit par un fibré k-universel au moyen d'une équivalence homotopique est k-universel; de même un fibré associé à un fibré k-universel est k-universel.

3. Fibrés de Milnor

1. La construction ci-dessous fait correspondre à chaque groupe topologique G un certain fibré principal à groupe structural G que l'on appelle *G-fibré de Milnor*; il sera noté Mi G. Nous montrerons dans *2* à *6* que Mi G est un G-fibré universel.

Désignons par $TG(k)$ le join de k copies du groupe G. L'espace $TG(k)$ se plonge d'une manière naturelle dans $TG(k+1)$ (en tant que base du join $TG(k) * G = TG(k+1)$), ce qui permet de définir la limite $TG = \lim TG(k)$. L'action à droite du groupe G dans G, qui fait correspondre à un élément g du groupe G la transformation $g_1 \mapsto g^{-1}g_1$, induit une action à droite continue et libre de ce groupe dans $TG(k)$ et comme les plongements $TG(k) \to TG(k+1)$ sont des G-applications relativement à cette action, une action de même type apparaît dans TG. Ainsi on a défini le G-fibré (TG, pr, TG/G) qui est justement Mi G.

Si G_1 est un sous-groupe du groupe G, alors on a les injections

$$\mathrm{in} * \ldots * \mathrm{in}: TG_1(k) \to TG(k) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

où in $= [\mathrm{in}: G_1 \to G]$; il est clair que ce sont des in-applications. En outre, elles sont compatibles avec les plongements

$$TG(k) \to TG(k+1), \quad TG_1(k) \to TG_1(k+1)$$

de sorte que l'on peut définir l'application limite $TG_1 \to TG$ (voir 1.2.4.4). Celle-ci est aussi une in-application et constitue, avec l'application $TG_1/G_1 \to TG/G$ qu'elle induit, une application Mi $G_1 \to$ Mi G qui est évidemment une (in, in)-application. Ainsi, à l'injection $G_1 \to G$ correspond la (in, in)-application Mi $G_1 \to$ $\to$ Mi G.

Trivialité locale du fibré Mi G

2. Il nous sera commode d'identifier l'espace $TG(k)$ avec le sous-espace du produit cône $G \times \ldots \times$ cône G (k facteurs) constitué des points

$$\{\mathrm{pr}\,(g_i,\ t_i)\}_{i=1}^{k},\quad t_1 + \ldots + t_k = 1,$$

(voir 1.2.6.4; ici pr $=$ [pr: $G \times I \to$ cône G]) qui lui est canoniquement homéomorphe. Après cette identification, les points de l'espace TG se présentent comme des suites $\{\mathrm{pr}\,(g_i,\ t_i)\}_{i=1}^{\infty}$, $\sum t_i = 1$, à support borné en ce sens que tous les t_i, sauf un nombre fini, sont nuls, et l'action à droite du groupe G dans TG décrite dans *1* se donne par la formule

$$\{\mathrm{pr}\,(g_i,\ t_i)\}\ g = \{\ \mathrm{pr}\,(g^{-1}g_i,\ t_i)\}.$$

3. Le fibré Mi G *est localement G-trivial.*

Un recouvrement ouvert au-dessus des éléments duquel le fibré Mi G est G-trivial est constitué des ensembles pr Mi $G\,(U_1)$, pr Mi $G\,(U_2)$, . . ., où U_s est la famille de suites $\{\mathrm{pr}\,(g_i,\ t_i)\}$ avec $t_s \neq 0$, tandis que la G-trivialisation

$$\mathrm{pr\ Mi}\ G\,(U_s) \times G \to \mathrm{pr\ Mi}\ G^{-1}\,(\mathrm{pr\ Mi}\ G\,(U_s))\ [=U_s]$$

rapporte à chaque point $(x,\ g)$ la suite $\{\mathrm{pr}\,(g_i,\ t_i)\}$ définie par les conditions pr Mi $G\ \{\mathrm{pr}\,(g_i,\ t_i)\} = x$, $g_s = g$.

L'universalité du fibré Mi G

4. Le fibré Mi G *est universel.*

En vertu de 2.2, il suffit de démontrer que, quels que soient le G-fibré ξ à base cellulaire et le sous-espace A de cette base, toute G-application $f\colon \xi\,|_A \to$ Mi G se prolonge en une G-application $\xi \to$ Mi G.

Considérons d'abord le cas où bs $\xi = D^{r+1}$ (pour un certain r), et $A = S^r$. Dans ce cas, le fibré ξ est G-trivial (voir 1.3), ce qui permet de l'identifier avec le G-fibré G-trivial standard $(D^{r+1} \times G,\ \mathrm{pr}_1,\ D^{r+1})$ et de définir le prolongement cherché $h\colon \xi \to$ Mi G par une formule explicite: nous désignons par k le plus petit des nombres s qui vérifient $TG\,(s) \supset \mathrm{tl}\, f\,(S^r \times e_G)$ et par φ_i l'application

composée

$$S^r \times G \xrightarrow{\text{ab tl } f} TG(k) \xrightarrow{\text{in}} \underbrace{\text{cône } G \times \ldots \times \text{cône } G}_{k} \xrightarrow{\text{pr}_i} \text{cône } G$$

$(i = 1, \ldots, k)$; ensuite nous définissons l'application $\psi: D^{r+1} \times \times G \to TG(k+1)$ par la formule

$$\psi(ty, g) = (t\varphi_1(y), \ldots, t\varphi_k(y), \text{pr}(g, 1-t)),$$

où $y \in S^r$, $t \in I$, et $\text{pr} = [\text{pr}: G \times I \to \text{cône } G]$, et nous posons $\text{tl } h = [\text{in}: TG(k+1) \to TG] \circ \psi$.

Le cas général se réduit à ce cas particulier. Nous supposerons que l'espace bs ξ est équipé et qu'une G-application $h_r: \xi|_{A \cup \text{ske}_r \text{bs } \xi} \to \text{Mi } G$ qui prolonge f est déjà donnée. D'après ce que nous avons démontré, pour chaque cellule $e \in \text{cell}_{r+1} \text{ bs } \xi \setminus \text{cell}_{r+1} A$ la G-application

$$f_e = h_r \circ \text{ad } [\text{ab cha}_e: S^r \to A \cup \text{ske}_r \text{ bs } \xi]: \text{cha}_e^! \xi|_{S^r} \to \text{Mi } G$$

se prolonge en une certaine G-application $g_e: \text{cha}_e^! \xi \to \text{Mi } G$; il est clair que l'application tl g_e est constante sur les éléments de la partition zer (tl ad cha_e). En appliquant le théorème 3.2.6 (dans lequel on pose $B = D^{r+1}$ et $p = [\text{ab cha}_e: D^{r+1} \to \text{Cl } e]$), nous voyons que g_e définit une G-application $\xi|_{\text{Cl } e} \to \text{Mi } G$. Nous désignerons cette application par h_e; remarquons que, quelles que soient les cellules

$$e_1, e_2 \in \text{cell}_{r+1} \text{ bs } \xi \setminus \text{cell}_{r+1} A,$$

les applications tl h_{e_1}, tl h_{e_2} coïncident au-dessus de $\text{Cl } e_1 \cap \text{Cl } e_2$, et que, pour chaque cellule $e \in \text{cell}_{r+1} \text{ bs } \xi \setminus \text{cell}_{r+1} A$, l'application tl h_e coïncide au-dessus de $\text{Cl } e \cap (A \cup \text{ske}_r \text{ bs } \xi)$ avec tl h_r. Il découle de cette compatibilité des applications que les applications h_r et h_e pour $e \in \text{cell}_{r+1} \text{ bs } \xi \setminus \text{cell}_{r+1} A$ forment une certaine G-application $h_{r+1}: \xi|_{A \cup \text{ske}_{r+1} \text{bs } \xi} \to \text{Mi } G$ qui prolonge h_r (voir 3.2.7). Ainsi, nous avons construit par récurrence une suite $\{h_s: \xi|_{A \cup \text{ske}_s \text{bs } \xi} \to \text{Mi } G\}_{s=1}^{\infty}$ avec $h_{-1} = f$ constituée de G-applications qui se prolongent de proche en proche, et comme les ensembles $A \cup \text{ske}_{r+1} \text{ bs } \xi$ constituent un recouvrement fondamental de l'espace bs ξ on voit, toujours en vertu de 3.2.7, que les applications h_s forment une G-application $\xi \to \text{Mi } G$ qui prolonge f.

Remarque

5. La base du fibré Mi G n'est pas un espace cellulaire; pourtant, au chapitre suivant nous montrerons qu'il existe également, pour chaque groupe topologique G, des G-fibrés universels à base cellulaire; voir 5.6.1.4. D'où l'on déduira, en se servant de 2.7, que pour chaque groupe topologique G et un k naturel, il existe un G-fibré k-universel à base cellulaire de dimension $\leqslant k$.

4. Réduction du groupe structural

1. On dit qu'un fibré de Steenrod ξ_1 à groupe structural G_1 et à fibre standard F_1 s'obtient d'un fibré de Steenrod ξ à groupe structural G et à fibre standard F *par réduction du groupe G à G_1* si ξ s'obtient de ξ_1 par extension du groupe G_1 à G; voir 3.2.4.

Tandis que l'extension du groupe structural d'un fibré de Steenrod est toujours bien définie, la réduction du groupe structural à son sous-groupe donné, comme nous verrons, est loin d'être toujours possible; et lorsqu'elle l'est, elle peut donner des fibrés qui ne sont pas équivalents relativement au groupe réduit. Autrement dit, l'application

$$\text{ext}: \text{Stee}\,(B,\ F_1) \to \text{Stee}\,(B,\ F) \tag{2}$$

définie dans 1.6 peut avoir une image plus petite que Stee (B, F) et peut ne pas être injective.

Remarquons que les propriétés ensemblistes de l'application (2) sont définies par le triplet B, G, G_1, i.e. elles restent les mêmes si, sans changer B, G et G_1, nous remplaçons F par un autre G-espace fidèle et F_1 par le G_1-espace correspondant. Ceci découle de la commutativité du diagramme (1).

2. Rappelons que, dans le cas cellulaire, Stee (B, F) peut être interprété comme l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues de l'espace B dans l'espace classifiant du groupe structural. Nous allons décrire l'application (2) dans le même langage homotopique.

Supposons que G, G_1 et F, F_1 ont la même signification que dans *1*; soient ζ, ζ_1 des fibrés universels à fibres standards F, F_1. Nous dirons qu'une application continue ψ: bs $\zeta_1 \to$ bs ζ est *classifiante* si le fibré $\psi^!\zeta$ est F-équivalent au fibré obtenu de ζ_1 par extension du groupe G_1 à G. Il découle de la définition du fibré universel qu'une telle application existe lorsque la base bs ζ_1 est cellulaire; elle existe certainement si $\zeta = \text{Mi}\,G$, $\zeta_1 = \text{Mi}\,G_1$ (voir 3.1). Proposition: *pour chaque ψ vérifiant la définition ci-dessus le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \text{Stee}\,(B,\ F_1) & \xrightarrow{\text{ext}} & \text{Stee}\,(B,\ F) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \text{induz}\,(B,\ \zeta_1)} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \text{induz}\,(B,\ \zeta)} \\ \pi\,(B,\ \text{bs}\,\zeta_1) & \xrightarrow{\pi\,(\text{id}\,B,\ \psi)} & \pi\,(B,\ \text{bs}\,\zeta) \end{array} \tag{3}$$

est commutatif pour chaque espace cellulaire B.

D é m o n s t r a t i o n. La composée induz $(B, \zeta) \circ \pi$ (id B, ψ) envoie la classe d'homotopie de l'application f_1: $B \to$ bs ζ_1 dans la classe du fibré $(\psi \circ f_1)^!\,\zeta$, tandis que la composée ext $\circ$ induz (B, ζ_1) l'envoie dans la classe d'un fibré obtenu de $f_1^!\zeta_1$ par extension du groupe G_1 à G. Puisque l'extension du groupe structural permute

avec induz (voir 1.6), cette dernière classe contient le fibré $f_1^! (\psi^! \zeta)$ et il reste à remarquer que $f_1^! (\psi^! \zeta) = (\psi \circ f_1)^! \zeta$.

3. La commutativité du diagramme (3) et la bijectivité des applications figurées par les flèches verticales permettent d'affirmer que induz (B, ζ_1), réduit à l'ensemble des classes d'homotopie des applications $B \to \mathrm{bs}\, \zeta_1$ telles que leur composée avec ψ soit homotope à l' pplication donnée $f: B \to \mathrm{bs}\, \zeta$, est une injection sur l'ensemble des classes des F_1-fibrés F_1-équivalents obtenus de $f^! \zeta$ par réduction du groupe G à G_1. En particulier, un F-fibré de Steenrod ξ à base cellulaire admet une réduction du groupe G à G_1 si et seulement si l'application $\mathrm{bs}\, \xi \to \mathrm{bs}\, \zeta$, ayant servi à obtenir un fibré induit F-équivalent à ξ, est homotope à la composée de l'application continue $\mathrm{bs}\, \xi \to \mathrm{bs}\, \zeta_1$ avec ψ.

5. Exercices

1. Pour un groupe topologique G et un k naturel désignons par Mi (G, k) la restriction du fibré Mi G à TG $(k)/G$, i.e. le fibré (TG (k), pr, TG $(k)/G$). Montrer que Mi (G, k) est un G-fibré $(k - 1)$-universel.

2. Montrer que le fibré Mi Z_2 est isomorphe à $(S^\infty, \mathrm{pr}, \mathrm{R}P^\infty)$ et le fibré Mi (Z_2, k) (voir *1*) est isomorphe à $(S^{k-1}, \mathrm{pr}, \mathrm{R}P^{k-1})$.

3. Montrer que le fibré Mi S^1 est isomorphe à $(S^\infty, \mathrm{pr}, \mathrm{C}P^\infty)$ et le fibré Mi (S^1, k) est isomorphe à $(S^{2k-1}, \mathrm{pr}, \mathrm{C}P^{k-1})$.

4. Considérons pour une $\mathscr{C}^r$-variété X compacte de dimension n avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$ l'action à droite du groupe $\mathrm{Diff}^r X$ dans $\mathrm{Emb}^r (X, \mathrm{R}^q)$ définie par la formule

$$(j, \varphi) \mapsto j \circ \varphi, \quad j \in \mathrm{Emb}^r (X, \mathrm{R}^q), \ \varphi \in \mathrm{Diff}^r X,$$

et son action limite à droite dans

$$\lim (\mathrm{Emb}^r (X, \mathrm{R}^q), \ \mathrm{ab}\, \mathscr{C}^r (\mathrm{id}\, X, \mathrm{in}) : \mathrm{Emb}^r (X, \mathrm{R}^q) \to \mathrm{Emb}^r (X, \mathrm{R}^{q+1})).$$

Montrer que $(\lim \mathrm{Emb}^r (X, \mathrm{R}^q), \mathrm{pr}, [\lim \mathrm{Emb}^r (X, \mathrm{R}^q)]/\mathrm{Diff}^r X)$ est un $\mathrm{Diff}^r X$-fibré universel et que dans le cas $q \geqslant 2n + 1$

$$(\mathrm{Emb}^r (X, \mathrm{R}^q), \mathrm{pr}, \mathrm{Emb}^r (X, \mathrm{R}^q)/\mathrm{Diff}^r X)$$

est un $\mathrm{Diff}^r X$-fibré $(q - 2n - 1)$-universel.

§ 5. FIBRÉS VECTORIELS

1. Définitions générales

1. Le principal objet du présent paragraphe est l'étude des fibrés de Steenrod dont la fibre standard est l'espace R^n, muni de l'action usuelle d'un des groupes $GL\,(n, \mathrm{R})$, $GL_+\,(n, \mathrm{R})$, $O\,(n)$, $SO\,(n)$,

ou l'espace $\mathbf{C}^n$, muni de l'action usuelle d'un des groupes $GL(n, \mathbf{C})$, $U(n)$.

Puisque toutes les fibres standards énumérées ci-dessus sont topologiquement fidèles, les fibrés qui nous intéressent peuvent également être envisagés comme des fibrés d'Ehresmann-Feldbau avec les mêmes fibres standards (voir p. 3.4). Grâce à ce fait nous pouvons ne prêter aucune attention, dans tout ce paragraphe, à la topologie dans les ensembles des homéomorphismes distingués.

Pour alléger l'exposé, nous introduisons pour les fibres standards indiquées des notations spéciales: $GL\,\mathbf{R}^n$, $GL_+\,\mathbf{R}^n$, $O\mathbf{R}^n$, $SO\mathbf{R}^n$, $GL\mathbf{C}^n$, $U\mathbf{C}^n$.

La fibre standard $GL\mathbf{R}^n$

2. Un fibré de Steenrod à fibre standard $GL\mathbf{R}^n$ est appelé *fibré vectoriel réel de dimension n.*

Puisque l'espace à $GL\mathbf{R}^n$-structure est un espace vectoriel réel de dimension n (voir 3.1.3), tout W-$GL\mathbf{R}^n$-fibré est simplement un fibré dont les fibres sont des espaces vectoriels réels de dimension n. Il est clair également que la W-$GL\mathbf{R}^n$-équivalence entre les W-$GL\,\mathbf{R}^n$-fibrés est une équivalence linéaire sur les fibres correspondantes. Ainsi un fibré vectoriel réel de dimension n est un fibré dont les fibres sont des espaces vectoriels réels de dimension n et qui est localement trivial au sens vectoriel: chaque point de la base possède un voisinage U au-dessus duquel le fibré est linéairement équivalent, fibre par fibre, au fibré $(U \times \mathbf{R}^n, \mathrm{pr}_1, U)$.

3. Un fibré ξ *dont les fibres sont des espaces vectoriels réels de dimension n est un fibré vectoriel réel de dimension n (i.e. est localement trivial au sens vectoriel indiqué ci-dessus) si et seulement si:* (i) *il est localement trivial au sens topologique*; (ii) *les opérations vectorielles partielles qui existent dans* tl ξ, *i.e. les applications*

$$\mathbf{R} \times \mathrm{tl}\,\xi \to \mathrm{tl}\,\xi,$$

$$\{(x_1, x_2) \in \mathrm{tl}\,\xi \times \mathrm{tl}\,\xi \mid \mathrm{pr}\,\xi\,(x_1) = \mathrm{pr}\,\xi\,(x_2)\} \to \mathrm{tl}\,\xi,$$

définies par les formules $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, *sont continues.*

La nécessité de ces conditions est évidente; démontrons leur suffisance.

Soit b_0 un point de la base bs ξ. Fixons une base de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de l'espace $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b_0)$, un voisinage U du point b_0 à restriction $\xi\,|_U$ topologiquement triviale et une trivialisation $h: (U \times \mathbf{R}^n, \mathrm{pr}_1, U) \to \xi\,|_U$ de cette restriction; définissons une application linéaire sur les fibres $h': (U \times \mathbf{R}^n, \mathrm{pr}_1, U) \to \xi$ en posant

$$\mathrm{tl}\,h'\,(b, \mathrm{ort}_i) = \mathrm{tl}\,h\,(b, \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{tl}\,h^{-1}\,(v_i)),$$

où $\mathrm{pr}_2 = [\mathrm{pr}_2 : U \times \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n]$. Fixons ensuite des voisinages disjoints K et N de l'ensemble $\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{tl}\, h^{-1} \circ \mathrm{tl}\, h'\, (b_0 \times S^{n-1})$ et du point $\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{tl}\, h^{-1} \circ \mathrm{tl}\, h'\, (b_0, 0)$ de R^n et désignons par V le voisinage du point b_0 constitué des points $b \in U$ avec

$$\mathrm{tl}\, h'\, (b \times S^{n-1}) \subset \mathrm{tl}\, h\, (b \times K), \qquad \mathrm{tl}\, h'\, (b, 0) \subset \mathrm{tl}\, h\, (b \times N).$$

Il est clair que l'ensemble $\mathrm{tl}\, h'\, (b \times S^{n-1})$ ne contient pas le point $\mathrm{tl}\, h'\, (b, 0)$ lorsque $b \in V$; ainsi l'application

$$\mathrm{ab}\, h' : (V \times \mathsf{R}^n, \mathrm{pr}_1, V) \to \xi|_V$$

est non dégénérée sur les fibres. Ceci permet de lui appliquer le théorème 3.2.8, en prenant en guise de F l'espace R^n envisagé comme un $\mathrm{Top}\mathsf{R}^n$-espace [les fibrés $(V \times \mathsf{R}^n, \mathrm{pr}_1, V)$ et $\xi|_V$ sont considérés comme des F-fibrés de Steenrod — voir 3.4.5]. Le théorème entraîne que $\mathrm{ab}\, h'$ est une équivalence au sens topologique, ce qui termine la démonstration, puisque $\mathrm{ab}\, h'$ est linéaire sur les fibres.

La fibre standard $O\mathsf{R}^n$

4. Les fibrés de Steenrod à fibre standard $O\mathsf{R}^n$ sont appelés *fibrés euclidiens de dimension n.*

Puisqu'un espace à $O\mathsf{R}^n$-structure est un espace euclidien de dimension n, tout W-$O\mathsf{R}^n$-fibré est simplement un fibré dont les fibres sont des espaces euclidiens de dimension n. Il est clair également que la W-$O\mathsf{R}^n$-équivalence entre les W-$O\mathsf{R}^n$-fibrés est une équivalence orthogonale sur les fibres. Ainsi, tout fibré euclidien de dimension n est un fibré dont les fibres sont des espaces euclidiens de dimension n et qui est localement trivial au sens euclidien naturel : chaque point de la base possède un voisinage U au-dessus duquel le fibré admet une équivalence (orthogonale sur les fibres) avec le fibré $(U \times \mathsf{R}^n, \mathrm{pr}_1, U)$.

5. Un fibré ξ dont les fibres sont des espaces euclidiens de dimension n est un fibré euclidien de dimension n (i.e. est localement trivial au sens euclidien) si, et seulement si, il vérifie les conditions (i), (ii) *de 3 et la condition* (iii) : *la fonction* $\mathrm{tl}\, \xi \to \mathsf{R}$ *qui fait correspondre à chaque vecteur sa longueur est continue.*

La nécessité de ces conditions est évidente; démontrons leur suffisance. En vertu de théorème *3*, il découle de (i) et (ii) que, pour chaque point de la base $\mathrm{bs}\, \xi$, il existe un voisinage U au-dessus duquel ξ possède une trivialisation linéaire sur les fibres

$$h : (U \times \mathsf{R}^n, \mathrm{pr}_1, U) \to \xi|_U.$$

Supposons que $v_1(b), \ldots, v_n(b)$ est une base de l'espace $\mathrm{pr}\, \xi^{-1}(b)$, $b \in U$, obtenue par la procédure usuelle d'orthogonalisation de la base $\mathrm{tl}\, h\, (b, \mathrm{ort}_1), \ldots, \mathrm{tl}\, h\, (b, \mathrm{ort}_n)$. Il découle de (iii) que les vecteurs $v_i(b)$ sont des fonctions continues de b ; il est clair que l'application linéaire sur les fibres $h' : (U \times \mathsf{R}^n, \mathrm{pr}_1, U) \to \xi|_U$ définie par

la formule

$$\mathrm{tl}\, h'(b, \mathrm{ort}_i) = v_i(b) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

est une trivialisation orthogonale sur les fibres du fibré $\xi|_U$.

6. L'inclusion $O(n) \subset GL(n, \mathsf{R})$ permet de faire correspondre à chaque fibré euclidien ξ de dimension n l'unique fibré vectoriel ξ' réel de dimension n en lequel ξ se transforme par extension du groupe structural. Le théorème *5* permet d'interpréter la réduction du groupe structural qui transforme ξ' en ξ comme l'introduction d'une structure supplémentaire dans le fibré ξ' : il s'agit des distances euclidiennes dans les fibres dont la longueur est une fonction continue sur $\mathrm{tl}\, \xi'$. Cette structure supplémentaire est appelée *distance euclidienne dans* ξ'.

Les fibres standards $GL_+\mathsf{R}^n$ et $SO\mathsf{R}^n$

7. Un fibré de Steenrod à fibre standard $GL_+\mathsf{R}^n$ est appelé *fibré vectoriel réel orienté de dimension n.* Les fibrés de Steenrod à fibre standard $SO\mathsf{R}^n$ sont appelés *fibrés euclidiens orientés de dimension n.*

Puisqu'un espace à $GL_+\mathsf{R}^n$-structure est un espace vectoriel orienté de dimension n, tandis qu'un espace à $SO\mathsf{R}^n$-structure un espace euclidien orienté de dimension n, un W-$GL_+\mathsf{R}^n$-fibré est un fibré dont les fibres sont des espaces vectoriels orientés de dimension n, tandis qu'un W-$SO\mathsf{R}^n$-fibré est un fibré dont les fibres sont des espaces euclidiens orientés de dimension n. Il est également clair qu'une W-$GL_+\mathsf{R}^n$-équivalence entre les W-$GL_+\mathsf{R}^n$-fibrés est une équivalence linéaire sur les fibres qui conserve l'orientation sur les fibres, tandis qu'une W-$SO\mathsf{R}^n$-équivalence entre les W-$SO\mathsf{R}^n$-fibrés est une équivalence qui est orthogonale et conserve l'orientation sur les fibres.

Ainsi, un espace vectoriel orienté de dimension n est un fibré dont les fibres sont des espaces vectoriels orientés de dimension n et qui est localement trivial en ce sens que chaque point de la base possède un voisinage au-dessus duquel le fibré admet une trivialisation qui est linéaire et conserve l'orientation sur les fibres; un fibré euclidien orienté de dimension n est un fibré dont les fibres sont des espaces euclidiens orientés de dimension n et qui est localement trivial en ce sens que chaque point de la base possède un voisinage au-dessus duquel le fibré admet une trivialisation orthogonale conservant l'orientation sur les fibres.

8. Pour adapter le théorème *3* au cas orienté, remarquons que l'orientation dont est munie chaque fibre d'un fibré vectoriel orienté ξ de dimension n peut être envisagée comme une application de l'ensemble des n-repères non dégénérés de cette fibre dans S^0. L'ensemble de tous les n-repères non dégénérés des fibres est l'espace total du fibré associé asso $(\xi, V'(n, n))$ (il est entendu que le groupe $GL_+(n, \mathsf{R})$ opère dans $V'(n, n)$ de la manière usuelle; voir 2.3.13),

tandis que les orientations des fibres définissent une fonction qui applique cet espace total dans S^0. Appliqué au cas orienté, le théorème *3* affirme qu'un fibré ξ dont les fibres sont des espaces vectoriels réels de dimension n est un espace vectoriel réel orienté de dimension n si, et seulement si, il vérifie les conditions (i), (ii) de *3* et la condition (iv): la fonction tl asso $(\xi, V'(n, n)) \to S^0$ constituée par les orientations des fibres du fibré ξ est continue.

On modifie le théorème *5* d'une manière analogue. L'orientation que possède chaque fibre d'un fibré euclidien orienté ξ de dimension n applique l'ensemble des n-repères orthonormés de cette fibre dans S^0, et l'ensemble de tous les n-repères orthonormés de toutes les fibres constituent l'espace total du fibré associé asso $(\xi, V(n, n))$, tandis que les orientations des fibres définissent une fonction qui applique cet espace total dans S^0. Dans le cas orienté le théorème *5* s'énonce comme suit: un fibré ξ dont les fibres sont des espaces euclidiens orientés de dimension n est un fibré euclidien orienté de dimension n si, et seulement si, il vérifie les conditions (i), (ii) de *3*, la condition (iii) de *5* et la condition (v): la fonction tl asso $(\xi, V(n, n)) \to S^0$ formée des orientations des fibres du fibré ξ est continue.

9. L'inclusion $GL_+(n, \mathsf{R}) \subset GL(n, \mathsf{R})$ fait correspondre à chaque fibré vectoriel réel orienté ξ de dimension n un fibré vectoriel réel ξ' unique de dimension n en lequel ξ se transforme par extension du groupe structural. Ce qui a été dit dans *8* permet d'interpréter la réduction du groupe structural qui transforme ξ' en ξ comme la donnée d'une orientation de chaque fibre de ξ', ces orientations formant une application continue de l'espace total du fibré principal asso $(\xi', V'(n, n) = GL(n, \mathsf{R}))$ dans S^0. Cette structure supplémentaire est appelée *orientation du fibré* ξ.

D'une manière analogue, l'inclusion $SO(n) \subset O(n)$ fait correspondre à chaque fibré euclidien orienté ξ de dimension n un fibré euclidien unique ξ' de dimension n en lequel ξ se transforme par extension du groupe structural; la réduction du groupe structural qui transforme ξ' en ξ peut être interprétée comme précédemment, les orientations introduites formant une application continue de l'espace total du fibré principal asso $(\xi', V(n, n) = O(n))$ dans S^0.

Les fibrés réels vectoriels et les fibrés euclidiens qui possèdent une orientation sont dits *orientés*. Puisqu'on peut toujours changer une orientation en orientation *opposée* en multipliant par —1, tout fibré orienté possède au moins deux orientations.

Les fibres standards $GL\mathsf{C}^n$ et $U\mathsf{C}^n$

10. Un fibré de Steenrod à fibre standard $GL\mathsf{C}^n$ est appelé *fibré vectoriel complexe de dimension n.* Les fibrés de Steenrod à fibre standard $U\mathsf{C}^n$ sont appelés *fibrés hermitiens de dimension n.*

On peut transposer mot à mot au cas des fibrés vectoriels complexes tout ce qui a été dit dans *2* et *3* sur les fibrés vectoriels réels, et au fibré hermitien tout ce qui a été dit dans *4*, *5* et *6* sur les fibrés euclidiens. En particulier, tout W-$GL\mathbf{C}^n$-fibré est un fibré dont les fibres sont des espaces vectoriels complexes de dimension n, un W-$U\mathbf{C}^n$-fibré est un fibré dont les fibres sont des espaces hermitiens de dimension n; une W-$GL\mathbf{C}^n$-équivalence entre les W-$GL\mathbf{C}^n$-fibrés est une équivalence linéaire sur les fibres; une W-$U\mathbf{C}^n$-équivalence entre les W-$U\mathbf{C}^n$-fibrés est une équivalence unitaire sur les fibres; une W-$GL\mathbf{C}^n$-trivialité locale d'un W-$GL\mathbf{C}^n$-fibré est équivalente à la trivialité locale topologique à laquelle on a ajouté la continuité des opérations vectorielles; une W-$U\mathbf{C}^n$-trivialité locale d'un W-$U\mathbf{C}^n$-fibré est équivalente à la trivialité locale topologique à laquelle on a ajouté la continuité des opérations vectorielles et de la longueur; la réduction du groupe structural qui transforme le fibré vectoriel complexe ξ' en le fibré hermitien ξ peut être interprétée comme l'introduction dans ξ' d'une distance hermitienne, i.e. d'une distance hermitienne dans les fibres telle que la longueur soit continue sur tl ξ'.

11. A chaque fibré vectoriel complexe ξ de dimension n correspond le fibré vectoriel complexe conj ξ de dimension n; on l'obtient de ξ en remplaçant chaque homéomorphisme distingué α par la composée $\alpha \circ$conj, où conj est la conjugaison usuelle dans $\mathbf{C}^n$. Le fibré conj ξ est dit *conjugué à* ξ.

Cette construction est également valable pour les fibrés hermitiens qui restent hermitiens après transformation. Ainsi, à chaque fibré hermitien ξ de dimension n correspond le fibré conjugué hermitien conj ξ.

12. L'extension du groupe structural définie par l'inclusion $GL\ (n, \mathbf{C}) \subset GL\ (2n, \mathbf{R})$ transforme un fibré vectoriel complexe de dimension n en un fibré vectoriel réel de dimension $2n$. L'extension du groupe structural définie par l'inclusion $U\ (n) \subset O\ (2n)$ transforme tout fibré hermitien de dimension n en un fibré euclidien de dimension $2n$. Dans les deux cas, l'extension du groupe structural est appelée *décomplexification*. Son résultat dans le cas d'un fibré ξ est désigné par $\mathbf{R}\xi$.

Rappelons que la structure supplémentaire qui transforme un espace vectoriel réel de dimension $2n$ en un espace vectoriel complexe de dimension n peut être décrite comme une transformation *linéaire* de carré — id (« multiplication par i »), tandis que la structure supplémentaire qui fait d'un espace euclidien de dimension $2n$ un espace hermitien de dimension n comme une transformation *orthogonale* de carré — id. Par conséquent, la structure supplémentaire par laquelle un fibré vectoriel ξ complexe de dimension n diffère du fibré $\mathbf{R}\xi$ peut être décrite comme une $GL\mathbf{R}^{2n}$-équivalence $I : \mathbf{R}\xi \to \mathbf{R}\xi$ telle que $I^2 = -\mathrm{id}\ (\mathbf{R}\xi)$ (le signe « moins » doit être appliqué au niveau

des fibres) ; de même, dans le cas d'un fibré hermitien ξ de dimension n et de $\mathsf{R}\xi$ c'est une $O\mathsf{R}^{2n}$-équivalence $I : \mathsf{R}\xi \to \mathsf{R}\xi$ telle que $I^2 = -\mathrm{id}\,(\mathsf{R}\xi)$; la restriction du groupe structural qui transforme $\mathsf{R}\xi$ en ξ est le choix d'une telle équivalence pour le fibré $\mathsf{R}\xi$.

Il est clair que $\mathsf{R}\,(\mathrm{conj}\,\xi) = \mathsf{R}\xi$ pour chaque fibré vectoriel complexe ou hermitien ξ et que le passage de ξ à conj ξ peut être décrit dans les termes ci-dessus comme le passage de I à $-I$.

13. Puisque le groupe $GL\,(n, \mathsf{C})$ est contenu non seulement dans $GL\,(2n, \mathsf{R})$ mais également dans $GL_+\,(2n, \mathsf{R})$ (resp. le groupe $U\,(n)$ est contenu dans $O\,(2n)$ et dans $SO\,(2n)$), le passage de la structure complexe (resp. hermitienne) à la structure réelle dans un fibré de dimension n peut être effectué en deux étapes : on prend d'abord l'extension de $GL\,(n, \mathsf{C})$ à $GL_+\,(2n, \mathsf{R})$ (resp. de $U\,(n)$ à $SO\,(2n)$) et ensuite celle de $GL_+\,(2n, \mathsf{R})$ à $GL\,(2n, \mathsf{R})$ (resp. celle de $SO\,(2n)$ à $O\,(2n)$). Ainsi, dans le cas vectoriel complexe, de même que dans le cas hermitien, le fibré ξ munit $\mathsf{R}\xi$ d'une orientation canonique.

Applications

14. L'application d'un fibré vectoriel réel ou complexe dans un autre est dit *linéaire* si elle est linéaire sur les fibres. Les applications linéaires qui sont non dégénérées sur les fibres sont appelées *monomorphismes linéaires.* Les applications linéaires sur les fibres et isométriques sur les fibres d'un fibré euclidien dans un autre sont appelées *monomorphismes orthogonaux.* Les applications linéaires sur les fibres et isométriques sur les fibres d'un fibré hermitien dans un autre sont appelées *monomorphismes unitaires.*

Remarquons qu'un monomorphisme linéaire d'un fibré vectoriel de dimension n dans un fibré vectoriel de même dimension n est précisément une $GL\mathsf{R}^n$-application dans le cas réel et une $GL\mathsf{C}^n$-application dans le cas complexe. D'une manière analogue, un monomorphisme orthogonal d'un espace euclidien de dimension n dans un autre est précisément une $O\mathsf{R}^n$-application, tandis qu'un monomorphisme unitaire d'un fibré hermitien de dimension n dans un autre est précisément une $U\mathsf{C}^n$-application.

Champs de vecteurs

15. Les sections des fibrés vectoriels sont appelées *champs de vecteurs.* Cette terminologie s'applique aux fibrés vectoriels réels aussi bien que complexes, ainsi qu'aux fibrés euclidiens et hermitiens et aux fibrés orientés des deux types.

Une suite de k champs de vecteurs est appelée *champ de k-repères.* Lorsqu'un repère du champ est dégénéré, on dit que c'est une *singularité* de ce champ. Un champ de k-repères sans singularités dans un fibré vectoriel de dimension n peut être interprété comme une

section du fibré associé à fibre $\mathsf{R}V'(n, k)$ ou $\mathsf{C}V'(n, k)$. Un champ de k-repères orthonormé dans un fibré hermitien ou euclidien de dimension n peut être interprété comme une section du fibré associé à fibre $\mathsf{R}V(n, k)$ et $\mathsf{C}V(n, k)$ (dans les deux cas il s'agit de l'action usuelle du groupe structural).

Chaque fibré vectoriel possède un champ de vecteurs *nul* qui fait correspondre à chaque point de la base le zéro de la fibre correspondante. Une section qui ne s'annule pas n'existe pas nécessairement pour tout fibré vectoriel. L'existence pour un fibré vectoriel réel (resp. complexe) de dimension n d'un champ de n-repères sans singularités est équivalente à la $GL\mathsf{R}^n$-trivialité (resp. la $GL\mathsf{C}^n$-trivialité) de ce fibré; tout fibré de ce type est sa $GL\mathsf{R}^n$-trivialisation (resp. sa $GL\mathsf{C}^n$-trivialisation). D'une manière analogue, dans le cas d'un fibré euclidien (resp. hermitien) de dimension n, un champ de n-repères constitué de repères orthonormés est une $O\mathsf{R}^n$-trivialisation (resp. une $U\mathsf{C}^n$-trivialisation); dans le cas d'un fibré vectoriel réel orienté de dimension n (resp. d'un fibré euclidien orienté de dimension n), le champ de n-repères, constitué de repères non dégénérés (resp. orthonormés) sur lesquels l'orientation des fibres est positive, est une $GL_+\mathsf{R}^n$-trivialisation (resp. $SO\mathsf{R}^n$-trivialisation).

2. Constructions

1. Dans ce sous-paragraphe nous envisageons des constructions qui seront appliquées par la suite aux fibrés vectoriels, euclidiens et hermitiens et qui ne sont pas comprises dans la théorie générale des fibrés de Steenrod exposée au § 3.

Sous-fibrés

2. Soit ξ un fibré vectoriel réel de dimension n; soit g une section du fibré asso $(\xi, \mathsf{R}G(n, k))$ faiblement associé à ξ (il est entendu que $GL(n, \mathsf{R})$ opère dans $\mathsf{R}G(n, k)$ de la manière usuelle), i.e. une fonction continue qui choisit dans chaque fibre du fibré ξ un sous-espace de dimension k de cette fibre. Désignons par $\xi|_g$ le fibré $(T, \mathrm{pr}\,\xi|_T, \mathrm{bs}\,\xi)$, où T est la réunion des sous-espaces choisis. Puisque les fibres de ce fibré sont les sous-espaces choisis, c'est un $GL\mathsf{R}^k$-fibré, il est clair qu'il est localement $GL\mathsf{R}^k$-trivial. (Si ξ est le fibré standard trivial $(B \times \mathsf{R}^n, \mathrm{pr}_1, B)$ et pour le point $b_0 \in B$ on a choisi un homéomorphisme linéaire $l: \mathsf{R}^k \to g(b_0)$, alors, pour la restriction du fibré $\xi|_g$ à un voisinage suffisamment petit U du point b_0, il existe même une $GL\mathsf{R}^k$-trivialisation standard h: $(U \times \mathsf{R}^k, \mathrm{pr}_1, U) \to (\xi|_g)|_U$; elle est définie par la formule tl $h(b, v) = \mathrm{pr}_b(b, l(v))$, où pr_b est la projection orthogonale de la fibre $b \times \mathsf{R}^n$ sur son sous-espace $g(b)$.) Ainsi $\xi|_g$ est un fibré

vectoriel réel de dimension k. On l'appelle *sous-fibré du fibré* ξ *associé à* g.

3. D'une manière analogue on définit les sous-fibrés des fibrés euclidiens, hermitiens et vectoriels complexes. Dans le cas euclidien, $\mathsf{R}G(n, k)$ est un $O(n)$-espace, g est toujours une section du fibré asso $(\xi, \mathsf{R}G(n, k))$ et le sous-fibré $\xi|_g$ est un fibré euclidien (sa $O\mathsf{R}^k$-trivialisation locale découle de sa trivialité localement linéaire sur les fibres, établie dans *2*, et de la continuité de la longueur; voir 1.5). Dans le cas vectoriel complexe, tout ce qui a été dit dans *2* se répète mot à mot à condition de remplacer R par C (en particulier, le $GL(n, \mathsf{R})$-espace $\mathsf{R}G(n, k)$ est remplacé par le $GL(n, \mathsf{C})$-espace $\mathsf{C}G(n, k)$) et le sous-fibré $\xi|_g$ est un fibré vectoriel complexe. Dans le cas hermitien, $\mathsf{C}G(n, k)$ est un $U(n)$-espace et le sous-fibré $\xi|_g$ se trouve être un fibré hermitien (sa $U\mathsf{C}^k$-trivialité locale découle de sa trivialité locale linéaire sur les fibres et de la continuité de la longueur; voir 1.10).

4. Il est clair que l'inclusion $\xi|_g \to \xi$ est un monomorphisme linéaire dans les deux cas vectoriels, un monomorphisme orthogonal dans le cas euclidien et un monomorphisme unitaire dans le cas hermitien. Par contre, à chaque monomorphisme linéaire, orthogonal ou unitaire $f: \xi_1 \to \xi$ vérifiant $\mathrm{bs}\,\xi_1 = \mathrm{bs}\,\xi$ et $\mathrm{bs}\,f = \mathrm{id}$ correspond le sous-fibré du fibré ξ associé à la section $b \mapsto \mathrm{tl}\,f\,(\mathrm{pr}\,\xi_1^{-1}(b))$ du fibré asso $(\xi, \mathsf{R}G(n, \dim \xi_1))$ ou asso $(\xi, \mathsf{C}G(n, \dim \xi_1))$. Ce sous-fibré est appelé *image* du monomorphisme f; on le note $\mathrm{Im}\,f$. Il découle du théorème 3.2.8 que $\mathrm{ab}\,f: \xi_1 \to \mathrm{Im}\,f$ est une $GL\,\mathsf{R}^n$-équivalence dans le cas vectoriel réel, une $GL\mathsf{C}^n$-équivalence dans le cas vectoriel complexe, une $O\mathsf{R}^n$-équivalence dans le cas euclidien et une $U\mathsf{C}^n$-équivalence dans le cas hermitien.

Remarquons que pour l'application de correction $\mathrm{corr}\,f: \xi_1 \to (\mathrm{bs}\,f)^!\xi$ qui est un monomorphisme linéaire, orthogonal ou unitaire en même temps que f (voir 3.2.4), la condition $\mathrm{bs}\,\mathrm{corr}\,f = \mathrm{id}$ est toujours satisfaite. Ainsi $\mathrm{Im}\,\mathrm{corr}\,f$ existe pour chaque monomorphisme linéaire orthogonal ou unitaire f.

Complémentaire orthogonal et fibré quotient

5. Si ξ est un fibré euclidien ou hermitien de dimension n, alors à chaque section g du fibré asso $(\xi, \mathsf{R}G(n, k))$ [asso $(\xi, \mathsf{C}G(n, k))$] correspond une *section orthogonale* $g^\perp$ du fibré asso $(\xi, \mathsf{R}G(n, n-k))$ [asso $(\xi, \mathsf{C}G(n, n-k))$] qui fait correspondre au point $b \in \mathrm{bs}\,\xi$ le complémentaire orthogonal à $g(b)$ dans la fibre $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)$. Par conséquent, à chaque sous-fibré $\eta = \xi|_g$ de dimension k d'un fibré euclidien ou hermitien ξ de dimension n, on peut faire correspondre le sous-fibré $\xi|_{g^\perp}$ de dimension $n-k$. On l'appelle *complémentaire orthogonal du sous-fibré* η; il est noté $\eta^\perp$.

6. Un sous-fibré d'un fibré vectoriel ne possède pas de complémentaire orthogonal canonique, mais il peut servir à construire un *fibré quotient.* Soit η un sous-fibré de dimension k d'un fibré vectoriel réel ou complexe ξ de dimension n. Considérons le fibré (T, fact pr ξ, bs ξ), où T est l'espace quotient de l'espace tl ξ par sa partition en ensembles de la forme $x + \mathrm{pr}\,\eta^{-1}(b)$, $x \in \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)$. Les fibres de ce fibré sont les espaces quotients $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)/\mathrm{pr}\,\eta^{-1}(b)$ ce qui en fait un $GL\mathbf{R}^{n-k}$- ou un $GL\mathbf{C}^{n-k}$-fibré. On l'appelle *fibré quotient du fibré* ξ *par* η et on le note ξ/η.

De même que la précédente, cette construction est appliquable dans le cas euclidien et hermitien et donne dans ces cas le même résultat. Plus exactement, dans le cas euclidien, l'espace quotient $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)/\mathrm{pr}\,\eta^{-1}(b)$ est un espace euclidien de dimension $(n-k)$, de sorte que ξ/η est un $O\mathbf{R}^{n-k}$-fibré tandis que l'application h: $\eta^{\perp} \to \xi/\eta$ définie par la formule $\mathrm{tl}\,h(x) = \mathrm{pr}\,(x)$, où $\mathrm{pr} = [\mathrm{pr}: \mathrm{tl}\,\xi \to \mathrm{tl}\,(\xi/\eta)]$, est une $O\mathbf{R}^{n-k}$-équivalence; dans le cas hermitien l'espace quotient $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)/\mathrm{pr}\,\eta^{-1}(b)$ est un espace hermitien de dimension $(n-k)$, de sorte que ξ/η est un $U\mathbf{C}^{n-k}$-fibré tandis que h est une $U\mathbf{C}^{n-k}$-équivalence. Ainsi le fibré quotient d'un fibré euclidien (resp. hermitien) ξ par son sous-fibré η est un fibré euclidien (resp. hermitien) de dimension $\dim \xi - \dim \eta$.

On en déduit facilement qu'un fibré quotient d'un fibré vectoriel ξ par son sous-fibré η est un fibré vectoriel de dimension $\dim \xi - \dim \eta$. En effet, il ne faut démontrer que la trivialité locale linéaire sur les fibres du fibré ξ/η avec ξ trivial et standard, mais elle découle du précédent, puisque ξ peut être envisagé comme un fibré euclidien réel ou un fibré hermitien complexe.

7. Puisque dans le cas vectoriel réel et euclidien l'orientation de chacun des trois espaces

$$\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b),\ \mathrm{pr}\,\eta^{-1}(b),\ \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)/\mathrm{pr}\,\eta^{-1}(b)$$

se détermine par les orientations des deux autres (voir **3.1.3.10**), l'orientabilité de deux des trois fibrés ξ, η, ξ/η implique celle du troisième et leurs orientations définissent canoniquement celle du troisième.

Sommes de fibrés

8. Nous dirons qu'un fibré vectoriel ξ *se décompose en somme* de sous-fibrés ξ_1, ξ_2 si chacune de ses fibres $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)$ se décompose en une somme directe de ses sous-espaces $\mathrm{pr}\,\xi_1^{-1}(b)$, $\mathrm{pr}\,\xi_2^{-1}(b)$. Nous dirons qu'un fibré euclidien ou hermitien ξ se décompose en une somme de ses sous-fibrés ξ_1, ξ_2 si chacune de ses fibres $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)$ se décompose en une somme orthogonale de ses sous-espaces $\mathrm{pr}\,\xi_1^{-1}(b)$, $\mathrm{pr}\,\xi_2^{-1}(b)$.

Dans le cas euclidien et hermitien, chaque sous-fibré ξ_1 du fibré ξ décompose ξ en une somme de sous-fibrés ξ_1 et $\xi_1^{\perp}$. Nous montre-

rons dans 4.2 qu'il existe, pour chaque fibré vectoriel ξ à base cellulaire et chacun de ses sous-fibrés, un sous-fibré ξ_2 tel que ξ se décompose en une somme des fibrés ξ_1 et ξ_2.

Si le fibré vectoriel ξ se décompose en une somme de ses sous-fibrés ξ_1, ξ_2, alors l'espace quotient ξ/ξ_1 est canoniquement $GL\mathsf{R}^{\dim \xi_2}$- où $GL\mathsf{C}^{\dim \xi_2}$-équivalent à ξ_2. L'équivalence canonique $h: \xi_2 \to \xi/\xi_1$ se détermine par la formule $\mathrm{tl}\, h(x) = \mathrm{pr}\,(x)$, où $\mathrm{pr} = [\mathrm{pr}: \mathrm{tl}\, \xi \to \mathrm{tl}\, (\xi/\xi_1)]$. Une même équivalence existe dans le cas euclidien et hermitien si l'on remplace GL par O ou U (en fait, elle a déjà été établie dans *6*).

9. La construction suivante permet de formuler la réciproque de la définition précédente et, en particulier, de retrouver un fibré donné à partir de deux fibrés dont la somme constitue le fibré donné.

Si ξ_1, ξ_2 sont des fibrés vectoriels réels de dimensions n_1, n_2 à base commune, alors $\xi_1 \times \xi_2$ est un fibré de Steenrod à base $\mathrm{bs}\, \xi_1 \times \mathrm{bs}\, \xi_1$ et à groupe structural $GL\,(n_1, \mathsf{R}) \times GL\,(n_2, \mathsf{R})$, le même groupe structural est propre au fibré $\mathrm{diag}^!\,(\xi_1 \times \xi_2)$ à base $\mathrm{bs}\, \xi_1$ induit par le fibré $\xi_1 \times \xi_2$ au moyen de l'application $\mathrm{diag}: \mathrm{bs}\, \xi_1 \to \mathrm{bs}\, \xi_1 \times \mathrm{bs}\, \xi_1$. Une extension de ce groupe à $GL\,(n_1 + n_2, \mathsf{R})$ transforme $\mathrm{diag}^!\,(\xi_1 \times \xi_2)$ en un fibré réel vectoriel de dimension $n_1 + n_2$, que l'on appelle *somme* des fibrés ξ_1, ξ_2 et désigne par $\xi_1 \oplus \xi_2$. On désigne de la même manière la somme de deux fibrés à base commune dans les cas euclidien, vectoriel complexe et hermitien (dans le cas euclidien le groupe $O\,(n_1) \times O\,(n_2)$ possède une extension à $O\,(n_1 + n_2)$, dans le cas complexe vectoriel le groupe $GL\,(n_1, \mathsf{C}) \times GL\,(n_2, \mathsf{C})$ s'étend à $GL\,(n_1 + n_2, \mathsf{C})$, dans le cas hermitien le groupe $U\,(n_1) \times U\,(n_2)$ s'étend à $U\,(n_1 \times n_2)$; la somme de fibrés euclidiens est un fibré euclidien, la somme de fibrés vectoriels complexes est un fibré vectoriel complexe, la somme d'un fibré hermitien est un fibré hermitien). Dans tous les cas $\mathrm{bs}\,(\xi_1 \oplus \xi_2) = \mathrm{bs}\, \xi_1$ $(= \mathrm{bs}\, \xi_2)$ et $\mathrm{pr}\,(\xi_1 \oplus \xi_2)^{-1}\,(b) = \mathrm{pr}\, \xi_1^{-1}\,(b) \oplus \mathrm{pr}\, \xi_2^{-1}\,(b)$, en particulier, dans les cas euclidien et hermitien cette dernière somme est orthogonale. Ces égalités définissent des monomorphismes, identiques sur la base, linéaires, orthogonaux ou unitaires $\xi_1 \to \xi_1 \oplus \xi_2$, $\xi_2 \to \xi_1 \oplus \xi_2$ qui identifient les fibrés ξ_1, ξ_2 avec les sous-fibrés du fibré $\xi_1 \oplus \xi_2$ et qui décomposent $\xi_1 \oplus \xi_2$ en une somme de ces sous-fibrés.

Remarquons que ces identifications permettent de construire les fibrés quotients $(\xi_1 \oplus \xi_2)/\xi_1$, $(\xi_1 \oplus \xi_2)/\xi_2$, tandis que les équivalences canoniques indiquées dans *8* permettent d'écrire $(\xi_1 \oplus \xi_2)/\xi_1 = \xi_2$, $(\xi_1 \oplus \xi_2)/\xi_2 = \xi_1$. En particulier, dans les cas vectoriel réel et euclidien, l'orientabilité de deux des fibrés ξ_1, ξ_2, $\xi_1 \oplus \xi_2$ implique celle du troisième et les orientations de deux d'entre eux déterminent canoniquement l'orientation du troisième.

Remarquons aussi que le fibré $\xi \oplus \xi$ est orientable et possède une orientation canonique quel que soit ξ, fibré euclidien ou réel

vectoriel. Cette orientation canonique se définit dans chaque fibre par les orientations des termes de la somme, arbitraires mais les mêmes pour chaque fibre.

10. La somme d'un fibré vectoriel réel ou euclidien ξ et d'un $GL\mathsf{R}^1$- ou $O\mathsf{R}^1$-fibré (*bs* $\xi \times \mathsf{R}$, pr_1, bs ξ) standard trivial de dimension un est appelée *suspension sur* ξ; on la note su ξ. On conserve les mêmes terminologie et notation pour la somme d'un fibré ξ vectoriel complexe ou hermitien et d'un $GL\mathsf{C}^1$- ou $U\mathsf{C}^1$-fibré trivial standard (bs $\xi \times \mathsf{C}$, pr_1, bs ξ).

Les fibrés vectoriels réels ξ_1, ξ_2 à base commune pour lesquels il existe des k_1, k_2 tels que $\dim \xi_1 + k_1 = \dim \xi_2 + k_2$ et les fibrés su ${}^{k_1}\xi_1$, su ${}^{k_2}\xi_2$ sont $GL\mathsf{R}^{\dim \xi_1 + k_1}$-équivalents, sont appelés *équivalents au sens stable.* De la même manière (avec $O\mathsf{R}^{\dim \xi_1 + k_1}$, $GL\mathsf{C}^{\dim \xi_1 + k_1}$ et $U\mathsf{C}^{\dim \xi_1 + k_1}$ à la place de $GL\mathsf{R}^{\dim \xi_1 + k_1}$) on définit l'équivalence stable dans les cas hermitien, euclidien et vectoriel complexe. Un fibré équivalent au sens stable à un fibré trivial standard est dit *trivial au sens stable.*

Remarquons que l'orientabilité d'un des fibrés ξ, su ξ dans les cas réel et euclidien implique celle de l'autre et l'orientation de l'un d'eux détermine canoniquement l'orientation de l'autre; voir *9.*

Complexification

11. Envisageons, pour un fibré vectoriel réel ξ de dimension n, l'application $I : \xi \oplus \xi \to \xi \oplus \xi$ définie par la formule tl ξ $(x, y) = (-y, x)$ (x, y sont des points d'une même fibre du fibré ξ). Il est clair que I est une $GL\mathsf{R}^{2n}$-équivalence et que $I^2 = -\mathrm{id}$. Ainsi I fait de $\xi \oplus \xi$ un fibré vectoriel complexe de dimension n (voir 1.12) qu'on appelle *enveloppe complexe du fibré* ξ et que l'on note $\mathsf{C}\xi$.

Si ξ est un fibré euclidien de dimension n, alors la même construction transforme $\xi \oplus \xi$ en un fibré hermitien de dimension n. On l'appelle également enveloppe complexe du fibré ξ et on le désigne toujours par $\mathsf{C}\xi$.

Dans les deux cas le passage de ξ à $\mathsf{C}\xi$ est appelé *complexification.* On a évidemment dans les deux cas $\mathsf{RC}\xi = \xi \oplus \xi$.

12. Chacun des fibrés $\mathsf{RC}\xi$, $\xi \oplus \xi$ qui figure dans la dernière égalité admet une orientation canonique; voir 1.13 et *9.* Il s'avère que ces orientations coïncident lorsque $n \equiv 0, 1 \bmod 4$ et sont opposées lorsque $n \equiv 2, 3 \bmod 4$.

Pour la démonstration, fixons dans une fibre arbitraire $\mathrm{pr}\, \xi^{-1}(b)$ du fibré ξ une certaine base (une base orthonormée) $v_1, \ldots, v_n$. L'orientation canonique de la fibre $\mathrm{pr}\, \xi^{-1}(b) \times \mathrm{pr}\, \xi^{-1}(b)$ du fibré $\mathsf{RC}\xi$ est égale à $+1$ sur la base $(v_1, 0), (0, v_1), \ldots, (v_n, 0), (0, v_n)$ de cette fibre, l'orientation canonique de la fibre $\mathrm{pr}\, \xi^{-1}(b) \times \mathrm{pr}\, \xi^{-1}(b)$ du fibré $\xi \oplus \xi$ est égale à $+1$ sur la base $(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, v_1), \ldots, (0, v_n)$ de cette fibre et il reste à remar-

quer que le passage d'une base à l'autre s'effectue par $n(n-1)/2$ transpositions de vecteurs voisins et que ce nombre est pair lorsque $n \equiv 0, 1 \bmod 4$ et impair lorsque $n \equiv 2, 3 \bmod 4$.

13. L'application conj : $\mathbf{C}\xi \to \operatorname{conj} \mathbf{C}\xi$ *définie par la formule* $\operatorname{tl} \operatorname{conj}(x, y) = (x, -y)$ *est une* $GL\mathbf{C}^n$*-équivalence pour tout fibré vectoriel réel* ξ *de dimension* n *et une* $U\mathbf{C}^n$*-équivalence pour tout fibré euclidien* ξ *de dimension* n.

En effet, les équivalences $I_1, I_2 : \xi \oplus \xi \to \xi \oplus \xi$ qui transforment $\xi \oplus \xi$ en $\mathbf{C}\xi$ ou en $\operatorname{conj} \mathbf{C}\xi$ se déterminent par les formules $\operatorname{tl} I_1(x, y) = (-y, x)$, $I_2 = -I_1$, de sorte que $I_2 \circ \operatorname{conj} = \operatorname{conj} \circ I_1$.

14. L'application $K : \xi \oplus \operatorname{conj} \xi \to \mathbf{C}\mathbf{R}\xi$ *définie par la formule*

$$\operatorname{tl} K(x, y) = \left(\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(\operatorname{tl} I(y) - \operatorname{tl} I(x))\right),$$

où I *est une équivalence qui transforme* $\mathbf{R}\xi$ *en* ξ, *est une* $GL\mathbf{C}^n$*-équivalence pour tout fibré vectoriel complexe* ξ *de dimension* n *et une* $U\mathbf{C}^n$*-équivalence pour tout fibré hermitien* ξ *de dimension* n.

En effet, les équivalences $I_1, I_2 : \mathbf{R}\xi \oplus \mathbf{R}\xi \to \mathbf{R}\xi \oplus \mathbf{R}\xi$ qui transforment $\mathbf{R}\xi \oplus \mathbf{R}\xi$ en $\xi \oplus \operatorname{conj} \xi$ et $\mathbf{C}\mathbf{R}\xi$ sont définies par les formules

$$\operatorname{tl} I_1(x, y) = (\operatorname{tl} I(x), -\operatorname{tl} I(y)), \qquad \operatorname{tl} I_2(x, y) = (-y, x),$$

de sorte que $I_2 \circ K = K \circ I_1$.

3. Fibrés vectoriels universels classiques

1. L'intérêt de la construction effectuée au p. 4.3 découle du fait qu'elle établit l'existence d'un G-fibré universel dans le cas d'un groupe topologique G tout à fait arbitraire. Pour les groupes

$$GL(n, \mathbf{R}),\ GL_+(n, \mathbf{R}),\ O(n),\ SO(n),\ GL(n, \mathbf{C}),\ U(n),$$

il existe des constructions classiques plus commodes qui seront exposées dans le présent sous-paragraphe.

Espaces de Grassmann

2. Posons

$$G(\infty, n) = \lim (G(m, n), \text{ in} : G(m, n) \to G(m + 1, n)),$$
$$G_+(\infty, n) = \lim (G_+(m, n), \text{ in} : G_+(m, n) \to G_+(m + 1, n)),$$
$$\mathbf{C}G(\infty, n) = \lim (\mathbf{C}G(m, n), \text{ in} : \mathbf{C}G(m, n) \to \mathbf{C}G(m + 1, n)).$$

$G(\infty, n)$ est constitué de tous les plans de dimension n de l'espace $\mathbf{R}^\infty$ qui passent par 0 ; on l'appelle *espace de Grassmann n-ième (réel)* ; $G_+(\infty, n)$ est constitué de tous les plans orientés de dimension n de l'espace $\mathbf{R}^\infty$ qui passent par 0 ; on l'appelle *espace de Grassmann*

n-ième supérieur; $\mathbf{C}G(\infty, n)$ se compose de tous les plans de dimension n de l'espace $\mathbf{C}^\infty$ qui passent par 0; on l'appelle *espace de Grassmann n-ième complexe.*

Il est clair que les applications canoniques

$$G_+(m, n) \to G(m, n), \quad \mathbf{C}G(m, n) \to G(2m, 2n),$$
$$\mathbf{C}G(m, n) \to G_+(2m, 2n), \quad G(m, n) \to G(m+q, n+q),$$
$$G_+(m, n) \to G_+(m+q, n+q), \quad \mathbf{C}G(m, n) \to \mathbf{C}G(m+q, n+q)$$

(voir 3.2.2.3 et 3.2.2.7) permettent de construire pour chaque n les applications

$$G_+(\infty, n) \to G(\infty, n), \quad \mathbf{C}G(\infty, n) \to G(\infty, 2n),$$
$$\mathbf{C}G(\infty, n) \to G_+(\infty, 2n), \quad G(\infty, n) \to G(\infty, n+q),$$
$$G_+(\infty, n) \to G_+(\infty, n+q), \quad \mathbf{C}G(\infty, n) \to \mathbf{C}G(\infty, n+q)$$

dont la première (de même que l'application canonique $G_+(m, n) \to G(m, n)$ pour $m < \infty$) est la projection d'un revêtement à deux feuillets; la seconde est la composée de la première et de la troisième application; en outre, toutes les applications, sauf la première, sont des plongements.

3. Les espaces de Grassmann possèdent des partitions cellulaires naturelles que nous allons maintenant décrire.

Commençons par $G(\infty, n)$. Désignons par Ω_n l'ensemble de toutes les suites entières $\omega = \{\omega(1), \ldots, \omega(n)\}$ pour $0 \leqslant \omega(1) \leqslant \ldots \leqslant \omega(n)$ et convenons d'ajouter à chaque telle suite $\omega \in \Omega_n$ le terme $\omega(0) = 0$. Désignons ensuite par $e(\omega)$ la partie de l'espace $G(\infty, n)$ constituée des plans (de dimension n et passant par 0) de l'espace $\mathbf{R}^\infty$ qui coupent chacun des $\mathbf{R}^m$ suivant un sous-espace dont la dimension est égale au plus grand des deux nombres s et $\omega(s) + s \leqslant m$. Nous montrerons que les ensembles $e(\omega)$ constituent une partition cellulaire de l'espace $G(\infty, n)$ pour $\dim e(\omega) = d(\omega)$, où $d(\omega) = \omega(1) + \ldots + \omega(n)$.

Pour la démonstration, il faut construire des applications caractéristiques $\mathrm{cha}_{e(\omega)} : D^{d(\omega)} \to G(\infty, n)$. Fixons ω et désignons par $r(u, v)$, où u, v sont des points de la sphère $S^{\omega(n)+n-1}$ vérifiant $u + v \neq 0$, une transformation appartenant à $SO(\omega(n) + n)$ qui applique u dans v et laisse sur place les vecteurs de l'espace $\mathbf{R}^{\omega(n)+n}$ qui sont orthogonaux à u et à v. Désignons ensuite par H_i la demi-sphère de dimension $\omega(i)$ constituée des points $(x_1, \ldots, x_{\omega(i)+i}) \in S^{\omega(i)+i-1}$ pour lesquels $x_{\omega(j)+j} = 0$ pour $j = 1, \ldots, i+1$, tandis que $x_{\omega(i)+i} \geqslant 0$ et considérons l'application $\varphi : H_1 \times \ldots \times H_n \to G(\infty, n)$ qui fait correspondre à la suite $(u_1, \ldots, u_n)$

le plan défini par le n-repère

$$u_1,\ [r\,(\mathrm{ort}_{\omega(1)+1},\ u_1)]\,(u_2),\ \ldots$$
$$\ldots,\ [r\,(\mathrm{ort}_{\omega(1)+1},\ u_1)\circ\ldots\circ r\,(\mathrm{ort}_{\omega(n-1)+(n-1)},\ u_{n-1})]\,(u_n) \qquad (1)$$

(qui est évidemment orthonormé). Il est clair que cette application est continue et applique $\mathrm{int}\,(H_1\times\ldots\times H_n)$ dans $e\,(\omega)$ et $\partial\,(H_1\times\ldots\times H_n)$ dans la réunion des ensembles $e\,(\omega')$ tels que $d\,(\omega')<d\,(\omega)$. En outre, son abréviation $\mathrm{ab}\,\varphi$: $\mathrm{int}\,(H_1\times\ldots\times H_n)\to e\,(\omega)$ est un homéomorphisme: l'application inverse fait correspondre au plan $\gamma\in e\,(\omega)$ la suite

$$(u_1=v_1,\ u_2=[r\,(\mathrm{ort}_{\omega(1)+1},\ u_1)]^{-1}\,(v_2),\ \ldots$$
$$\ldots,\ u_n=[r\,(\mathrm{ort}_{\omega(1)+1},\ u_1)\circ\ldots\circ r\,(\mathrm{ort}_{\omega(n-1)+(n-1)},\ u_{n-1})]^{-1}\,(v_n)),$$

où $v_1,\ \ldots,\ v_n$ sont des vecteurs qui forment une base orthogonale du plan γ et sont choisis de manière que v_i soit situé dans la demi-sphère de $S^{\omega(i)+i-1}$ définie par l'inégalité $x_{\omega(i)+i}>0$ (ces conditions les déterminent d'une manière unique). Par conséquent, en guise de $\mathrm{cha}_{e(\omega)}$ on peut prendre la composée des applications

$$D^{d(\omega)}\to D^{\omega(1)}\times\ldots\times D^{\omega(n)}\to H_1\times\ldots\times H_n\xrightarrow{\varphi}G\,(\infty,\ n),$$

où la première flèche désigne l'homéomorphisme canonique construit dans 1.2.6.9, la deuxième le produit des homéomorphismes $D^{\omega(i)}\to H_i$ définis par la formule

$$(x_1,\ \ldots,\ x_{\omega(i)})\mapsto\Big(x_1,\ \ldots,\ x_{\omega(1)},\ 0,\ x_{\omega(1)+1},\ \ldots,\ x_{\omega(2)},\ 0,\ \ldots,\ 0,$$
$$x_{\omega(i-1)+1},\ \ldots,\ x_{\omega(i)},\ \sqrt{1-\textstyle\sum_1^{\omega(i)}x_j^2}\Big).$$

La partition cellulaire de l'espace $G_+\,(\infty,\ n)$ contient deux fois plus de cellules que celle de l'espace $G\,(\infty,\ n)$, à savoir, au-dessus de chaque cellule $e\,(\omega)$ il y a deux cellules de $G_+\,(\infty,\ n)$ appliquées homéomorphiquement sur $e\,(\omega)$ par la projection $G_+\,(\infty,\ n)\to G\,(\infty,\ n)$, à savoir, la cellule $e_+\,(\omega)$, dont les plans sont orientés de la sorte que leur orientation est positive sur la base $v_1,\ \ldots,\ v_n$, et la cellule $e_-\,(\omega)$, dont les plans sont d'orientation opposée. Les applications caractéristiques pour ces cellules se construisent de même que pour la cellule $e\,(\omega)$, sauf que le plan défini par le repère (1) sera maintenant un plan orienté (son orientation sur le repère (1) est positive dans le cas de la cellule $e_+\,(\omega)$ et négative dans le cas de la cellule $e_-\,(\omega)$).

La partition cellulaire de l'espace $\mathbf{C}G\,(\infty,\ n)$ est constituée des cellules $\mathbf{C}e\,(\omega)$, $\omega\in\Omega_n$ que l'on définit de même que les cellules $e\,(\omega)$ en remplaçant les espaces $\mathbf{R}^\infty$ et $\mathbf{R}^m$ par les espaces $\mathbf{C}^\infty$ et $\mathbf{C}^m$. La dimension de la cellule $\mathbf{C}e\,(\omega)$ est égale à $2d\,(\omega)$ tandis que les

applications $\mathrm{cha}_{\mathbf{C}e(\omega)}$ sont précisément des analogues complexes hermitiens des applications $\mathrm{cha}_{e(\omega)}$.

4. Contenant un nombre fini de cellules de chaque dimension, les partitions construites possèdent la propriété (C). Elles jouissent également de la propriété (W), puisque chacune des variétés $G(m, n)$, $G_+(m, n)$, $\mathbf{C}G(m, n)$ (constituant le recouvrement fondamental des espaces $G(\infty, n)$, $G_+(\infty, n)$, $\mathbf{C}G(\infty, n)$ respectivement) se recouvre par un nombre fini de cellules. Enfin, il découle du théorème 1.2.4.6 que les espaces $G(\infty, n)$, $G_+(\infty, n)$, $\mathbf{C}G(\infty, n)$ sont normaux. Ainsi, les partitions cellulaires construites transforment $G(\infty, n)$, $G_+(\infty, n)$, $\mathbf{C}G(\infty, n)$ en espaces cellulaires.

Il est clair que les variétés $G(m, n)$, $G_+(m, n)$, $\mathbf{C}G(m, n)$ sont des sous-espaces des espaces $G(\infty, n)$, $G_+(\infty, n)$, $\mathbf{C}G(\infty, n)$ dans le sens cellulaire. Ainsi ils sont également des espaces cellulaires.

Pour $n = 1$ les espaces $G(m, n)$, $\mathbf{C}G(m, n)$, $G(\infty, n)$, $\mathbf{C}G(\infty, n)$ deviennent respectivement $\mathbf{R}P^{m-1}$, $\mathbf{C}P^{m-1}$, $\mathbf{R}P^{\infty}$, $\mathbf{C}P^{\infty}$; il est clair que dans ce cas les partitions cellulaires construites coïncident avec celles dont il était question dans 2.1.3.4, 2.1.3.5.

5. Remarquons que les plongements canoniques

$$G(\infty, n) \to G(\infty, n+q), \quad G_+(\infty, n) \to G_+(\infty, n+q),$$
$$\mathbf{C}G(\infty, n) \to \mathbf{C}G(\infty, n+q)$$

(voir *2*) sont des plongements cellulaires. L'image du premier contient $\mathrm{ske}_n G(\infty, n+q)$, l'image du second $\mathrm{ske}_n G_+(\infty, n+q)$, l'image du troisième $\mathrm{ske}_{2n+1}\mathbf{C}G(\infty, n+q)$.

Les inclusions suivantes sont tout aussi évidentes:

$$G(m, n) \supset \mathrm{ske}_{m-n} G(\infty, n), \quad G_+(m, n) \supset \mathrm{ske}_{m-n} G_+(\infty, n),$$
$$\mathbf{C}G(m, n) \supset \mathrm{ske}_{2m-2n+1}\mathbf{C}G(\infty, n).$$

Fibrés de Grassmann

6. Soient $0 \leqslant n \leqslant m \leqslant \infty$ et $n < \infty$. Désignons par $T(m, n)$, $T_+(m, n)$, $\mathbf{C}T(m, n)$ les sous-ensembles des produits $G(m, n) \times \mathbf{R}^m$, $G_+(m, n) \times \mathbf{R}^m$, $\mathbf{C}G(m, n) \times \mathbf{C}^m$ constitués des points (γ, x), $x \in \gamma$, et envisageons les fibrés

$$(T(m, n), \mathrm{pr}, G(m, n)), \quad (T_+(m, n), \mathrm{pr}, G_+(m, n)),$$
$$(\mathbf{C}T(m, n), \mathrm{pr}, \mathbf{C}G(m, n))$$

avec $\mathrm{pr}(\gamma, x) = \gamma$. Les fibres du premier fibré sont évidemment des espaces euclidiens, les fibres du second, des espaces euclidiens orientés, les fibres du troisième, des espaces hermitiens; il est tout aussi évident que le premier fibré est localement W-$O\mathbf{R}^n$-trivial et donc euclidien, le deuxième est localement W-$SO\mathbf{R}^n$-trivial et donc euclidien orienté, tandis que le troisième est localement

W-$U\mathbf{C}^n$-trivial et par conséquent hermitien. Nous les désignerons respectivement par

$$\mathrm{Gra}\,(m,\ O\,(n)),\qquad \mathrm{Gra}\,(m,\ SO\,(n)),\qquad \mathrm{Gra}\,(m,\ U\,(n))$$

et les fibrés en lesquels ils se transforment par extension des groupes $O\,(n)$, $SO\,(n)$, $U\,(n)$ à $GL\,(n,\ \mathbf{R})$, $GL_+\,(n,\ \mathbf{R})$, $GL\,(n,\ \mathbf{C})$, par

$$\mathrm{Gra}\,(m,\ GL\,(n,\ \mathbf{R})),\qquad \mathrm{Gra}\,(m,\ GL_+\,(n,\ \mathbf{R})),\qquad \mathrm{Gra}\,(m,\ GL\,(n,\ \mathbf{C})).$$

Les fibrés de toutes les six séries sont appelés *fibrés de Grassmann.* Pour $m = \infty$, leurs notations se réduisent à $\mathrm{Gra}\ O\,(n)$, $\mathrm{Gra}\ SO\,(n)$, $\mathrm{Gra}\ U\,(n)$, $\mathrm{Gra}\ GL\,(n,\ \mathbf{R})$, $\mathrm{Gra}\ GL_+\,(n,\ \mathbf{R})$, $\mathrm{Gra}\ GL\,(n,\ \mathbf{C})$.

Remarquons que $\mathrm{Gra}\,(m,\ O\,(n))$, pour $m < \infty$, est un sous-fibré du fibré standard trivial $(G\,(m,\ n) \times \mathbf{R}^m,\ \mathrm{pr}_1,\ G\,(m,\ n))$ (envisagé comme un fibré euclidien) associé à la section diagonale $\gamma \mapsto (\gamma,\ \gamma)$ du fibré $(G\,(m,\ n) \times (G\,(m,\ n),\ \mathrm{pr}_1,\ G\,(m,\ n))$. Il en est de même, avec des modifications évidentes, pour les autres cinq séries.

7. *Les fibrés* $\mathrm{Gra}\,G$ *où* $G = GL\,(n,\ \mathbf{R})$, $GL_+\,(n,\ \mathbf{R})$, $O\,(n)$, $SO\,(n)$, $GL\,(n,\ \mathbf{C})$, $U\,(n)$ *sont universels.*

Les démonstrations pour tous ces groupes sont essentiellement identiques et diffèrent peu de celle du théorème 4.3.4. Nous nous limiterons au groupe $GL\,(n,\ \mathbf{R})$. Conformément à 4.2.2, il suffit de montrer que, quels que soient le fibré vectoriel réel ξ de dimension n à base cellulaire et le sous-espace A de cette base, chaque $GL\mathbf{R}^n$-application $g : \xi\,|_A \to \mathrm{Gra}\ GL\,(n,\ \mathbf{R})$ se prolonge en une $GL\mathbf{R}^n$-application $\xi \to \mathrm{Gra}\ GL\,(n,\ \mathbf{R})$.

Considérons d'abord le cas où $\mathrm{bs}\ \xi = D^{r+1}$ (pour un certain r), et $A = S^r$. Dans ce cas, le fibré ξ est $GL\mathbf{R}^n$-trivial, ce qui permet de l'identifier au fibré standard trivial $(D^{r+1} \times \mathbf{R}^n,\ \mathrm{pr}_1,\ D^{r+1})$ et de définir explicitement le prolongement cherché $f : \xi \to \mathrm{Gra}\ GL\,(n,\ \mathbf{R})$: nous désignons par g_1 la composée des applications

$$S^r \times \mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathrm{tl}\,g} \mathrm{tl}\ \mathrm{Gra}\ GL\,(n,\ \mathbf{R}) \xrightarrow{\mathrm{in}} G\,(\infty,\ n) \times \mathbf{R}^\infty \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbf{R}^\infty,$$

et définissons l'application $f_1 : D^{r+1} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^\infty$ par la formule

$$f_1\,(ty,\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)) =$$
$$= tg_1\,(y,\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)) + \sqrt{1 - t^2}\,(\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{m},\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ 0,\ \ldots),$$

où $y \in S^r$, $t \in I$, et m est le plus petit des nombres s vérifiant $\mathbf{R}^s \supset g_1\,(S^r \times S^{n-1})$, et enfin nous posons

$$\mathrm{tl}\,f\,(y,\ x) = (f_1\,(y \times \mathbf{R}^n),\ f_1\,(y,\ x)).$$

Le cas général se réduit à ce cas particulier. Nous allons supposer que l'espace $\mathrm{bs}\ \xi$ est équipé et soit $f_r : \xi\,|_{A \cup \mathrm{ske}_r\,\mathrm{bs}\,\xi} \to \mathrm{Gra}\ GL\,(n,\ \mathbf{R})$ cette $GL\mathbf{R}^n$-application qui prolonge g. D'après ce que nous avons

déjà démontré, pour chaque cellule $e \in \mathrm{cell}_{r+1}\,\mathrm{bs}\,\xi \setminus \mathrm{cell}_{r+1}A$, la $GL\mathbf{R}^n$-application

$$g_e = f_r \circ \mathrm{ad}\,[\mathrm{ab}\,\mathrm{cha}_e : S^r \to A \cup \mathrm{ske}_r\,\mathrm{bs}\,\xi] : \mathrm{cha}_e^!\xi\,|_{S^r} \to$$
$$\to \mathrm{Gra}\,GL\,(n, \mathbf{R})$$

se prolonge en une certaine $GL\mathbf{R}^n$-application $h_e : \mathrm{cha}_e^!\xi \to$ $\to \mathrm{Gra}\,GL\,(n, \mathbf{R})$ et il est clair que l'application $\mathrm{tl}\,h_e$ est constante sur les éléments de la partition $\mathrm{zer}\,(\mathrm{tl}\,\mathrm{ad}\,\mathrm{cha}_e)$. En appliquant le théorème 3.2.6 (avec $B = D^{r+1}$ et $p = [\mathrm{ab}\,\mathrm{cha}_e : D^{r+1} \to \mathrm{Cl}\,e]$), nous voyons que h_e définit une $GL\mathbf{R}^n$-application $\xi\,|_{\mathrm{Cl}\,e} \to \mathrm{Gra}\,GL\,(n, \mathbf{R})$. Nous désignons cette application par f_e et notons que, pour deux cellules quelconques $e_1, e_2 \in \mathrm{cell}_{r+1}\,\mathrm{bs}\,\xi \setminus \mathrm{cell}_{r+1}A$, les applications $\mathrm{tl}\,f_{e_1}$, $\mathrm{tl}\,f_{e_2}$ coïncident au-dessus de $\mathrm{Cl}\,e_1 \cap \mathrm{Cl}\,e_2$ et que, pour chaque cellule $e \in \mathrm{cell}_{r+1}\,\mathrm{bs}\,\xi \setminus \mathrm{cell}_{r+1}A$, l'application $\mathrm{tl}\,f_e$ coïncide au-dessus de $\mathrm{Cl}\,e \cap (A \cup \mathrm{ske}_r\,\mathrm{bs}\,\xi)$ avec $\mathrm{tl}\,f_r$. Il découle de ce fait que les applications f_r et f_e, pour $e \in \mathrm{cell}_{r+1}\,\mathrm{bs}\,\xi \setminus \mathrm{cell}_{r+1}A$, forment une certaine $GL\mathbf{R}^n$-application

$$f_{r+1} : \xi\,|_{A \cup \mathrm{ske}_{r+1}\,\mathrm{bs}\,\xi} \to \mathrm{Gra}\,GL\,(n, \mathbf{R})$$

qui prolonge f_r (voir 3.2.7). Ainsi, nous avons construit par récurrence une suite

$$\{f_s : \xi\,|_{A \cup \mathrm{ske}_s\,\mathrm{bs}\,\xi} \to \mathrm{Gra}\,GL\,(n, \mathbf{R})\}_{s=1}^{\infty}$$

avec $f_{-1} = g$ dont les termes sont des $GL\mathbf{R}^n$-applications qui se prolongent de proche en proche. Cette suite d'applications est justement la $GL\mathbf{R}^n$-application $\xi \to \mathrm{Gra}\,GL\,(n, \mathbf{R})$ qui prolonge g.

8. Les fibrés

$$\mathrm{Gra}\,(m, GL\,(n, \mathbf{R})),\quad \mathrm{Gra}\,(m, GL_+\,(n, \mathbf{R})),\quad \mathrm{Gra}\,(m, O\,(n)),$$
$$\mathrm{Gra}\,(m, SO\,(n))$$

sont $(m - n)$*-universels. Les fibrés*

$$\mathrm{Gra}\,(m, GL\,(n, \mathbf{C})),\quad \mathrm{Gra}\,(m, U\,(n))$$

sont $(2m - 2n + 1)$*-universels.*

Ceci découle de *7* (voir *5* et 4.2.7).

Fibrés principaux associés

9. Pour $m < \infty$ les espaces totaux des fibrés principaux associés aux fibrés de Grassmann

$$\mathrm{Gra}\,(m, GL\,(n, \mathbf{R})),\quad \mathrm{Gra}\,(m, GL_+\,(n, \mathbf{R})),\quad \mathrm{Gra}\,(m, GL\,(n, \mathbf{C}));$$
$$\mathrm{Gra}\,(m, O\,(n)),\quad \mathrm{Gra}\,(m, SO\,(n)),\quad \mathrm{Gra}\,(m, U\,(n))$$

sont évidemment

$$V'\,(m, n),\ V'\,(m, n),\ \mathbf{C}V'\,(m, n);\quad V\,(m, n),\ V\,(m, n),\ \mathbf{C}V\,(m, n),$$

leurs projections sont les applications construites dans 3.2.2.3 et 3.2.2.7 :

$$V'(m, n) \to G(m, n), \quad V'(m, n) \to G_+(m, n),$$
$$\mathbf{C}V'(m, n) \to \mathbf{C}G(m, n); \tag{2}$$
$$V(m, n) \to G(m, n), \quad V(m, n) \to G_+(m, n)$$
$$\mathbf{C}V(m, n) \to \mathbf{C}G(m, n). \tag{3}$$

Il en est de même pour $m = \infty$ si

$$V'(\infty, n), \ \mathbf{C}V'(\infty, n), \quad V(\infty, n), \ \mathbf{C}V(\infty, n)$$

sont envisagés comme étant

$$\lim (V'(m, n), \text{in}), \quad \lim (\mathbf{C}V'(m, n), \text{in}), \quad \lim (V(m, n), \text{in}),$$
$$\lim (\mathbf{C}V(m, n), \text{in})$$

tandis que les projections (2), (3) pour $m = \infty$ comme étant constituées des projections (2), (3) pour $m < \infty$. Les espaces $V'(\infty, n)$, $\mathbf{C}V'(\infty, n)$, $V(\infty, n)$, $\mathbf{C}V(\infty, n)$ sont appelés *espaces de Stiefel.*

Il est clair que les actions canoniques à droite des groupes structuraux dans les espaces totaux envisagés (voir 3.2.10) coïncident pour $m < \infty$ avec les actions à droite décrites dans 2.3.12 et 2.3.13, et dans le cas $m = \infty$ ils se composent de ces dernières.

Fibrés asso (Gra O (1), O (1)) et asso (Gra U (1), U (1))

10. Le fibré principal associé à Gra O (1) *est* O (1)*-isomorphe au fibré* Mi O (1). *Le fibré principal associé à* Gra U (1) *est* U (1)*-isomorphe à* Mi U (1).

Pour la démonstration, il suffit d'indiquer un O (1)-homéomorphisme

$$\text{tl Mi } O(1) \to \text{tl asso (Gra } O(1), O(1))$$

en envisageant tl Mi O (1) et tl asso (Gra O (1), O (1)) $= V(\infty, 1)$ $[= S^\infty]$ comme étant des O (1)-espaces à droite, et un U (1)-homéomorphisme

$$\text{tl Mi } U(1) \to \text{tl asso (Gra } U(1), U(1))$$

en considérant tl Mi U (1) et tl asso (Gra U (1), U (1)) $= \mathbf{C}V(\infty, 1)$ $[= S^\infty]$ comme étant des U (1)-espaces à droite ; voir 3.1.9 et 3.2.10. On donne l'un et l'autre par la formule

$$\{\text{pr}(g_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty} \mapsto \{g_i \sqrt{t_i}\}_{i=1}^{\infty};$$

la signification de la première partie de cette formule est expliquée dans 4.3.2 ; les éléments g_i du groupe O (1) ou U (1) dans la deuxième partie sont envisagés comme des nombres (il s'agit des inclusions $V(\infty, 1) \subset \mathbf{R}^\infty$, $\mathbf{C}V(\infty, 1) \subset \mathbf{C}^\infty$, $O(1) = S^0 \subset \mathbf{R}$, $U(1) = S^1 \subset \mathbf{C}$).

4. Principales réductions du groupe structural

1. Les fibrés de Grassmann permettent d'appliquer aux problèmes de réduction du groupe structural, envisagés en p. 1, le schéma du p. 4.4. C'est précisément l'objet du présent sous-paragraphe. Rappelons que les réductions qui correspondent aux inclusions

$$O(n) \subset GL(n, \mathsf{R}), \quad SO(n) \subset GL_+(n, \mathsf{R}), \quad U(n) \subset GL(n, \mathsf{C}) \tag{4}$$

signifient la donnée d'une distance euclidienne ou hermitienne, les réductions qui correspondent aux inclusions

$$GL_+(n, \mathsf{R}) \subset GL(n, \mathsf{R}), \quad SO(n) \subset O(n), \tag{5}$$

la donnée d'une orientation et les réductions qui correspondent aux inclusions

$$GL(n, \mathsf{R}) \subset GL(2n, \mathsf{R}), \quad U(n) \subset O(2n), \tag{6}$$

la donnée d'une structure complexe. Nous indiquerons pour chacune des inclusions (4), (5), (6) une application classifiante canonique et en déduirons des conséquences évidentes. En outre, nous en ferons de même pour les inclusions

$$GL(n-s, \mathsf{R}) \subset GL(n, \mathsf{R}), \quad GL_+(n-s, \mathsf{R}) \subset GL_+(n, \mathsf{R}),$$
$$GL(n-s, \mathsf{C}) \subset GL(n, \mathsf{C}), \tag{7}$$

$$O(n-s) \subset O(n), \quad SO(n-s) \subset SO(n), \quad U(n-s) \subset U(n). \tag{8}$$

Les réductions du groupe structural qui correspondent à ces six inclusions peuvent être interprétées comme des représentations du fibré donné de dimension n sous forme de suspension répétée s fois au-dessus d'un fibré de dimension $n - s$.

2. Pour les inclusions (4) le programme indiqué se réalise facilement. Les fibrés Gra $GL(n, \mathsf{R})$ et Gra $O(n)$ ont la même base $G(\infty, n)$, les fibrés Gra $GL_+(n, \mathsf{R})$ et Gra $SO(n)$, la même base $G_+(\infty, n)$ et les fibrés Gra $GL(n, \mathsf{C})$ et Gra $U(n)$, la même base $\mathsf{C}G(\infty, n)$; il est clair que dans les trois cas les applications identiques sont des applications classifiantes. Par conséquent, les applications

$$\text{ext}: \text{Stee}(B, O\mathsf{R}^n) \to \text{Stee}(B, GL\mathsf{R}^n),$$
$$\text{ext}: \text{Stee}(B, SO\mathsf{R}^n) \to \text{Stee}(B, GL_+\mathsf{R}^n),$$
$$\text{ext}: \text{Stee}(B, U\mathsf{C}^n) \to \text{Stee}(B, GL\mathsf{C}^n)$$

sont bijectives pour chaque espace cellulaire B (voir 4.4.2). En particulier, tout fibré vectoriel réel à base cellulaire possède une distance euclidienne et tout fibré vectoriel complexe à base cellulaire peut être muni d'une distance hermitienne.

En guise de corollaire, nous obtenons le théorème déjà énoncé dans 2.8 : pour chaque fibré vectoriel ξ à base cellulaire et chaque

sous-fibré ξ_1, il existe un sous-fibré ξ_2 tel que ξ se décompose en une somme des sous-fibrés ξ_1 et ξ_2.

3. Il est tout aussi évident que la projection $G_+(\infty, n) \to G(\infty, n)$ est l'application de classification pour les deux inclusions (5), tandis que l'inclusion $\mathsf{C}G(\infty, n) \to G(\infty, 2n)$ est l'application de classification pour les deux inclusions (6). Pour traiter des propriétés homotopiques de ces deux applications de classification, assez compliquées, il nous faudra des moyens plus puissants. Nous reviendrons à la première de ces applications au § 5.6, lorsque nous serons mieux pourvus.

4. Pour les inclusions (7) et (8), il y a également des applications classifiantes évidentes: pour les deux inclusions à gauche, c'est le plongement canonique $G(\infty, n-s) \to G(\infty, n)$, pour les deux inclusions de milieu, le plongement canonique $G_+(\infty, n-s) \to G_+(\infty, n)$, pour les deux inclusions à droite, le plongement canonique $\mathsf{C}G(\infty, n-s) \to \mathsf{C}G(\infty, n)$ (voir 3.2). En identifiant à l'aide de ces plongements les espaces

$$G(\infty, n-s), \quad G_+(\infty, n-s), \quad \mathsf{C}G(\infty, n-s)$$

avec leurs images, nous pouvons écrire, en nous servant de 3.5

$$G(\infty, n-s) \supset \mathrm{ske}_{n-s}G(\infty, n) \quad G_+(\infty, n-s) \supset \mathrm{ske}_{n-s}G_+(\infty, n),$$
$$\mathsf{C}G(\infty, n-s) \supset \mathrm{ske}_{2n-2s+1}\mathsf{C}G(\infty, n).$$

La première inclusion montre que le couple $(G(\infty, n), G(\infty, n-s))$ est $(n-s)$-connexe (voir 2.3.2.2), d'où l'on déduit (en se servant des théorèmes 2.3.2.4 et 2.3.2.5) que l'application

$$\pi(\mathrm{id}, \mathrm{in}) : \pi(B, G(\infty, n-s)) \to \pi(B, G(\infty, n))$$

est bijective pour tout espace cellulaire B avec $\dim B < n-s$; elle applique $\pi(B, G(\infty, n-s))$ sur $\pi(B, G(\infty, n))$, quel que soit l'espace cellulaire B vérifiant $\dim B = n-s$. Ainsi les applications

$$\mathrm{ext} : \mathrm{Stee}(B, GL\mathsf{R}^{n-s}) \to \mathrm{Stee}(B, GL\mathsf{R}^n),$$
$$\mathrm{ext} : \mathrm{Stee}(B, O\mathsf{R}^{n-s}) \to \mathrm{Stee}(B, O\mathsf{R}^n)$$

sont bijectives pour chaque espace cellulaire B avec $\dim B < n-s$ et ont pour images

$$\mathrm{Stee}(B, GL\mathsf{R}^n), \quad \mathrm{Stee}(B, O\mathsf{R}^n)$$

pour chaque espace cellulaire B avec $\dim B = n-s$. De même, on déduit de l'inclusion

$$G_+(\infty, n-s) \supset \mathrm{ske}_{n-s}G_+(\infty, n)$$

que les applications

$$\mathrm{ext} : \mathrm{Stee}(B, GL_+\mathsf{R}^{n-s}) \to \mathrm{Stee}(B, GL_+\mathsf{R}^n),$$
$$\mathrm{ext} : \mathrm{Stee}(B, SO\mathsf{R}^{n-s}) \to \mathrm{Stee}(B, SO\mathsf{R}^n)$$

sont bijectives pour chaque espace cellulaire B avec $\dim B < n - s$ et ont pour images

$$\mathrm{Stee}\,(B,\ GL_+\mathbf{R}^n),\qquad \mathrm{Stee}\,(B,\ SO\mathbf{R}^n)$$

quel que soit l'espace cellulaire B vérifiant $\dim B = n - s$; l'inclusion

$$\mathbf{C}G\,(\infty,\ n-s) \supset \mathrm{ske}_{2n-2s+1}\mathbf{C}G\,(\infty,\ n)$$

implique que les applications

$$\mathrm{ext}:\ \mathrm{Stee}\,(B,\ GL\mathbf{C}^{n-s}) \to \mathrm{Stee}\,(B,\ GL\mathbf{C}^n),$$

$$\mathrm{ext}:\ \mathrm{Stee}\,(B,\ U\mathbf{C}^{n-s}) \to \mathrm{Stee}\,(B,\ U\mathbf{C}^n)$$

sont bijectives pour tout espace cellulaire B vérifiant $\dim B \leqslant 2(n - s)$ et ont pour images

$$\mathrm{Stee}\,(B,\ GL\mathbf{C}^n),\qquad \mathrm{Stee}\,(B,\ U\mathbf{C}^n),$$

quel que soit l'espace cellulaire B vérifiant $\dim B = 2n - 2s + 1$. Ainsi, tout fibré vectoriel réel (resp. complexe) de dimension n à base cellulaire de dimension $\leqslant n - s$ (resp. de dimension $\leqslant 2n - 2s + 1$) est $GL\mathbf{R}^n$-équivalent (resp. $GL\mathbf{C}^n$-équivalent) à la suspension itérée s fois sur un fibré de dimension $n - s$; si deux fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de dimension $n - s$ à base cellulaire de dimension $< n - s$ (resp. de dimension $< 2n - 2s + 1$) ont des suspensions itérées s fois qui sont $GL\mathbf{R}^n$-équivalentes (resp. $GL\mathbf{C}^n$-équivalentes), alors ces fibrés eux-mêmes sont $GL\mathbf{R}^{n-s}$-équivalents (resp. $GL\mathbf{C}^{n-s}$-équivalents).

5. Exercices

1. Montrer que pour tout fibré vectoriel réel ξ de dimension n le fibré asso $(\xi,\ \mathbf{R}^n \setminus 0)$ est équivalent (dans le sens de 1.1.2) au fibré dont l'espace total est le complémentaire de l'image de la section nulle dans tl ξ et la projection est la restriction de la projection pr ξ.

Montrer que pour tout fibré euclidien ξ de dimension n les fibrés asso (ξ, D^n) et asso $(\xi,\ S^{n-1})$ sont équivalents aux fibrés dont les espaces totaux sont les parties de l'espace tl ξ constituées des vecteurs de longueur $\leqslant 1$ et des vecteurs de longueur 1, tandis que les projections sont les restrictions de la projection pr ξ.

2. Montrer que pour tout fibré vectoriel réel (resp. complexe) ξ de dimension n le fibré asso $(\xi,\ V'\,(n,\ k))$ (resp. asso $(\xi,\ \mathbf{C}V'\,(n,\ k))$) est équivalent au fibré dont l'espace total est la partie du produit tl $\xi \times \ldots \times$ tl ξ de k facteurs constituée des suites $(x_1,\ \ldots,\ x_k)$ telles que $\mathrm{pr}\ \xi\,(x_1) = \ldots = \mathrm{pr}\ \xi\,(x_k)$, les vecteurs $x_1,\ \ldots,\ x_k$ étant linéairement indépendants, tandis que la projection est la

restriction de la composée des applications

$$\mathrm{tl}\ \xi \times \ldots \times \mathrm{tl}\ \xi \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathrm{tl}\ \xi \xrightarrow{\mathrm{pr}\xi} \mathrm{bs}\ \xi.$$

Montrer que pour tout fibré euclidien (resp. hermitien) ξ de dimension n le fibré asso(ξ, $V(n, k)$) (resp. asso(ξ, $\mathbf{C}V(n, k)$)) est équivalent au fibré dont l'espace total est la partie du produit tl $\xi \times \ldots \times$ tl ξ de k facteurs constituée des suites $(x_1, \ldots, x_k)$ telles que pr $\xi(x_1) = \ldots =$ pr $\xi(x_k)$ et les vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ forment un repère orthonormé, la projection étant la restriction de la composée des applications suivantes:

$$\mathrm{tl}\ \xi \times \ldots \times \mathrm{tl}\ \xi \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathrm{tl}\ \xi \xrightarrow{\mathrm{pr}\xi} \mathrm{bs}\ \xi.$$

3. Considérons les espaces $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$ définis dans l'exercice 1.2.9.5 et définissons l'action à droite du groupe $GL_+(1, \mathbf{R})$ dans $T \setminus 0$ en posant $(\{x_i\}, t) \mapsto \{tx_i\}$. Il est évident que $(\boldsymbol{T} \setminus 0)/GL_+(1, \mathbf{R}) = \boldsymbol{S}$. Montrer que le $GL_+(1, \mathbf{R})$-fibré défini par cette action est localement trivial sans être trivial, tandis que le fibré vectoriel réel orienté associé de dimension 1 ne possède pas de distance euclidienne.

§ 6. FIBRÉS DIFFÉRENTIABLES

1. Notions fondamentales

1. Soit $1 \leqslant r \leqslant a$. Un fibré ξ est appelé *fibré de classe* $\mathscr{C}^r$ ou *$\mathscr{C}^r$-fibré*, si les espaces tl ξ, bs ξ sont des $\mathscr{C}^r$-variétés et, pour chaque point de l'espace bs ξ, il existe un voisinage U, une $\mathscr{C}^r$-variété F sans bord dans le cas où U en possède un et un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme h: $U \times F \to \mathrm{pr}\ \xi^{-1}(U)$ tels que pr $\xi(h(b, x)) = b$ quels que soient $b \in U$, $x \in F$. Les fibrés de classes $\mathscr{C}^s$, $s \geqslant r$, sont appelés *fibrés de classe* $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ ou *$\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibrés*. Un fibré de classe $\mathscr{C}^{\geqslant 1}$ est dit *différentiable*.

Si ξ est un fibré de classe $\mathscr{C}^r$, alors pr ξ est évidemment une $\mathscr{C}^r$-submersion; en particulier, les fibres d'un fibré différentiable sont des sous-variétés propres de la variété totale tl ξ (voir 3.1.5.8). On voit également que les fibres au-dessus des points d'une composante de la base d'un $\mathscr{C}^r$-fibré sont deux à deux $\mathscr{C}^r$-difféomorphes. Si la base est connexe et possède un bord, alors les fibres n'ont pas de bord et ∂ tl $\xi = \mathrm{pr}\ \xi^{-1}(\partial\ \mathrm{bs}\ \xi)$, tandis que si la base ne possède pas de bord, $\partial\ \mathrm{tl}\ \xi = \bigcup_{b \in \mathrm{bs}\ \xi} \partial\ \mathrm{pr}\ \xi^{-1}(b)$; dans le premier cas la restriction (∂ tl ξ, ab pr ξ, ∂ bs ξ) du fibré ξ à ∂ bs ξ est un $\mathscr{C}^r$-fibré, dans le deuxième cas (∂ tl ξ, ab pr ξ, bs ξ) est un $\mathscr{C}^r$-fibré.

Le produit de deux $\mathscr{C}^r$-fibrés dont un possède un espace total et une base sans bord est évidemment un $\mathscr{C}^r$-fibré.

La restriction d'un $\mathscr{C}^r$-fibré à une sous-variété propre de la base est évidemment un $\mathscr{C}^r$-fibré.

Si ξ est un fibré et B une variété de classe $\mathscr{C}^r$, tandis que f: $B \to$ bs ξ est une application de classe $\mathscr{C}^r$ telle que les fibres pr $\xi^{-1}(f(b))$,

$b \in \partial B$, n'ont pas de bord, alors le fibré induit $f^! \xi$ est un $\mathscr{C}^r$-fibré dans un sens évident. Le passage au fibré induit de ce type sera dit *propre*. Par exemple, le fibré $\mathrm{in}^! \xi$, où in est l'inclusion d'une sous-variété propre ou du bord de la base d'un $\mathscr{C}^r$-fibré ξ dans cette base, est toujours induit proprement ; il est clair qu'il coïncide, comme $\mathscr{C}^r$-fibré, avec la restriction correspondante du fibré ξ.

2. Soit $0 \leqslant s \leqslant r$. Une application φ d'un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibré dans un autre est appelée *$\mathscr{C}^s$-application* si tl φ et bs φ sont de classe $\mathscr{C}^s$, et *$\mathscr{C}^s$-isomorphisme* si tl φ et bs φ sont des $\mathscr{C}^s$-difféomorphismes pour $s \geqslant 1$ et des homéomorphismes pour $s = 0$. Tout $\mathscr{C}^s$-isomorphisme qui est une équivalence s'appelle *$\mathscr{C}^s$-équivalence*.

Un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibré ξ $\mathscr{C}^s$-équivalent au fibré trivial standard (bs $\xi \times F$, pr_1, bs ξ), où F est une variété de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$ (sans bord si bs ξ a un bord), est dit *$\mathscr{C}^s$-trivial*. Il est clair que localement chaque $\mathscr{C}^r$-fibré est $\mathscr{C}^r$-trivial, i.e. chaque point de sa base possède un voisinage au-dessus duquel il est $\mathscr{C}^r$-trivial. En particulier, chaque fibré différentiable est localement trivial au sens topologique.

Remarquons que si le fibré $f^!\xi$ est proprement induit par un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibré ξ au moyen d'une $\mathscr{C}^r$-application f, alors ad $f : f^!\xi \to \xi$ et une $\mathscr{C}^r$-application. Il est clair également que si une application φ d'un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibré ξ' dans un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibré ξ est de classe $\mathscr{C}^r$, le fibré $(\mathrm{bs}\,\varphi)^!\xi$ étant proprement induit, l'application corr $\varphi : \xi' \to (\mathrm{bs}\,\varphi)^!\xi$ est également de classe $\mathscr{C}^r$.

Fibrés différentiables et submersions

3. Si $r \leqslant \infty$ et f est une submersion de classe $\mathscr{C}^r$ d'une $\mathscr{C}^r$-variété compacte X dans une $\mathscr{C}^r$-variété Y et $f^{-1}(\partial Y) = \partial X$, alors (X, f, Y) est un $\mathscr{C}^r$-fibré. Il en est de même pour $r = a$, lorsque X admet un $\mathscr{C}^a$-plongement dans un espace euclidien.

(Une extension de ce théorème est donnée dans 6.1.)

Il suffit d'effectuer la démonstration dans le cas où $f(X) = Y$; en effet, dans le cas général, l'ensemble $f(X)$ est ouvert (voir 3.1.5.8) et fermé (voir 1.1.7.9), i.e. est constitué de composantes entières de la variété Y. Nous montrerons que pour chaque point y_0 de l'espace Y il existe un voisinage U, une $\mathscr{C}^r$-variété fermée F et un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme $h : U \times F \to f^{-1}(U)$ tels que $f(h(y, x)) = y$ quels que soient $y \in U$, $x \in F$.

D'après 3.1.5.8 (ou, si l'on préfère, 3.4.8.2), $f^{-1}(y_0)$ est une sous-variété propre de la variété X lorsque $y_0 \in \mathrm{int}\, Y$, et une sous-variété propre de la variété ∂X lorsque $y_0 \in \partial Y$; dans les deux cas cette sous-variété est fermée en tant que variété indépendante. Posons $F = f^{-1}(y_0)$, fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement $j : X \to \mathbf{R}^q$, une $\mathscr{C}^r$-transversalisation τ du plongement $j|_F : F \to \mathbf{R}^q$ et un tube propre $\mathrm{Tub}_\tau \rho$; considérons l'application

$$\varphi : j^{-1}(\mathrm{tub}_\tau \rho) \to Y \times F$$

définie par la formule $\varphi(x) = (f(x), \mathrm{pr}_\tau(j(x)))$. Il est évident que : φ est de classe $\mathscr{C}^r$; $\varphi(\partial(j^{-1}(\mathrm{tub}_\tau \rho))) \subset \partial(Y \times F)$; φ est injective sur F ; la différentielle $d_x\varphi$ est non dégénérée si $x \in F$. F étant compact, on en déduit que φ est un difféomorphisme qui applique un certain voisinage de l'ensemble F sur un certain voisinage de l'ensemble $\varphi(F) = y_0 \times F$ (voir 3.1.5.5) et, toujours en vertu de la compacité de l'ensemble F, ce dernier voisinage contient un ensemble de la forme $V \times F$, où V est un voisinage du point y_0 (dans Y). Soit U un voisinage encore plus petit du point y_0 qui vérifie $j(f^{-1}(U)) \subset \subset \mathrm{tub}_\tau \rho$. Alors $\varphi^{-1}(U \times F) = f^{-1}(U)$, et on voit qu'en guise de h on peut prendre $(\mathrm{ab}\,\varphi)^{-1} : U \times F \to f^{-1}(U)$.

4 (Exemples). Les fibrés

$$(V(n, k), \mathrm{pr}, G(n, k)), (V(n, k), \mathrm{pr}, G_+(n, k)),$$
$$(\mathsf{C}V(n, k), \mathrm{pr}, \mathsf{C}G(n, k)), (\mathsf{H}V(n, k), \mathrm{pr}, \mathsf{H}G(n, k))$$

dont les projections sont les submersions définies dans 3.2.2, sont des $\mathscr{C}^a$-fibrés principaux à groupes structuraux

$$O(k), SO(k), U(k), Sp(k).$$

Les fibrés

$$(V(n, k), \mathrm{pr}, V(n, k-q)), (\mathsf{C}V(n, k), \mathrm{pr}, \mathsf{C}V(n, k-q)),$$
$$(\mathsf{H}V(n, k), \mathrm{pr}, \mathsf{H}V(n, k-q))$$

dont les projections sont les submersions définies dans 3.2.1, sont des $\mathscr{C}^a$-fibrés de Steenrod à groupes structuraux

$$O(n-k+q), \quad U(n-k+q), \quad Sp(n-k+q)$$

et à fibres standards

$$V(n-k+q, q), \quad \mathsf{C}V(n-k+q, q), \quad \mathsf{H}V(n-k+q, q)$$

(dans celles-ci les groupes indiqués opèrent canoniquement — voir 2.3.12). Les revêtements

$$(\mathsf{R}, \mathrm{hel}, S^1), (S^1, \mathrm{hel}_m, S^1), (G_+(n, k), \mathrm{pr}, G(n, k))$$

définis dans 1.2.6 sont également des $\mathscr{C}^a$-fibrés principaux.

Remarquons que parmi les $\mathscr{C}^a$-fibrés principaux indiqués ci-dessus on trouve les fibrés (S^3, pr, S^2) et (S^7, pr, S^4) dont les projections sont les submersions de Hopf (voir 3.2.2.9). Ces fibrés sont appelés *fibrés de Hopf*. La submersion de Hopf $S^{15} \to S^8$ définit également un $\mathscr{C}^a$-fibré que l'on appelle fibré de Hopf (ce dernier fibré n'a pas de structure de groupe spéciale) ; ses fibres sont difféomorphes à S^7.

Fibrés différentiables comme fibrés de Steenrod

5. Soit F une variété de classe $\mathscr{C}^r$, $r \geqslant 1$. Conformément à 2.3.10, F est un $\mathrm{Diff}^r F$-espace fidèle, de sorte que tout $\mathscr{C}^r$-fibré ξ dont les fibres sont $\mathscr{C}^r$-difféomorphes à F est un W-F-fibré (voir 3.1.3 et

3.2.1); il est clair que chaque ξ est localement W-F-trivial, i.e. est un fibré d'Ehresmann-Feldbau. La méthode qui nous a permis de transformer un fibré d'Ehresmann-Feldbau en un fibré de Steenrod n'est pas applicable ici : comme nous l'avons déjà remarqué (voir 3.5.2), si dim $F > 0$, alors l'action naturelle du groupe $\mathrm{Diff}^r F$ dans F n'est pas topologiquement fidèle. Néanmoins, l'ensemble $DH(\xi)$ se munit d'une topologie naturelle au moyen de son application injective dans $\mathscr{C}^r(F, \mathrm{tl}\,\xi)$ qui fait correspondre à chaque difféomorphisme α de $DH(\xi)$ sa composée avec l'inclusion de la fibre $\alpha(F)$ dans $\mathrm{tl}\,\xi$. Cette topologie dans l'ensemble $DH(\xi)$ transforme ξ en un F-fibré de Steenrod.

Il est utile de comparer les structures de groupe implicites décrites ci-dessus pour les fibrés différentiables avec les structures de groupe dans les fibrés localement triviaux (voir 3.4.5). Nous noterons seulement deux complications qui apparaissent dans la situation différentiable : tous les F-fibrés de Steenrod ne peuvent être transformés en fibrés différentiables, ne serait-ce que parce que la base peut ne pas être une variété ; une F-application d'un $\mathscr{C}^r$-fibré dont les fibres sont difféomorphes à F dans un autre, comme le montrent des exemples évidents, peut ne pas être une $\mathscr{C}^r$-application.

2. Lissages et approximations

1. Dans le présent sous-paragraphe nous faisons, pour les fibrés différentiables, une partie du travail déjà effectuée, au § 3.4, pour les variétés différentiables. Malgré l'importance de cette partie certaines questions ne sont pas du tout traitées. Par souci de brièveté, nous nous sommes limités au cas fermé ; les situations compactes plus générales sont considérées dans 6.2 à 6.5.

Nous aurons besoin de deux notations où il sera entendu que $0 \leqslant s \leqslant r$. Nous désignerons par $\mathrm{Sec}^s\,\xi$, l'ensemble des $\mathscr{C}^s$-sections d'un fibré ξ de classe $\mathscr{C}^r$ et par $\mathscr{C}^s(\xi, \xi')$, où ξ, ξ' sont des fibrés de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$, l'ensemble des $\mathscr{C}^s$-applications $\xi \to \xi'$. Pour $s \neq a$, les deux ensembles possèdent une topologie naturelle : le premier comme partie de l'espace $\mathscr{C}^s(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi)$, le second comme partie du produit $\mathscr{C}^s(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi') \times \mathscr{C}^s(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{bs}\,\xi')$.

ξ-transversalisations et tubes

2. Notre but immédiat est de modifier les définitions et les théorèmes du p. 3.4.3 pour les rendre applicables aux problèmes du présent sous-paragraphe.

Commençons par les transversalisations. Soient ξ un fibré vectoriel avec $\mathrm{tl}\,\xi$ fermé et $j : \mathrm{tl}\,\xi \to \mathbf{R}^q$ un plongement différentiable. Une application continue $\tau : \mathrm{tl}\,\xi \to G(q, q - n)$, où $n = \dim \mathrm{tl}\,\xi - \dim \mathrm{bs}\,\xi$, est appelée ξ-*transversalisation* du plongement j si la

restriction $\tau\,|_{\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(y)}$ est transversale au plongement $j\,|_{\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(y)}$ pour chaque point $y \in Y$. L'exemple fondamental est la ξ-*transversalisation normale* qui fait correspondre au point $x \in \mathrm{tl}\,\xi$ le complémentaire orthogonal du plan $d_x j\,(\mathrm{Tang}_x\,\mathrm{pr}\,\xi^{-1}\,(\mathrm{pr}\,\xi\,(x)))$ dans R^q. Notre ξ-variante du théorème 3.4.3.7 affirme que si ξ et j sont de classe $\mathscr{C}^r$ $(1 \leqslant r \leqslant a)$, alors j possède une ξ-transversalisation de classe $\mathscr{C}^r$. La démonstration est une modification évidente de celle du théorème 3.4.3.7.

Passons aux tubes. Soit τ une ξ-transversalisation du plongement j. Définissons le tube $\mathrm{Tub}_\tau\,\rho$ et le tube ouvert $\mathrm{tub}_\tau\,\rho$ comme sous-ensembles du produit $\mathrm{bs}\,\xi \times \mathsf{R}^q$ en posant

$$\mathrm{Tub}_\tau\rho = \bigcup_{x \in \mathrm{tl}\,\xi} \mathrm{pr}\,\xi\,(x) \times d_\tau\,(x,\ \rho),$$

$$\mathrm{tub}_\tau\rho = \bigcup_{x \in \mathrm{tl}\,\xi} \mathrm{pr}\,\xi\,(x) \times (d_\tau\,(x,\ \rho) \setminus s_\tau\,(x,\ \rho)),$$

où $d_\tau\,(x,\ \rho)$ et $s_\tau\,(x,\ \rho)$ sont la boule et la sphère du plan $j\,(x) + \tau\,(x)$ de centre $j\,(x)$ et de rayon ρ; autrement dit,

$$\mathrm{Tub}_\tau\rho = \bigcup_{y \in \mathrm{bs}\,\xi} y \times \mathrm{Tub}_\tau|_{\mathrm{pr}\,\xi^{-1}\,(y)}\rho,$$

$$\mathrm{tub}_\tau\rho = \bigcup_{y \in \mathrm{bs}\,\xi} y \times \mathrm{tub}_\tau|_{\mathrm{pr}\,\xi^{-1}\,(y)}\rho.$$

Le tube $\mathrm{Tub}_\tau\,\rho$ est dit propre si : pour un certain $\sigma > \rho$ les ensembles $\mathrm{pr}\,\xi\,(x) \times (d_\tau\,(x,\ \sigma) \setminus s_\tau\,(x,\ \sigma))$ sont deux à deux disjoints; le tube ouvert $\mathrm{tub}_\tau\,\sigma$ qu'ils constituent est un sous-ensemble ouvert du produit $\mathrm{bs}\,\xi \times \mathsf{R}^q$; l'application $\mathrm{tub}_\tau\,\sigma \to \mathrm{tl}\,\xi$ qui projette $\mathrm{pr}\,\xi\,(x) \times (d_\tau\,(x,\ \sigma) \setminus s_\tau\,(x,\ \sigma))$ dans x est différentiable. Les restrictions de cette application à $\mathrm{Tub}_\tau\,\rho$ et à $\mathrm{tub}_\tau\,\rho$ (indépendantes du choix de σ) sont appelées projections; on les note pr_τ. Si ξ, j et τ sont de classe $\mathscr{C}^r$, $r \geqslant 1$, alors : un tube propre existe; chaque tube propre $\mathrm{Tub}_\tau\,\rho$ est une sous-variété du produit $\mathrm{bs}\,\xi \times \mathsf{R}^q$ et son intérieur est $\mathrm{tub}_\tau\,\rho$; l'application $\mathrm{pr}_\tau : \mathrm{Tub}_\tau\,\rho \to \mathrm{tl}\,\xi$ est une $\mathscr{C}^r$-submersion. On établit ces faits par une modification évidente des démonstrations des théorèmes 3.4.3.4 et 3.4.3.5. La modification concerne également la construction 3.4.3.3 : le modèle Tu_τ se définit maintenant comme le sous-ensemble du produit $\mathrm{tl}\,\xi \times \mathsf{R}^q$ constitué des points $(x,\ t)$ tels que $t \in \tau\,(x)$, tandis que nat applique Tu_τ dans $\mathrm{bs}\,\xi \times \mathsf{R}^q$ suivant la formule $\mathrm{nat}\,(x,\ t) = (\mathrm{pr}\,\xi\,(x),\ j\,(x) + t)$.

Théorèmes fondamentaux

3. *Si $r \leqslant \infty$, alors quels que soient les $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibrés ξ, ξ' à variétés totales* tl ξ, tl ξ' *fermées et à bases* bs ξ, bs ξ' *fermées, l'ensemble $\mathscr{C}^r\,(\xi,\ \xi')$ est dense dans $\mathscr{C}^s\,(\xi,\ \xi')$, pour tout $s < r$. Ceci reste vrai pour $r = a$, lorsque* tl ξ, tl ξ', bs ξ, bs ξ' *admettent un $\mathscr{C}^a$-plongement dans l'espace euclidien.*

Démonstration. Fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement $j' : \mathrm{tl}\,\xi' \to \mathsf{R}^{q'}$, sa ξ'-transversalisation τ' de classe $\mathscr{C}^r$ et le tube propre $\mathrm{Tub}_{\tau'}\rho'$. Il est évident que le sous-ensemble $\mathscr{U}$ de l'espace $\mathscr{C}^s(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi') \times \times \mathscr{C}^s(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{bs}\,\xi')$ constitué des couples $(F : \mathrm{tl}\,\xi \to \mathrm{tl}\,\xi', f : \mathrm{bs}\,\xi \to \mathrm{bs}\,\xi')$ tels que $(f(\mathrm{qr}\,\xi(x)), j'(F(x))) \in \mathrm{tub}_{\tau'}\rho'$ est ouvert pour chaque point x de $\mathrm{tl}\,\xi$ et contient $\mathscr{C}^s(\xi, \xi')$. Définissons pour le couple (F, f) de $\mathscr{U}$ l'application $\Phi(F, f) : \mathrm{tl}\,\xi \to \mathrm{tl}\,\xi'$ par la formule

$$x \mapsto \mathrm{pr}_{\tau'}(f(\mathrm{pr}\,\xi(x)), j'(F(x))).$$

Il est clair que $(\Phi(F, f), f) \in \mathscr{C}^s(\xi, \xi')$ et que l'application $\Psi : \mathscr{U} \to \mathscr{C}^s(\xi, \xi')$ définie par la formule $\Psi(F, f) = (\Phi(F, f), f)$ est une rétraction qui applique

$$\mathscr{U} \cap (\mathscr{C}^r(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi') \times \mathscr{C}^r(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{bs}\,\xi'))$$

dans $\mathscr{C}^r(\xi, \xi')$. Puisque

$$\mathscr{C}^r(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi') \times \mathscr{C}^r(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{bs}\,\xi')$$

est dense dans

$$\mathscr{C}^s(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi') \times \mathscr{C}^s(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{bs}\,\xi')$$

(voir 3.4.4.2), l'existence d'une telle rétraction implique que $\mathscr{C}^r(\xi, \xi')$ est dense dans $\mathscr{C}^s(\xi, \xi')$.

4. Si $r \leqslant \infty$, alors quels que soient les $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibrés ξ, ξ' à $\mathrm{tl}\,\xi$, $\mathrm{tl}\,\xi'$, $\mathrm{bs}\,\xi$, $\mathrm{bs}\,\xi'$ *fermées, la $\mathscr{C}^r$-application f:* $\mathrm{bs}\,\xi \to \mathrm{bs}\,\xi'$ *et $s < r$, la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(\xi, \xi')$ constituée des applications* φ, $\mathrm{bs}\,\varphi = f$, *est dense dans la partie de l'espace $\mathscr{C}^s(\xi, \xi')$ constituée des applications* φ, $\mathrm{bs}\,\varphi = f$. *Ceci reste vrai pour $r = a$, à condition que* $\mathrm{tl}\,\xi$ *et* $\mathrm{tl}\,\xi'$ *admettent un $\mathscr{C}^a$-plongement dans l'espace euclidien.*

Démonstration. Désignons par $\mathscr{F}$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^s(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi')$ constituée des applications de la forme $\mathrm{tl}\,\varphi$ où $\varphi \in \in \mathscr{C}^s(\xi, \xi')$, $\mathrm{bs}\,\varphi = f$. Il faut établir que l'intersection $\mathscr{F} \cap \mathscr{C}^r(\xi, \xi')$ est dense dans $\mathscr{F}$.

Fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement $j' : \mathrm{tl}\,\xi' \to \mathsf{R}^q$, sa ξ'-transversalisation τ' de classe $\mathscr{C}^r$, le tube propre $\mathrm{Tub}_{\tau'}\rho'$. Il est évident que le sous-ensemble $\mathscr{U}$ de l'espace $\mathscr{C}^s(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi')$ constitué des applications $F : \mathrm{tl}\,\xi \to \mathrm{tl}\,\xi'$ qui vérifient

$$(f(\mathrm{pr}\,\xi(x)), j'(F(x))) \in \mathrm{tub}_{\tau'}\rho'$$

est ouvert pour chaque point x de $\mathrm{tl}\,\xi$ et contient $\mathscr{F}$. On voit également que l'application de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{F}$, qui fait correspondre à l'application $F \in \mathscr{U}$ l'application

$$x \mapsto \mathrm{pr}_{\tau'}(f(\mathrm{pr}\,\xi(x)), j'(F(x))),$$

est une rétraction qui envoie $\mathscr{U} \cap \mathscr{C}^r(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi')$ dans $\mathscr{F} \cap \mathscr{C}^r(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi')$. Puisque $\mathscr{C}^r(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi')$ est dense dans $\mathscr{C}^s(\mathrm{tl}\,\xi, \mathrm{tl}\,\xi')$, il découle de l'existence d'une telle rétraction que $\mathscr{F} \cap \mathscr{C}^r(\xi, \xi')$ est dense dans $\mathscr{F}$.

5. Si $r \leqslant \infty$, *alors pour des* $\mathscr{C}^{\geqslant r}$*-fibrés quelconques* ξ, ξ' *à* tl ξ, tl ξ', bs ξ, bs ξ' *fermés, l'ensemble des* $\mathscr{C}^r$*-isomorphismes* $\xi \to \xi'$ *est dense, pour* $0 < s < r$, *dans la partie de l'espace* $\mathscr{C}^s(\xi, \xi')$ *constituée des* $\mathscr{C}^s$*-isomorphismes; l'ensemble des* $\mathscr{C}^r$*-équivalences est dense, pour* $0 < s < r$, *dans la partie de l'espace* $\mathscr{C}^s(\xi, \xi')$ *constituée des* $\mathscr{C}^s$*-équivalences. Lorsque* $r = a$, *la première assertion reste valable à condition que* tl ξ, tl ξ', bs ξ, bs ξ' *admettent un* $\mathscr{C}^a$*-plongement dans l'espace euclidien, et la deuxième à condition que* tl ξ, tl ξ' *admettent un* $\mathscr{C}^a$*-plongement dans l'espace euclidien.*

Ceci découle de *3*, *4* et 3.4.1.6.

6 (Corollaires). *Si deux* $\mathscr{C}^{\geqslant r}$*-fibrés dont les bases et les espaces totaux sont des variétés fermées sont* $\mathscr{C}^1$*-isomorphes et* $r \leqslant \infty$, *alors ils sont* $\mathscr{C}^r$*-isomorphes. Ceci reste valable pour* $r = a$, *si l'espace total et la base admettent un* $\mathscr{C}^a$*-plongement dans l'espace euclidien.*

Si deux $\mathscr{C}^{\geqslant r}$*-fibrés dont les espaces totaux sont des variétés fermées sont* $\mathscr{C}^1$*-équivalents, et* $r \leqslant \infty$, *alors ces fibrés sont* $\mathscr{C}^r$*-équivalents. La même chose est vraie pour* $r = a$, *à condition que les variétés totales admettent un* $\mathscr{C}^a$*-plongement dans l'espace euclidien.*

7. Si $r \leqslant \infty$, *alors pour chaque* $\mathscr{C}^{\geqslant r}$*-plongement* ξ *avec* tl ξ *et* bs ξ *fermés, l'ensemble* $\mathrm{Sec}^r\,\xi$ *est dense (pour chaque* $s < r$*) dans* $\mathrm{Sec}^s\,\xi$. *Ceci reste vrai pour* $r = a$ *si* tl ξ *et* bs ξ *admettent un* $\mathscr{C}^a$*-plongement dans l'espace euclidien.*

Ceci découle du théorème *4* appliqué aux fibrés ξ et (bs ξ, id, bs ξ) et à l'application id bs ξ.

8. Chaque $\mathscr{C}^{\geqslant r}$*-fibré* ξ *avec* tl ξ *et* bs ξ *fermés est* $\mathscr{C}^r$*-isomorphe à un* $\mathscr{C}^a$*-fibré dont la variété totale et la base admettent un* $\mathscr{C}^a$*-plongement dans l'espace euclidien.*

D é m o n s t r a t i o n. D'après 3.4.9.6, il existe des $\mathscr{C}^a$-variétés T, B, admettant des $\mathscr{C}^a$-plongements dans l'espace euclidien, qui peuvent être liées avec tl ξ, bs ξ par des $\mathscr{C}^r$-difféomorphismes F: $T \to$ tl ξ, f: $B \to$ bs ξ. Fixons un $\mathscr{C}^r$-plongement j: tl $\xi \to \mathbf{R}^q$, sa ξ-transversalisation τ de classe $\mathscr{C}^r$ et le tube propre $\mathrm{Tub}_\tau\,\rho$; désignons par $\mathscr{U}$ la partie de l'espace $\mathscr{C}^r(T, B)$ constituée des submersions p: $T \to B$ dont l'image par la composée des applications

$$T \xrightarrow{\text{diag}} T \times T \xrightarrow{(f \circ p) \times (j \circ F)} \mathrm{bs}\,\xi \times \mathbf{R}^q$$

est contenue dans $\mathrm{tub}_\tau\,\rho$. Il est clair que $\mathscr{U}$ est ouvert et contient $f^{-1} \circ \mathrm{pr}\,\xi \circ F$; l'application Φ: $\mathscr{U} \to \mathscr{C}^r(T, \mathrm{tl}\,\xi)$ qui applique $g \in \mathscr{U}$ dans l'application $x \mapsto \mathrm{pr}_\tau(\varphi \circ g(x), j \circ F(x))$ est continue; $\Phi(f^{-1} \circ \mathrm{pr}\,\xi \circ F) = F$. Puisque F est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme, la composée $f^{-1} \circ \mathrm{pr}\,\xi \circ F$ possède dans $\mathscr{C}^r(T, B)$ un voisinage $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ tel que $\Phi(g)$ est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme si $g \in \mathscr{V}$. Fixons dans $\mathscr{V}$ une $\mathscr{C}^a$-application h. Il découle du théorème 1.3 que (T, h, B) est un $\mathscr{C}^a$-fibré; il est clair que $\Phi(h)$ constitue avec f un $\mathscr{C}^r$-isomorphisme du fibré (T, h, B) dans ξ.

3. Fibrés vectoriels différentiables

1. En général, la propriété de différentiabilité apparaît dans les fibrés en combinaison avec d'autres structures, le plus souvent avec des structures de groupe du type de Steenrod. Dans de tels cas, le rôle de la différentiabilité est analogue à celui de la topologie dans la théorie des fibrés de Steenrod exposée ci-dessus (§§ 3, 4) ; il serait intéressant de développer cette analogie pour obtenir une théorie complète des fibrés différentiables de Steenrod.

Malheureusement, un tel programme serait trop vaste pour notre cours. Nous nous limiterons à quelques notions sur les fibrés v e c t o r i e l s, les plus importantes dans ce contexte dont l'exposé est moins encombrant que celui de la théorie générale.

Remarquons que les théorèmes sur les lissages et les approximations (théorèmes *8* à *12* ci-dessous) ne découlent pas directement des propositions du sous-paragraphe précédent, puisque les fibres d'un fibré vectoriel de dimension positive ne sont pas compactes. Nous avons donc préféré donner des démonstrations simples directes de ces théorèmes.

Notions fondamentales

2. Un fibré ξ est appelé *$\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel réel de dimension n* ($1 \leqslant r \leqslant a$) s'il est en même temps un fibré vectoriel réel de dimension n et un $\mathscr{C}^r$-fibré, ces deux structures étant compatibles en ce sens que la restriction du fibré ξ à un voisinage suffisamment petit d'un point arbitraire de sa base est $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-triviale, i.e. elle peut être liée à un fibré standard trivial par une $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-équivalence (une $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-équivalence est une $GL\mathsf{R}^n$-équivalence qui est en même temps une $\mathscr{C}^r$-équivalence). D'une même manière on définit les *$\mathscr{C}^r$-fibrés euclidiens, les $\mathscr{C}^r$-fibrés vectoriels complexes et les $\mathscr{C}^r$-fibrés hermitiens.*

La multiplication et le passage au fibré induit (en particulier, la restriction) des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibrés vectoriels, euclidiens ou hermitiens donnent des fibrés du même type lorsque les conditions indiquées dans les définitions correspondantes du sous-paragraphe 1 (voir 1.2) sont vérifiées.

Remarquons aussi que l'on peut transposer aux $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibrés vectoriels, euclidiens et hermitiens les énoncés et les démonstrations des théorèmes 3.2.8 et 3.2.9, à condition de faire des modifications appropriées. Nous nous limiterons à énoncer la $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-variante du théorème 3.2.9 : si la composante bs f d'une $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-application f d'un $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-$GL\mathsf{R}^n$-fibré dans un autre vérifie les conditions indiquées dans 1.1 dans la définition du $\mathscr{C}^r$-fibré induit, alors l'application de correction corr f est une $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-équivalence.

3. Les descriptions directes des fibrés vectoriels, euclidiens et hermitiens, données au p. 5.1, possèdent également des $\mathscr{C}^r$-analo-

gues évidents ($1 \leqslant r \leqslant a$). Le $\mathscr{C}^r$-analogue du théorème 5.1.3 affirme qu'un $\mathscr{C}^r$-fibré dont les fibres sont des espaces vectoriels réels de dimension n est un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel réel de dimension n si et seulement si les opérations vectorielles partielles, indiquées dans 5.1.3 sont des $\mathscr{C}^r$-applications. Le $\mathscr{C}^r$-analogue du théorème 5.1.5 affirme qu'un $\mathscr{C}^r$-fibré dont les fibres sont des espaces euclidiens de dimension n est un $\mathscr{C}^r$-fibré euclidien de dimension n si et seulement si les opérations partielles indiquées et la distance (le carré de la longueur d'un vecteur envisagé comme une fonction sur la variété totale du fibré) sont de classe $\mathscr{C}^r$. En particulier, pour faire d'un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel réel un $\mathscr{C}^r$-fibré euclidien, il faut y introduire une $\mathscr{C}^r$-distance euclidienne. Les énoncés complexes correspondants (i.e. les $\mathscr{C}^r$-analogues des théorèmes 5.1.10) sont les mêmes, sauf qu'il faut remplacer les fibrés euclidiens et la distance euclidienne par les fibrés hermitiens et la distance hermitienne.

Fibrés différentiables de Grassmann

4. Les exemples fondamentaux de fibrés différentiables vectoriels, euclidiens et hermitiens sont les fibrés de Grassmann définis dans 5.3.6 pour $m < \infty$. A savoir si $0 \leqslant n \leqslant m < \infty$, alors Gra $(m, GL\ (n, \mathsf{R}))$ est évidemment un $\mathscr{C}^a$-fibré vectoriel réel, Gra $(m, GL\ (n, \mathsf{C}))$ un $\mathscr{C}^a$-fibré vectoriel complexe, Gra $(m, O\ (n))$ un $\mathscr{C}^a$-fibré euclidien et Gra $(m, U\ (n))$ un $\mathscr{C}^a$-fibré hermitien. Rappelons qu'ils sont tous de dimension n. Le troisième fibré diffère du premier seulement en ce qu'il possède une $\mathscr{C}^a$-distance euclidienne, le quatrième du second, par une $\mathscr{C}^a$-distance hermitienne.

Le théorème *5* ci-dessous peut être considéré comme une $\mathscr{C}^r$-variante (avec $r \neq a$), plus faible, de la partie de la proposition 5.3.8 qui se rapporte aux fibrés

$$\text{Gra}\ (m,\ GL\ (n,\ \mathsf{R}))\ \text{et}\ \text{Gra}\ (m,\ GL\ (n,\ \mathsf{C})).$$

5. Soient ξ un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel réel ou complexe de dimension n à base compacte. Si $r \neq a$, alors, pour un certain m, il existe une $\mathscr{C}^r$-application f: bs $\xi \to G\ (m,\ n)$ *dans le cas réel et f:* bs $\xi \to \mathsf{C}G\ (m,\ n)$ *dans le cas complexe telle que ξ est $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-équivalent à $f^!$*Gra $(m,\ GL\ (n,\ \mathsf{R}))$ *dans le cas réel et $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{C}^n$-équivalent à $f^!$*Gra $(m,\ GL\ (n,\ \mathsf{C}))$ *dans le cas complexe.*

Nous nous limiterons au cas réel, car le cas complexe n'en diffère que par des détails évidents. Trouvons pour chaque point $b \in$ bs ξ une carte $\psi_b \in \text{Atl}_b$ bs ξ

$$\psi_b\ (\text{supp}\ \psi_b,\ b) = (\mathsf{R}^l,\ 0)\ \text{ou}\ (\mathsf{R}^l,\ 0),\ l = \dim \text{bs}\ \xi,$$

telle que la restriction $\xi|_{\text{supp}\,\psi_b}$ soit $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-triviale et fixons des $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-trivialisations

$$\tau_b\colon (\text{supp}\ \psi_b \times \mathsf{R}^n,\ \text{pr}_1,\ \text{supp}\ \psi_b) \to \xi_{\text{supp}\ \psi_b}.$$

Recouvrons ensuite bs ξ par un nombre fini d'ensembles $\psi_b^{-1}(D^l)$, mettons par les ensembles $\psi_{b_1}^{-1}(D^l), \ldots, \psi_{b_s}^{-1}(D^l)$ et fixons une $\mathscr{C}^r$-fonction $\alpha: \mathsf{R}^l \to \mathsf{R}$, égale à 1 sur D^l et à 0 en dehors de $2D^l$. Définissons enfin les applications $H_1, \ldots, H_s$: tl $\xi \to \mathsf{R}^n$ par la formule

$$H_i(x) = \begin{cases} \alpha(\psi_{b_i}(\mathrm{pr}\,\xi(x)))\ \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{tl}\,\tau_{b_i}^{-1}(x) \\ \quad \text{si } x \in \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{supp}\,\psi_{b_i}), \\ 0 \text{ si } x \notin \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{supp}\,\psi_{b_i}), \end{cases}$$

où $\mathrm{pr}_2 = [\mathrm{pr}_2 : \mathrm{supp}\,\psi_{b_i} \times \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n]$, et l'application H: tl $\xi \to \mathsf{R}^n \times \ldots \times \mathsf{R}^n = \mathsf{R}^{sn}$ par la formule $H(x) = (H_1(x), \ldots, H_s(x))$. Il est évident que H est une $\mathscr{C}^r$-application et que les restrictions $H\,|_{\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)}$ à $b \in$ bs ξ sont des monomorphismes linéaires. Nous posons $m = sn$ et définissons l'application f: bs $\xi \to G(m, n)$ par la formule $f(b) = H(\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b))$. Pour établir une $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-équivalence des fibrés ξ et $f^!\mathrm{Gra}(m, GL(n, \mathsf{R}))$, il faut construire une $\mathscr{C}^r$-$GL\mathsf{R}^n$-application φ: $\xi \to \mathrm{Gra}(m, GL(n, \mathsf{R}))$ avec bs $\varphi = f$ (voir *2*) et pour cela il suffit de définir l'application

$$\mathrm{tl}\,\varphi: \mathrm{tl}\,\xi \to \mathrm{tl}\,\mathrm{Gra}(m, GL(n, \mathsf{R}))$$

par la formule

$$\mathrm{tl}\,\varphi(x) = (f(\mathrm{pr}\,\xi(x)), H(x))$$

(rappelons que tl Gra $(m, GL(n, \mathsf{R}))$ est la partie du produit $G(m, n) \times \mathsf{R}^m$ constituée des couples (γ, y) tels que $y \in \gamma$).

Application

6. Pour $1 \leqslant r \leqslant \infty$, *chaque* $\mathscr{C}^r$-*fibré vectoriel réel* (*resp. complexe*) *à base compacte possède une distance euclidienne* (*resp. hermitienne*) *de classe* $\mathscr{C}^r$.

Ceci découle du théorème *5*, puisque les fibrés Gra $(m, GL(n, \mathsf{R}))$ possèdent une distance euclidienne de classe $\mathscr{C}^a$, tandis que les fibrés Gra $(m, GL(n, \mathsf{C}))$ possèdent une distance hermitienne de classe $\mathscr{C}^a$.

Lissages et approximations

7. Dans les théorèmes *8* et *10* ci-dessous nous désignons par $L^s(\xi, \xi'; f)$ l'ensemble des $\mathscr{C}^r$-applications linéaires $\varphi: \xi' \to \xi$ vérifiant bs $\varphi = f$; dans ces notations ξ, ξ' sont des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibrés réels ou complexes, $r \geqslant s \geqslant 0$, et f une application de classe $\mathscr{C}^s$ de bs ξ' dans bs ξ. Pour $s \neq a$, cet ensemble possède une topologie naturelle comme sous-ensemble de l'espace $\mathscr{C}^s(\xi', \xi)$.

Lorsque $\dim \xi = \dim \xi' = n$, bs $\xi =$ bs ξ' et $f = \mathrm{id}$, alors $L^s(\xi, \xi'; f)$ contient en guise de sous-ensemble la famille de toutes

les $\mathscr{C}^s$-$GL\mathbf{R}^n$-équivalences $\xi' \to \xi$ dans le cas réel et la famille de toutes les $\mathscr{C}^s$-$GL\mathbf{C}^n$-équivalences $\xi' \to \xi$ dans le cas complexe. Dans les deux cas, ce sous-ensemble est évidemment ouvert pour tout $s \neq a$.

Remarquons que parmi les espaces $L^s(\xi, \xi'; f)$ on rencontre tous les espaces $\mathrm{Sec}^s\, \xi$ (voir 2.1). Plus exactement, $\mathrm{Sec}^s\, \xi$ est canoniquement homéomorphe à $L^s(\xi, \xi'; f)$, où ξ' est le fibré trivial standard $(\mathrm{bs}\, \xi \times \mathbf{R}, \mathrm{pr}_1, \mathrm{bs}\, \xi)$, tandis que $f = \mathrm{id}\, \mathrm{bs}\, \xi$; l'homéomorphisme canonique $L^s(\xi, \xi'; f) \to \mathrm{Sec}^s\, \xi$ fait correspondre la section $b \mapsto \mathrm{tl}\, \varphi(b, 1)$ à l'application $\varphi: \xi' \to \xi$.

8. *Soient ξ, ξ' des $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibrés vectoriels réels ou complexes à bases compactes. Pour $0 \leqslant s < r \leqslant \infty$, l'ensemble $L^r(\xi, \xi'; f)$ est dense dans $L^s(\xi, \xi'; f)$ quelle que soit $\mathscr{C}^r$-application f: $\mathrm{bs}\, \xi' \to \mathrm{bs}\, \xi$.*

Vu que la situation complexe diffère de la situation réelle seulement par des détails évidents, nous nous limiterons au cas réel. D'après le théorème 5, on peut supposer que $\xi = g^!\, \mathrm{Gra}\,(m, GL\,(n, \mathbf{R}))$ et $\xi' = g'^!\, \mathrm{Gra}\,(m', GL\,(n', \mathbf{R}))$, où g et g' sont des $\mathscr{C}^r$-applications des bases $\mathrm{bs}\, \xi$ et $\mathrm{bs}\, \xi'$ dans $G\,(m, n)$ et $G\,(m', n')$. Alors $\mathrm{tl}\, \xi$ peut être identifié à la $\mathscr{C}^r$-sous-variété du produit $\mathrm{bs}\, \xi \times \mathbf{R}^m$ constituée des couples (b, y) tels que $y = g\,(b)$, tandis que $\mathrm{tl}\, \xi'$ s'identifie à la $\mathscr{C}^r$-sous-variété du produit $\mathrm{bs}\, \xi' \times \mathbf{R}^{m'}$ constituée des couples (b', y') vérifiant $y' = g'\,(b')$. Les projections orthogonales de l'espace $\mathbf{R}^m$ sur ses sous-espaces $g\,(b)$, $b \in \mathrm{bs}\, \xi$, constituent une $\mathscr{C}^r$-application p: $\mathrm{bs}\, \xi \times \mathbf{R}^m \to \mathrm{tl}\, \xi$, tandis que les projections orthogonales de l'espace $\mathbf{R}^{m'}$ sur ses sous-espaces $g'\,(b')$, $b' \in \mathrm{bs}\, \xi'$, constituent une $\mathscr{C}^r$-application p': $\mathrm{bs}\, \xi' \times \mathbf{R}^{m'} \to \mathrm{tl}\, \xi'$. Désignons par A l'espace euclidien de toutes les applications linéaires $\mathbf{R}^{m'} \to \mathbf{R}^m$ (i.e. des $m \times m'$-matrices réelles, voir 3.2.1.1 et 3.2.1.7) et envisageons les applications

$$\Phi: L^s(\xi, \xi'; f) \to \mathscr{C}^s\,(\mathrm{bs}\, \xi', A),$$
$$\Psi: \mathscr{C}^s\,(\mathrm{bs}\, \xi', A) \to L^s(\xi, \xi'; f),$$

définies par les formules

$$\{[\Phi\,(\varphi)]\,(b')\}\,(y') = [\mathrm{pr}_2: \mathrm{bs}\, \xi \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m]\,(\mathrm{tl}\, \varphi \circ p'\,(b', y')),$$
$$[\mathrm{tl}\,(\Psi\,(h))]\,(b', y') = p\,(f\,(b'), [h\,(b')]\,(y'))$$

$[\varphi \in L^s(\xi, \xi'; f)$, $b \in \mathrm{bs}\, \xi'$, $y' \in \mathbf{R}^{m'}$, $h \in \mathscr{C}^s\,(\mathrm{bs}\, \xi', A)]$. L'application Ψ (comme, d'ailleurs, Φ) est continue et envoie les $\mathscr{C}^r$-applications dans des $\mathscr{C}^r$-applications. En outre, $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}\, L^s(\xi, \xi'; f)$, de sorte que Ψ applique $\mathscr{C}^s\,(\mathrm{bs}\, \xi', A)$ sur $L^s(\xi, \xi'; f)$. Vu que l'ensemble $\mathscr{C}^r\,(\mathrm{bs}\, \xi', A)$ est dense dans $\mathscr{C}^s\,(\mathrm{bs}\, \xi', A)$ (voir 3.4.6.5), on en déduit que l'ensemble $L^r(\xi, \xi'; f)$ est dense dans $L^s(\xi, \xi'; f)$. (Clarification: le théorème 3.4.6.5 doit être appliqué après transformation de l'espace A en une sphère par addition du point à l'infini; voir 3.4.4.2 et 3.4.4.6).

9. Soit ξ *un fibré vectoriel réel ou complexe à base compacte. Pour* $0 \leqslant s < r \leqslant \infty$, *l'ensemble* $\mathrm{Sec}^r\,\xi$ *est dense dans* $\mathrm{Sec}^s\,\xi$.

Ceci découle du théorème *8*, puisque $\mathrm{Sec}^r\,\xi = L^r\,(\xi, \xi'\,;\ \mathrm{id\ bs}\,\xi)$, où $\xi' = (\mathrm{bs}\,\xi \times \mathsf{R},\ \mathrm{pr}_1,\ \mathrm{bs}\,\xi)$, tandis que $\mathrm{Sec}^s\,\xi = L^s\,(\xi, \xi'\,;\ \mathrm{id\ bs}\,\xi)$; voir *7*.

10. Soient ξ, ξ' *des* $\mathscr{C}^r$*-fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de dimension* n *à base compacte commune. Si* $0 \leqslant s < r \leqslant \infty$, *alors l'ensemble des* $\mathscr{C}^r$*-*$GL\mathsf{R}^n$*-équivalences* $\xi' \to \xi$ *(resp. ensemble des* $\mathscr{C}^r$*-*$GL\mathsf{C}^n$*-équivalences* $\xi' \to \xi$*) est dense dans le sous-ensemble de l'espace* $L^s\,(\xi, \xi'\,;\ \mathrm{id})$ *constitué des* $\mathscr{C}^s$*-*$GL\mathsf{R}^n$*-équivalences (resp. des* $\mathscr{C}^s$*-*$GL\mathsf{C}^n$*-équivalences).*

Ceci découle du théorème *8*, le sous-ensemble en question étant ouvert dans $L^s\,(\xi, \xi'\,;\ \mathrm{id})$.

11 (Corollaire). *Si des* $\mathscr{C}^r$*-fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de dimension* n *à base compacte,* $r \neq a$, *sont* $GL\mathsf{R}^n$*-équivalents (resp.* $GL\mathsf{C}^n$*-équivalents), alors ils sont* $\mathscr{C}^r$*-*$GL\mathsf{R}^n$*-équivalents (resp.* $\mathscr{C}^r$*-*$GL\mathsf{C}^n$*-équivalents).*

12. Si la base d'un fibré vectoriel réel (resp. complexe) ξ *de dimension* n *est une* $\mathscr{C}^r$*-variété compacte,* $1 \leqslant r \leqslant \infty$, *alors* ξ *est* $GL\mathsf{R}^n$*-équivalent (resp.* $GL\mathsf{C}^n$*-équivalent) à un* $\mathscr{C}^r$*-fibré vectoriel réel (resp. complexe). Si la base d'un* $\mathscr{C}^s$*-fibré vectoriel réel (resp. complexe)* ξ *de dimension* n *est une* $\mathscr{C}^r$*-variété compacte,* $1 \leqslant s < r \leqslant \infty$, *alors* ξ *est* $\mathscr{C}^s$*-*$GL\mathsf{R}^n$*-équivalent (resp.* $\mathscr{C}^s$*-*$GL\mathsf{C}^n$*-équivalent) à un* $\mathscr{C}^r$*-fibré vectoriel réel (resp. complexe).*

Comme précédemment, nous nous limiterons au cas réel. Si ξ est un fibré vectoriel réel de dimension n dont la base est une $\mathscr{C}^r$-variété compacte, alors, conformément à 5.3.8 et 3.5.2.13, ξ est $GL\mathsf{R}^n$-équivalent, pour m suffisamment grand, au fibré $f^!\,\mathrm{Gra}\,(m, GL\,(n, \mathsf{R}))$, où f est une application continue de la base bs ξ dans $G\,(m, n)$. Si ξ est un $\mathscr{C}^s$-fibré vectoriel réel de dimension n à base compacte, alors, en vertu du théorème *5*, ξ est $\mathscr{C}^s$*-*$GL\mathsf{R}^n$-équivalent, pour m suffisamment grand, au fibré $f^!\,\mathrm{Gra}\,(m, GL\,(n, \mathsf{R}))$, où f est une $\mathscr{C}^s$-application de la base bs ξ dans $G\,(m, n)$. Dans les deux cas, f est homotope à une $\mathscr{C}^r$-application g : bs $\xi \to G\,(m, n)$ (voir 3.4.6.5, 1.3.6.6 et 3.4.5.10), de sorte que ξ est $GL\mathsf{R}^n$-équivalent à $g^!\,\mathrm{Gra}\,(m, GL\,(n, \mathsf{R}))$ (voir 4.1.5). Dans le premier cas, ceci termine la démonstration, dans le deuxième il suffit de rappeler qu'en vertu de *11*, ξ est $\mathscr{C}^s$*-*$GL\mathsf{R}^n$-équivalent à $g^!\,\mathrm{Gra}\,(m, GL\,(n, \mathsf{R}))$.

Constructions

13. Nous concluons ce sous-paragraphe par un bref passage en revue des constructions décrites au § 5.

Les $\mathscr{C}^s$-sous-fibrés (réels ou complexes) d'un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel ξ sont par définition les sous-fibrés dans le sens de 5.2.2 ou 5.2.3 pour lesquels l'espace total est une $\mathscr{C}^s$-sous-variété de la variété tl ξ ; il

est clair que ce sont des $\mathscr{C}^s$-fibrés vectoriels. On définit de même les $\mathscr{C}^s$-sous-fibrés des $\mathscr{C}^r$-fibrés euclidiens et les $\mathscr{C}^s$-sous-fibrés des $\mathscr{C}^r$-fibrés hermitiens. Les $\mathscr{C}^r$-sous-fibrés des $\mathscr{C}^r$-fibrés sont appelés sous-fibrés tout court.

D'après 5.2.5, dans le cas hermitien et euclidien, chaque sous-fibré η d'un fibré ξ possède un complémentaire orthogonal $\eta^\perp$; il est clair que : $\eta^\perp$ est un $\mathscr{C}^s$-sous-fibré en même temps que η ; l'équivalence canonique entre $\eta^\perp$ et le fibré quotient ξ/η (voir 5.2.6) transforme ξ/η en un $\mathscr{C}^s$-fibré euclidien ou hermitien (et devient elle-même une $\mathscr{C}^s$-équivalence). Grâce à cette observation, dans les cas vectoriels (réel et complexe) le fibré quotient ξ/η devient un $\mathscr{C}^s$-fibré lorsqu'on y introduit une $\mathscr{C}^s$-distance (euclidienne ou hermitienne) ; son choix n'a aucune influence sur le résultat, néanmoins il faut se rappeler que son existence a été établie seulement dans le cas où la base est compacte et $s \neq a$ (voir 6).

Si deux $\mathscr{C}^r$-fibrés vectoriels réels ξ_1, ξ_2 possèdent une base commune sans bord, la construction de la somme $\xi_1 \oplus \xi_2$ exposée dans 5.2.9 en fait un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel réel. Lorsque la base possède un bord, le produit $\xi_1 \times \xi_2$ n'est pas défini comme $\mathscr{C}^r$-fibré, et c'est là une complication qu'on évite en se servant des formules

$$\mathrm{tl}\,(\xi_1 \oplus \xi_2) = \mathrm{tl}\,((\mathrm{pr}\,\xi_1)^!\,\xi_2),$$
$$\mathrm{pr}\,(\xi_1 \oplus \xi_2) = \mathrm{pr}\,(\xi_2 \circ \mathrm{pr}\,((\mathrm{pr}\,\xi_1)^!\,\xi_2)).$$

Dans les hypothèses de 5.2.9, ces formules sont équivalentes à la définition de la somme $\xi_1 \oplus \xi_2$ qu'on y donne ; ici, elles sont équivalentes à la définition précédente dans le cas où il n'y a pas de bord et permettent de la généraliser au cas d'un bord non vide. On peut répéter la même procédure dans les situations vectorielle complexe, euclidienne ou hermitienne. En particulier, ce qui a été dit se rapporte également aux suspensions (voir 5.2.10).

Les $\mathscr{C}^r$-variantes des autres constructions décrites au § 5 sont déjà suffisamment évidentes. En particulier : la conjugaison (voir 5.1.11) conserve la nature du fibré, ainsi un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel complexe reste $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel complexe, de même qu'un $\mathscr{C}^r$-fibré hermitien reste $\mathscr{C}^r$-fibré hermitien ; la décomplexification (voir 5.1.12) transforme un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel complexe en un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel réel, et un $\mathscr{C}^r$-fibré hermitien en un $\mathscr{C}^r$-fibré euclidien ; la complexification (voir 5.2.11) transforme un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel réel en un $\mathscr{C}^r$-fibré vectoriel complexe, et un $\mathscr{C}^r$-fibré euclidien en un $\mathscr{C}^r$-fibré hermitien ; dans les $\mathscr{C}^r$-variantes des théorèmes 5.2.13 et 5.2.14 les équivalences conj et K deviennent des $\mathscr{C}^r$-équivalences.

4. Fibrés normaux et tangents

1. Les principales notions du présent sous-paragraphe, indiquées dans son titre, ont en fait déjà été employées au chapitre 3. Mais

ce n'est que maintenant, lorsque nous disposons de la notion générale de fibré vectoriel différentiable, que nous pouvons leur donner une définition adéquate et les envisager d'un point de vue général correct.

Fibrés tangents

2. Rappelons qu'au chapitre 3, pour chaque variété X de classe $\mathscr{C}^r$, $r \geqslant 1$, nous avions défini les espaces vectoriels réels $\mathrm{Tang}_x X$ ($x \in X$), la $\mathscr{C}^{r-1}$-variété $\mathrm{Tang}\, X$ et la projection $\mathrm{pr}: \mathrm{Tang}\, X \to X$ (voir **3**.1.4.1 et **3**.1.4.2). En comparant ces définitions avec les définitions générales données dans 5.1.2 et 3.2, nous voyons que ($\mathrm{Tang}\, X$, pr, X) est un fibré vectoriel réel de dimension $\dim X$, et, pour $r \geqslant 2$, un $\mathscr{C}^{r-1}$-fibré vectoriel réel de dimension $\dim X$. On l'appelle *fibré tangent de la variété* X et on le note $\mathrm{tang}\, X$.

Exactement de la même manière, en faisant correspondre la définition de la différentielle $df: \mathrm{Tang}\, X \to \mathrm{Tang}\, Y$ de la $\mathscr{C}^r$-application $f: X \to Y$ (voir **3**.1.4.3) aux définitions générales données dans 5.1.14 et 3.2, nous voyons que (df, f) est une $\mathscr{C}^{r-1}$-application linéaire du fibré $\mathrm{tang}\, X$ dans $\mathrm{tang}\, Y$. Si f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^r$, alors (df, f) est un isomorphisme linéaire de classe $\mathscr{C}^{r-1}$.

3. Nous avons déjà, par deux fois, donné la définition d'un champ de vecteurs : une fois pour les variétés différentiables (voir **3**.1.4.5), une autre fois pour les fibrés euclidiens et hermitiens (voir 5.1.15). Maintenant nous voyons que la deuxième définition généralise la première : un champ de vecteurs sur une variété différentiable X est tout simplement un champ de vecteurs dans le fibré tangent $\mathrm{tang}\, X$. En particulier, la parallélisabilité d'une variété différentiable X de dimension n signifie que le fibré $\mathrm{tang}\, X$ est $GL\mathbf{R}^n$-trivial, tandis que la $\mathscr{C}^s$-parallélisabilité de X est la $\mathscr{C}^s$-$GL\mathbf{R}^n$-trivialité du fibré $\mathrm{tang}\, X$. Comparant ceci au théorème 3.11, nous voyons qu'une $\mathscr{C}^r$-variété compacte parallélisable, pour $r \leqslant \infty$, est $\mathscr{C}^{r-1}$-parallélisable.

Une variété différentiable dont le fibré tangent est trivial stable présente une *parallélisabilité stable*. D'après 5.4.4 et le théorème **3**.5.2.13, pour une variété compacte à parallélisabilité stable, la stabilisation a lieu dès la première étape, i.e. la parallélisabilité stable de la variété X de dimension n implique la $GL\mathbf{R}^{n+1}$-trivialité du fibré su $\mathrm{tang}\, X$.

4. Rappelons que, quel que soit le point x d'une variété différentiable X, chaque carte $\varphi \in \mathrm{Atl}_x X$ détermine une φ-base dans l'espace tangent $\mathrm{Tang}_x X$, la matrice de passage de la φ-base à une ψ-base étant la matrice de Jacobi de l'application $\mathrm{loc}(\varphi, \psi)\, \mathrm{id}$ calculée au point $\varphi(x)$. D'où l'on déduit que les valeurs d'une orientation quelconque de la variété X (sur les cartes de $\mathrm{Catl}\, X$) peuvent être correctement rapportées aux bases des espaces $\mathrm{Tang}_x X$ ce qui

a pour effet de munir d'une orientation le fibré tang X. Il est clair que ce passage est inversible, i.e. les orientations d'une variété différentiable X et de son fibré tangent tang X sont en bijection naturelle. En particulier, la variété X est orientable si et seulement si le fibré tang X est orientable, tandis que le fibré tangent d'une variété différentiable orientable de dimension n est un $GL_+\mathsf{R}^n$-fibré.

Nous savons déjà que les variétés parallélisables sont orientables (voir 3.1.4.6 et *3*). Maintenant nous pouvons ajouter que les variétés à parallélisabilité stable sont également orientables.

5. Une particularité attrayante des fibrés tangents est la facilité avec laquelle ils s'induisent des fibrés de Grassmann. A savoir, si j est une immersion de classe $\mathscr{C}^r$ (par exemple, un $\mathscr{C}^r$-plongement) de la variété X dans R^q, alors dj applique chaque espace tangent $\mathrm{Tang}_x X$ sur un plan de dimension n de l'espace R^q qui passe par 0, de sorte qu'on obtient une application $t: X \to G(q, n)$; il est clair que tang X est (à la $\mathscr{C}^{r-1}$-$GL\mathsf{R}^n$-équivalence de correction près) tout simplement $t^!$ Gra $(q, GL(n, \mathsf{R}))$. (Cette observation évidente est en réalité plus ancienne que la théorie des espaces fibrés et stimula son développement.) Si X est orientable, alors on peut enrichir les considérations précédentes en remplaçant la variété $G(q, n)$ par la variété $G_+(q, n)$, la fibre standard $GL\mathsf{R}^n$ par la fibre standard $GL_+\mathsf{R}^n$ et le fibré Gra $(q, GL(n, \mathsf{R}))$ par le fibré Gra $(q, GL_+(n, \mathsf{R}))$. Dans tous les cas, t est *application tangentielle*. Si j est un plongement et il n'y a pas d'orientation, alors t coïncide avec la composée de la transversalisation normale $X \to G(q, q-n)$ et du difféomorphisme canonique $G(q, q-n) \to G(q, n)$ (voir 3.2.2.3).

6. Une variété différentiable dont le fibré tangent est muni d'une distance euclidienne est appelée *espace de Riemann*. La distance dans ce cas est également dite *riemannienne*. Elle est évidemment de classe inférieure ou égale à $\mathscr{C}^{r-1}$ lorsque X est de classe $\mathscr{C}^r$, et il découle du théorème 3.6 que chaque $\mathscr{C}^r$-variété compacte, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, possède effectivement une distance riemannienne de classe $\mathscr{C}^{r-1}$. Cette dernière remarque s'obtient par ailleurs du théorème 3.4.2.1.

Le fibré tangent d'un espace riemannien est généralement envisagé non pas comme un fibré vectoriel, mais comme un fibré euclidien. Si la distance est de classe $\mathscr{C}^s$, $s \geqslant 1$, alors il est un $\mathscr{C}^s$-fibré euclidien.

Fibrés normaux

7. Les données initiales qui permettent de définir un *fibré normal* sont des variétés différentiables X, X' et une immersion $j: X \to X'$. Le cas le plus important est celui où j est un plongement. Dans les définitions ci-dessous $n = \dim X$, $n' = \dim X'$.

Commençons par la situation la plus simple: X est une sous-variété de l'espace riemannien X', j étant une inclusion. Les identifications usuelles font de tang X un sous-fibré du fibré tang $X'|_X$

et, d'après 5.2.5, le fibré tang X possède dans tang $X'|_X$ un complémentaire orthogonal $(\text{tang } X)^\perp$. Ce dernier est un fibré euclidien de dimension $n' - n$ à base X; on le dit normal pour X. Notation : norm X. Si X et X' sont de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$, $r \geqslant 2$, et la distance riemannienne, de classe $\mathscr{C}^{r-1}$, alors norm X est un $\mathscr{C}^{\geqslant r-1}$-fibré euclidien ; voir 3.13. Dans tous les cas la somme tang $X \oplus$ norm X est canoniquement $O\mathbb{R}^{n'}$-équivalente à la restriction tang $X'|_X$ et si en outre X et X' sont de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r}$, $r \geqslant 2$, cette équivalence est de classe $\mathscr{C}^{r-1}$.

Pour définir le fibré normal pour une immersion $j : X \to X'$ quelconque quand il n'y a plus de distance riemannienne, on doit remplacer la restriction tang $X'|_X$ par le fibré induit $j^!$ tang X' et passer au complémentaire orthogonal au lieu de passer au fibré quotient. Cela signifie que le fibré normal norm j de l'immersion j d'une variété différentiable X dans la variété différentiable X' se définit par la formule

$$\text{norm } j = j^! \text{ tang } X' / \text{Im corr } (dj, j).$$

C'est un fibré vectoriel réel de dimension $n' - n$ à base X. La somme tang $X \oplus$ norm j est canoniquement $GL\mathbb{R}^{n'}$-équivalente au fibré induit $j^!$ tang X'. En ce qui concerne les classes de différentiabilité du fibré norm j et de l'équivalence canonique indiquée $j^!$ tang $X' \to$ $\to$ tang $X \oplus$ norm j, nous ne pouvons affirmer que si X' est compact ou difféomorphe à un ouvert d'une variété compacte, tandis que j est de classe $\mathscr{C}^r$ $(2 \leqslant r \leqslant \infty)$, alors norm j est un fibré vectoriel réel de classe $\mathscr{C}^{\geqslant r-1}$, et l'équivalence canonique $j^!$ tang $X' \to$ $\to$ tang $X \oplus$ norm j est de classe $\mathscr{C}^{r-1}$. Ces restrictions sont dues évidemment au fait que nous n'avons pas de théorèmes qui nous garantiraient l'existence d'une distance riemannienne dans la situation non compacte ou analytique.

Lorsque j est une inclusion, on peut écrire norm X à la place de norm j.

Remarquons également que, comme on le voit d'après la définition de norm j, l'orientabilité de deux des trois fibrés $j^!$ tang X', tang X, norm j implique celle du troisième et les orientations de deux d'entre eux déterminent canoniquement celle du troisième (voir 5.2.7). En comparant ceci avec ce qui a été dit dans *4*, nous voyons que si la variété X' est orientable, l'orientabilité du fibré norm j est équivalente à celle de la variété X ; si la variété X' est orientée, l'orientation de la variété X et celle du fibré norm j se déterminent canoniquement l'une l'autre.

8. Les notions de fibrés tangents et normaux permettent de donner une formulation plus complète du théorème 3.4.8.2.

L'amélioration de l'énoncé concerne la troisième partie du théorème où l'on affirme que les homomorphismes linéaires fact $d_{x_1} f_1$ sont des isomorphismes. Maintenant nous pouvons dire que, mis

ensemble, ils constituent avec l'application ab $f_1 : X_{12} \to X_2$ un isomorphisme linéaire du fibré normal de la variété X_{12} dans le fibré normal de la variété X_2 (le premier fibré normal est choisi dans X_1, le second dans X'). Si la variété X' est compacte et $2 \leqslant r \leqslant \infty$, alors cet isomorphisme linéaire norm $X_{12} \to$ norm X_2 est de classe $\mathscr{C}^{r-1}$.

La nouvelle proposition qu'on ajoute au théorème se rapporte aux orientations ; elle affirme que, sous les hypothèses du théorème 3.4.8.2, si les variétés X_1, X', X_2 sont orientables, alors la variété X_{12} est orientable, tandis que si les variétés X_1, X', X_2 sont orientées, alors elles munissent X_{12} d'une orientation canonique ; ceci découle de *4* et *7*. En particulier, sous les hypothèses du théorème 3.4.8.3, l'orientabilité des variétés X' et X_1, X_2 implique celle de la variété $X_1 \cap X_2$, tandis que les orientations des variétés X' et X_1, X_2 déterminent une orientation canonique de $X_1 \cap X_2$.

9. Une variété différentiable compacte de dimension n est à parallélisabilité stable si et seulement si elle admet un plongement différentiable avec un fibré normal $GL\mathsf{R}^{q-n}$-trivial dans un certain R^q.

Cette condition est suffisante, parce que la somme tang $X \oplus$ $\oplus$ norm j, où j est le plongement indiqué, est $GL\mathsf{R}^q$-équivalente au fibré $j^!$ tang R^q. Pour démontrer sa nécessité, commençons par un plongement différentiable quelconque $j : X \to \mathsf{R}^q$ et considérons le plongement composé $X \xrightarrow{j} \mathsf{R}^q \xrightarrow{\text{in}} \mathsf{R}^{q+n+k}$, où k est si grand que la suspension su^k tang X est $GL\mathsf{R}^{n+k}$-triviale (en fait, il suffit de prendre $k = 1$; voir *3*). Le fibré normal de ce plongement composé est la suspension su^{n+k} norm j, or elle est $GL\mathsf{R}^{q+k}$-triviale, étant $GL\mathsf{R}^{q+k}$-équivalente au fibré

$$\text{norm } j \oplus \text{su}^k \text{ tang } X = \text{su}^k (\text{norm } j \oplus \text{tang } X) = \text{su}^k (j^! \text{ tang } \mathsf{R}^q).$$

Le cas complexe

10. Les définitions du fibré tangent tang X, de la distance de Riemann et des fibrés normaux norm X, norm j peuvent être répétées mot à mot pour le cas des variétés complexes. Les fibrés deviennent complexes, la distance riemannienne se remplace par la distance hermitienne, tandis que j est supposé être une immersion holomorphe (i.e. localement est un plongement holomorphe). Si $f : X \to X'$ est une application holomorphe, alors (df, f) est une application linéaire du fibré tang X' dans tang X'. Quant à l'application tangentielle, sa définition et ses propriétés ne changent pas, mais elle devient moins universelle (voir 3.1.6.10). Enfin, la décomplexification d'une variété complexe (voir 3.1.6.9) entraîne celle de son fibré tangent (voir 5.1.12 et 3.13) et transforme la distance hermitienne en une distance riemannienne.

Il faut reconnaître que ces définitions ont un caractère éclectique. Le manque de suite logique est dû au fait que la notion de structure différentielle qui est à la base de notre théorie des fibrés vectoriels différentiables est essentiellement réelle même dans le cas des fibrés vectoriels complexes, tandis que les fibrés tangents et normaux possèdent dans le cas complexe une *structure* différentiable complexe supplémentaire, appelée *structure holomorphe*. Malheureusement, la théorie des fibrés vectoriels holomorphes dépasse le cadre de notre cours.

5. Degrés

1. Ce sous-paragraphe est consacré aux applications des faits les plus simples de la topologie différentielle à la théorie de l'homotopie. A savoir, nous définissons, pour chaque application continue $f: (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$, où X est une variété compacte différentiable orientée et Y une variété compacte différentiable orientée connexe de même dimension, un nombre entier qui ne change pas par homotopie de l'application f. Ce nombre est appelé *degré* de l'application f et noté $\deg f$.

Quoique le degré $\deg f$ soit une caractéristique globale de l'application f supposée au plus continue, notre approche du problème sera infinitésimale : nous supposerons tout d'abord que f appartient à l'ensemble $\mathscr{C}(X, \partial X; Y, \partial Y) \cap \mathscr{C}^1(X, Y)$ et que int Y possède un point y auquel f est transversale. Envisageons l'ensemble $f^{-1}(y)$. Il se compose d'un nombre fini de points chacun desquels possède un voisinage que la restriction de f applique difféomorphiquement sur un certain voisinage du point y (voir 3.4.8.2 et 3.1.5.5) ; chacun des difféomorphismes indiqués conserve ou inverse l'orientation, si les voisinages sont orientés conformément aux orientations de X et Y (voir 4.8). La différence entre le nombre de points de $f^{-1}(y)$ pour lesquels l'orientation est conservée et le nombre de points pour lesquels elle est inversée est appelée *degré de l'application f au point y* ; on la note $\deg_y f$. Plus populaire est l'énoncé : $\deg_y f$ *est le nombre algébrique des images inverses du point y.*

L'hypothèse que le point y est un point intérieur de Y est essentielle dans cette définition du degré $\deg_y f$, pourtant on peut l'appliquer à un point du bord y si l'on suppose que f appartient à l'ensemble $\mathscr{C}^1_\partial(X, Y) \cap \mathscr{C}(X, \text{int } X; Y, \text{int } Y)$ et que l'application ab f : $\partial X \to \partial Y$ est transversale à y. Le degré $\deg_y f$ coïncide évidemment dans ce cas avec le degré $\deg_y$ [ab f : $f^{-1}(Z) \to Z$], où Z est la composante de la variété $\partial Y \ni y$.

Remarquons également que si le degré est défini pour un point y (i.e. $y \in \text{int } Y$, $f \in \mathscr{C}(X, \partial X; Y, \partial Y) \cap \mathscr{C}^1(X, Y)$ et f est transversale à y, ou $y \in \partial Y$, $f \in \mathscr{C}^1_\partial(X, Y) \cap \mathscr{C}(X, \text{int } X; Y, \text{int } Y)$, tandis que ab f : $\partial X \to \partial Y$ est transversale à y), alors il est

défini pour chaque point y' d'un certain voisinage du point y dans Y et $\deg_{y'} f = \deg_y f$.

2 (Lemme). *Soient X, Y des $\mathscr{C}^\infty$-variétés compactes orientées de même dimension, Y étant connexe, et soient g, h des applications appartenant à*

$$\mathscr{C}^\infty_\partial (X, Y) \cap \mathscr{C} (X, \operatorname{int} X ; Y, \operatorname{int} Y).$$

Soient ensuite y, z des points de Y tels que les degrés $\deg_y g$, $\deg_z h$ *sont définis (voir* 1). *Si les applications*

$$\operatorname{rel} g, \operatorname{rel} h : (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$$

sont homotopes, alors $\deg_z h = \deg_y g$.

D é m o n s t r a t i o n. Laissons de côté le cas trivial $\dim Y = 0$ et supposons tout d'abord que $h = g$. Conformément à *1*, les points y, z possèdent des voisinages U, V tels que $y' \in U$, $z' \in V$ implique $\deg_{y'} g = \deg_y g$, $\deg_{z'} g = \deg_z g$. Il est clair également que les points y, z peuvent être joints par un chemin qui est un $\mathscr{C}^\infty$-plongement de l'intervalle fermé I dans Y ; les théorèmes 3.4.1.4 et 3.4.7.7 impliquent l'existence d'un chemin $s : I \to \operatorname{int} Y$ avec $s(0) \in U$, $s(1) \in V$ qui est également un $\mathscr{C}^\infty$-plongement tout en étant transversal à g. Envisageons l'image inverse $g^{-1}(s(I))$. C'est une $\mathscr{C}^\infty$-sous-variété orientée compacte unidimensionnelle de la variété X à bord $g^{-1}(s(0)) \cup g^{-1}(s(1))$ (voir 3.4.8.2 et 4.8) ; il est clair que

$$\deg_{s(0)} g = \deg_{s(0)} \operatorname{ab} g, \quad \deg_{s(1)} g = \deg_{s(1)} \operatorname{ab} g,$$

où $\operatorname{ab} g = [\operatorname{ab} g : g^{-1}(s(I)) \to s(I)]$. Mais la contribution d'un point de $g^{-1}s(1)$ au degré $\deg_{s(1)} \operatorname{ab} g$ est égale à la valeur de l'orientation héritée par ce point, envisagé comme composante du bord, de l'orientation de $g^{-1}(s(I))$; la contribution d'un point de $g^{-1}(s(0))$ au degré $\deg_{s(0)} \operatorname{ab} g$ est inverse à la valeur de l'orientation héritée par ce point, comme composante du bord, de l'orientation de $g^{-1}(s(I))$. Par conséquent, $\deg_{s(1)} g - \deg_{s(0)} g$ est la différence entre le nombre de points du bord de la variété $g^{-1}(s(I))$ qui obtiennent de $g^{-1}(s(I))$ l'orientation $+1$ et le nombre de points qui obtiennent de $g^{-1}(s(I))$ l'orientation -1 ; cette différence est nulle, puisque chacune des composantes de la variété $g^{-1}(s(I))$ est difféomorphe à S^1 ou à D^1 (voir 3.5.3.1).

Oublions maintenant l'hypothèse $h = g$ mais supposons que Y est fermée. Alors X est également fermée ; le fait que les applications g, h sont homotopes implique que l'on peut les lier par une $\mathscr{C}^\infty$-homotopie F (voir 3.4.6.6). Il est clair que l'application $\Phi : X \times I \to Y \times I$, définie par la formule $\Phi(x, t) = (F(x, t), t)$, appartient à l'intersection

$$\mathscr{C}^\infty_\partial (X \times I, Y \times I) \cap \mathscr{C} (X \times I, \operatorname{int} (X \times I) ; \\ Y \times I, \operatorname{int} (Y \times I)),$$

et puisque les applications ab $\Phi: X \times 0 \to Y \times 0$, ab $\Phi: X \times 1 \to Y \times 1$ se transforment, après identification de $X \times 0$, $X \times 1$ avec X et de $Y \times 0$, $Y \times 1$ avec Y, en g, h, alors $\deg_{(y,\ 0)} \Phi = \deg_y g$ et $\deg_{(z,\ 1)} \Phi = \deg_z h$. Mais, d'après ce que nous avons démontré, $\deg_{(z,\ 1)} \Phi = \deg_{(y,\ 0)} \Phi$, de sorte que $\deg_z h = \deg_y g$.

Enfin, si Y a un bord, nous trouvons dans une certaine composante Z de ce bord un point y' auquel l'abréviation ab $g: \partial X \to \partial Y$ est transversale, et un point z' auquel l'abréviation ab $h: \partial X \to \partial Y$ est transversale. D'après ce que nous avons déjà démontré,

$$\deg_y g = \deg_{y'} g, \qquad \deg_z h = \deg_{z'} h,$$

et d'après *1*,

$$\deg_{y'} g = \deg_{y'} [\text{ab } g: g^{-1}(Z) \to Z],$$
$$\deg_{z'} h = \deg_{z'} [\text{ab } h: h^{-1}(Z) \to Z].$$

Mais

$$\deg_{y'} [\text{ab } g: g^{-1}(Z) \to Z] = \deg_{z'} [\text{ab } h: h^{-1}(Z) \to Z]; \qquad (1)$$

en effet, $h^{-1}(Z) = g^{-1}(Z)$, puisque rel g, rel h sont homotopes et donc l'égalité (1) est une conséquence de la partie du lemme que nous venons de démontrer.

3 (Lemme). *Pour des $\mathscr{C}^\infty$-variétés compactes quelconques X, Y l'ensemble $\mathscr{C}^\infty_\partial(X, Y) \cap \mathscr{C}(X, \text{int } X; Y, \text{int } Y)$ est dense dans $\mathscr{C}(X, \partial X; Y, \partial Y)$.*

Démonstration. Construisons les doubles dopp X, dopp Y avec des cols bilatères

$$k: \partial X \times D^1 \to \text{dopp } X, \qquad l: \partial Y \times D^1 \to \text{dopp } Y$$

et fixons un $\mathscr{C}^\infty$-plongement j: dopp $Y \to \mathbf{R}^q$, une $\mathscr{C}^\infty$-transversalisation τ de la restriction $j|_{\partial Y}$ et un tube propre $\text{Tub}_\tau \rho$. Pour l'application f appartenant à $\mathscr{C}(X, \partial X; Y, \partial Y)$ et un nombre positif ε donnés il suffit de trouver une application g appartenant à $\mathscr{C}^\infty_\partial(X, Y) \cap \mathscr{C}(X, \text{int } X; Y, \text{int } Y)$ telle que dist $(j(f(x)), j(g(x))) < \varepsilon$ pour tout point $x \in X$. Pour trouver une telle application g, nous construirons successivement trois applications auxiliaires h_1, h_2, h_3: dopp $X \to$ dopp Y.

L'application h_1 se définit très simplement: nous posons

$$h_1(x) = f(x), \ h_1(\text{cop}(x)) = \text{op}(f(x)), \ x \in X.$$

Pour construire h_2, fixons un nombre positif δ inférieur à 1 tel que

(i) dist $(j \circ l(z, t), j \circ l(z, t')) < \varepsilon/4$ si $|t - t'| < \delta$, $z \in \partial Y$; $t, t' \in D^1$;

(ii) dist $(j(h_1(k(z, t))), j(h_1(k(z, t')))) < \varepsilon/4$ lorsque $|t - t'| < \delta$, $z \in \partial Y$; $t, t' \in D^1$;

(iii) pour chaque point z de ∂Y, la boule de centre $j(z)$ et de rayon δ est contenue dans $\text{Tub}_\tau \rho$; l'image de cette boule par l'appli-

cation $j \circ \mathrm{pr}_\tau : \mathrm{Tub}_\tau\, \rho \to \mathsf{R}^q$ est contenue dans une boule de centre $j(z)$ et de rayon $\varepsilon/4$. (L'existence d'un tel δ découle de la continuité des applications j, k, l, h_1 et pr_τ.) Fixons ensuite une $\mathscr{C}^\infty$-application $\varphi : \partial X \to \partial Y$, telle que $\mathrm{dist}(j(\varphi(z)), (j \circ f(z)) < \delta$ pour chaque point z de ∂X (l'existence d'une telle application φ découle de 3.4.4.2) et définissons l'application $\varphi_t : \partial X \to \partial Y$ pour $t \in I$ en posant

$$\varphi_t(x) = \mathrm{pr}_\tau(tj(\varphi(x)) + (1-t)\, j \circ f(x)).$$

Fixons enfin une $\mathscr{C}^\infty$-fonction $\alpha : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ telle que $\alpha(t) = 0$ pour $|t| \leqslant 1/3$ et $\alpha(t) = 1$ pour $|t| \geqslant 2/3$; définissons les applications $k_1 : X \to X$, $l_1 : Y \to Y$ par les formules

$$\begin{cases} k_1(k(z, t)) = k(z, (1-\delta)t + \delta) & \text{si } z \in \partial X,\ t \in I, \\ k_1(x) = x & \text{si } x \in X \setminus k(\partial X \times I), \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_1(l(z, t)) = l(z, (1-\delta)t + \delta) & \text{si } z \in \partial Y,\ t \in I, \\ l_1(y) = y & \text{si } y \in Y \setminus l(\partial Y \times I). \end{cases}$$

Il est clair que k_1 et l_1 sont des plongements topologiques. Nous définissons h_2 par les formules

$$h_2(k(z, t)) = l(\varphi_{\alpha(\delta t)}(z), t) \quad \text{si} \quad z \in \partial X,\ |t| < \delta,$$

$$\left.\begin{aligned} h_2(x) &= l_1(f(k_1^{-1}(x))), \\ h_2(\mathrm{cop}(x)) &= \mathrm{cop}(l_1(f(k_1^{-1}(x)))) \end{aligned}\right\} \text{ si } x \in X \setminus k(\partial X \times [0, \delta)).$$

Il est clair que $h_2 \in \mathscr{C}(\mathrm{dopp}\, X, \mathrm{int}\, X, \partial X; \mathrm{dopp}\, Y, \mathrm{int}\, Y, \partial Y)$; $\mathrm{dist}(j \circ h_1(x), j \circ h_2(x)) < \varepsilon/2$ pour chaque point $x \in \mathrm{dopp}\, X$; la restriction de l'application h_2 à $k(\partial X \times [-\delta/3, \delta/3])$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$; lorsque $z \in \partial X$, on a

$$\mathrm{Im}\, d_z\left(h_2\Big|_{k\left(\partial X \times [-\frac{\delta}{3}, \frac{\delta}{3}]\right)}\right) \not\subset \mathrm{Tang}_{h_2(z)} \partial Y.$$

Enfin, en guise de h_3 nous prenons une $\mathscr{C}^\infty$-application quelconque de la variété $\mathrm{dopp}\, X$ dans $\mathrm{dopp}\, Y$ qui coïncide avec h_2 sur $k(\partial X \times [-\delta/6, \delta/6])$ et possède les propriétés suivantes: $h_3(X \setminus k(\partial X \times [0, \delta/6])) \subset \mathrm{int}\, Y$; $h_3(\mathrm{cop}(X \setminus k(\partial X \times [0, \delta/6]))) \subset \mathrm{cop}(\mathrm{int}\, Y)$; $\mathrm{dist}(j \circ h_3(x), j \circ h_2(x)) < \varepsilon/2$ pour chaque point $x \in X$. (L'existence de h_3 découle du théorème 3.4.4.8.) Il est clair que $h_3(X) \subset Y$.

L'application g que nous voulons construire se définit à l'aide de h_3 par la formule $g = [\mathrm{ab}\, h_3 : X \to Y]$. Le fait que g possède les propriétés nécessaires est évident.

4. Soient (comme dans *1*) X, Y des variétés différentiables compactes orientées de même dimension, Y étant connexe; soit f une application appartenant à $\mathscr{C}(X, \partial X; Y, \partial Y)$. Prenons une restriction des structures différentielles des variétés X, Y à leurs $\mathscr{C}^\infty$-

structures (voir 3.4.9.8) et trouvons dans $\mathscr{C}_\partial^\infty(X, Y) \cap \mathscr{C}(X, \text{int } X; Y, \text{int } Y)$ une application g si proche de f (dans le sens de $\mathscr{C}^0$) que les applications $f, g: X \to Y$ et ab f, ab $g: \partial X \to \partial Y$ sont homotopes (voir *3*, 3.4.5.10, 1.3.6.6). Il découle du lemme *2* que le degré $\deg_y g$, calculé en un point intérieur quelconque y de la variété Y, ce point étant un point de transversalité de g, ne dépend ni du choix de g ni du choix de y; d'autre part, il découle de 3.4.6.10 et de 3.4.1.6 que $\deg_y g$ ne dépend pas non plus de la manière employée pour prendre la restriction des structures différentielles des variétés X, Y (en vertu des théorèmes indiqués, les $\mathscr{C}^\infty$-variétés obtenues d'une variété compacte différentiable par deux restrictions de la structure différentielle peuvent être liées par un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme aussi proche que l'on veut, dans le sens de $\mathscr{C}^0$, du difféomorphisme identique). C'est ce nombre que l'on appelle degré de l'application f. Notation: $\deg f$.

Les principales propriétés du degré sont des conséquences immédiates de sa définition et des lemmes *2*, *3*. Ces propriétés sont les suivantes:

(i) si deux applications $f, f': (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$ sont homotopes, alors $\deg f' = \deg f$ (ceci découle du lemme *2*);

(ii) le degré de la composée des applications

$$(X, \partial X) \to (Y, \partial Y) \xrightarrow{g} (Z, \partial Z)$$

est égal à $\deg f \deg g$ (ceci découle directement de la définition du degré);

(iii) le degré de l'identité est égal à 1 (c'est évident);

(iv) si $f: (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$ est une équivalence d'homotopie, alors $\deg f = \pm 1$ (démonstration: si g est l'application homotopiquement inverse, alors

$$\deg f \deg g = \deg (g \circ f) = \deg \text{id } (X, \partial X) = 1);$$

(v) si l'image de la variété X par l'application $f: (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$ ne recouvre pas Y, alors $\deg f = 0$ (en effet, f admet une approximation aussi proche que l'on veut appartenant à $\mathscr{C}_\partial^\infty(X, Y) \cap \mathscr{C}(X, \text{int } X; Y, \text{int } Y)$ ayant la même propriété);

(vi) si Z est une composante quelconque du bord de la variété Y, alors

$$\deg [f: (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)] = \deg [\text{ab } f: f^{-1}(Z) \to Z]$$

(ceci découle de ce qui a été dit dans *1*), en particulier, $\deg f = 0$ si X est fermée tandis que Y ne l'est pas).

En guise d'exemple, considérons les applications

$$f: (D^n, S^{n-1}) \to (D^n, S^{n-1}) \quad \text{et} \quad \text{ab } f: S^{n-1} \to S^{n-1}$$

pour $n \geqslant 2$ définies par une $n \times n$-matrice orthogonale v. Il est évident que $\deg f = \deg \text{ab } f = \det v$, i.e. $\deg f = \deg \text{ab } f = 1$,

si $v \in SO(n)$ et $\deg f = \deg \mathrm{ab}\, f = -1$, si $v \in O(n) \setminus SO(n)$. Ainsi le degré de la transformation antipodale de la sphère S^{n-1} (définie par la formule $x \mapsto -x$) est égal à 1 si n est pair et à -1 si n est impair.

Le cas non orienté

5. En laissant de côté les orientations et en remplaçant les nombres entiers par les résidus modulo 2 on peut définir, de même que dans *1*, *2*, *4*, le degré $\deg f \in \mathbb{Z}_2$ pour toute application continue $f\colon (X, \partial X) \to (Y, \partial Y)$, où X est une variété compacte différentiable et Y une variété compacte différentiable connexe (l'orientabilité n'est pas nécessaire). Cette définition conserve toutes les propriétés du degré à valeurs entières énumérées dans *4*. Dans le cas orienté, lorsque sont définis le degré entier et le degré modulo 2, aucune confusion n'est à craindre, malgré l'emploi d'une même notation, grâce au contexte.

Applications

6. Une variété différentiable fermée de dimension positive n'est pas contractile.

Dans le cas non connexe, ceci est évident, dans le cas connexe le degré de l'application identique d'une variété connexe est égal à 1, alors que le degré de l'application qui envoie la variété en un seul point est égal à 0. (Il s'agit des degrés dans $\mathbb{Z}_2$ définis dans *5*.)

7. Si $n \neq m$, alors la sphère S^n n'est pas homotopiquement équivalente à la sphère S^m.

En effet, si $m < n$, chaque application continue de S^m dans S^n est homotope à l'application constante (voir 2.3.2.3 et 2.3.1.6), tandis que l'application $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$ n'est pas homotope à l'application constante (voir *6*).

8. Le bord d'une variété compacte différentiable non vide n'est pas son rétracte.

Il suffit d'effectuer la démonstration dans le cas d'une variété différentiable compacte connexe X à bord non vide. Soient $\rho\colon X \to \partial X$ une rétraction et Z une composante du bord ∂X. Envisageons la composée des applications $X \xrightarrow{\rho} \partial X \xrightarrow{\mathrm{in}} X$. Puisque son image ne recouvre pas X, son degré est nul (voir *4* et *5*). Mais, d'autre part, ce degré coïncide avec le degré de l'application $\mathrm{ab}\,(\mathrm{in} \circ \rho)\colon Z \to Z$ qui est l'identité; ce degré est donc égal à 1.

9. Chaque application continue $D^n \to D^n$ possède un point fixe.

Démonstration. Une application continue $f\colon D^n \to D^n$ sans point fixe aurait engendrée une rétraction $D^n \to S^{n-1}$ qui fait correspondre au point x sa projection sur S^{n-1} à partir du point $f(x)$. Or, l'existence d'une rétraction $D^n \to S^{n-1}$ est en contradiction avec le théorème *8*.

10. Si un espace localement euclidien de dimension m est homéomorphe à un espace localement euclidien de dimension n, alors $n = m$ (cf. 3.1.1.4).

Démonstration. Puisqu'un point de l'espace R^q est contenu dans l'intérieur d'un simplexe euclidien de dimension q dans R^q, chaque point d'un espace localement euclidien de dimension q est un point intérieur d'un sous-ensemble à triangulation finie, dans lequel son link est homéomorphe à S^{q-1}. D'après le théorème 2.2.6.4, ce link est homotopiquement invariant, or les sphères S^{m-1} et S^{n-1} ne sont pas homotopiquement équivalentes lorsque $n \neq m$ (voir *7*).

11. Le théorème *10* permet de mieux comprendre non seulement la définition d'un espace localement euclidien, mais aussi celle d'un espace cellulaire. A savoir, il montre que la dimension d'une cellule est uniquement déterminée par celle-ci, par conséquent, la fonction de dimension que nous avons introduite dans la définition d'une partition cellulaire sous forme d'élément supplémentaire de cette structure est en fait déterminée par la partition elle-même.

12. Le bord du demi-espace R^n_- *est* R^{n-1}_1 (cf. 3.1.1.4).

Pour la démonstration, il suffit d'établir que le point 0 de R^n_- ne possède pas de voisinage homéomorphe à R^n; voir 3.1.1.4.

Si un tel voisinage existait, le point 0 serait un point intérieur d'un sous-ensemble à triangulation finie, dans lequel le link de 0 serait homéomorphe à S^{n-1} (cf. la démonstration du théorème *10*). D'autre part, le point 0 est un point intérieur pour un sous-ensemble à triangulation finie dans lequel son link est homéomorphe à D^{n-1}: un tel sous-ensemble est un simplexe euclidien de dimension n quelconque situé dans R^n_- et contenant 0 à l'intérieur d'une de ses faces de dimension $n - 1$. Puisque la sphère S^{n-1} est non contractile (voir *6*), tandis que la boule D^{n-1} l'est, nous obtenons une contradiction avec le théorème 2.2.6.4.

6. Exercices

1. Démontrer que si $r \leqslant \infty$ et f est une submersion de classe $\mathscr{C}^r$ d'une $\mathscr{C}^r$-variété compacte X dans une $\mathscr{C}^r$-variété fermée Y, alors (X, f, Y) est un $\mathscr{C}^r$-fibré. (Avec le théorème 1.3, cette assertion nous montre que si $r \leqslant \infty$ et f est une submersion de classe $\mathscr{C}^r$ d'une $\mathscr{C}^r$-variété compacte X dans une $\mathscr{C}^r$-variété Y, alors (X, f, Y) est toujours un $\mathscr{C}^r$-fibré.)

2. Soit $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et supposons que ξ est un fibré de classe $\mathscr{C}^r$ à base fermée. Démontrer l'existence d'un col $k: \partial \operatorname{tl} \xi \times I \to \operatorname{tl} \xi$ tel que $k(z \times I) \subset \operatorname{pr} \xi^{-1}(\operatorname{pr} \xi(z))$ pour chaque point $z \in \partial \operatorname{tl} \xi$.

3. Soit $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et supposons que ξ est un $\mathscr{C}^r$-fibré tel que $\partial \operatorname{tl} \xi = \operatorname{pr} \xi^{-1}(\partial \operatorname{bs} \xi)$. Démontrer l'existence d'un col $k: \partial \operatorname{bs} \xi \times$

$\times I \to \mathrm{bs}\,\xi$, $l\colon \partial\,\mathrm{tl}\,\xi \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \partial\,\mathrm{tl}\,\xi \times I & \xrightarrow{\;l\;} & \mathrm{tl}\,\xi \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ab\,pr}\,\xi\times \mathrm{id}\,I} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}\,\xi} \\ \partial\,\mathrm{bs}\,\xi \times I & \xrightarrow{\;k\;} & \mathrm{bs}\,\xi \end{array}$$

est commutatif.

4. Montrer que si $r \leqslant \infty$, alors pour tout $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibré ξ à $\mathrm{tl}\,\xi$ et $\mathrm{bs}\,\xi$ compacts, l'ensemble $\mathrm{Sec}^r\,\xi$ est dense dans $\mathrm{Sec}^s\,\xi$, quel que soit $s < r$. (C'est une généralisation du théorème 2.7 pour $r \neq a$.)

5. Montrer que tout $\mathscr{C}^{\geqslant r}$-fibré ξ à $\mathrm{tl}\,\xi$ et $\mathrm{bs}\,\xi$ compacts est $\mathscr{C}^r$-isomorphe à un $\mathscr{C}^\infty$-fibré. (Cf. 2.8.)

6. Montrer que le fibré su tang $\mathsf{R}P^n$ est $\mathscr{C}^a$-$GL\mathsf{R}^{n+1}$-équivalent à la somme de $n+1$ exemplaires du fibré Gra $(n+1,\ GL(1,\ \mathsf{R}))$, tandis que le fibré su tang $\mathsf{C}P^n$ est $\mathscr{C}^a$-$GL\mathsf{C}^{n+1}$-équivalent à la somme de $n+1$ exemplaires du fibré Gra $(n+1,\ GL\,(1,\ \mathsf{C}))$.

7. Montrer que le fibré normal du $\mathscr{C}^a$-plongement $G\,(m,\ n) \to G\,(m+1,\ n)$ décrit dans 3.2.2.3 est $\mathscr{C}^a$-$GL\mathsf{R}^n$-équivalent au fibré Gra $(m,\ GL\,(n,\ \mathsf{R}))$, tandis que le fibré normal du $\mathscr{C}^a$-plongement $\mathsf{C}G\,(m,\ n) \to \mathsf{C}G\,(m+1,\ n)$ décrit dans 3.2.2.7 est $\mathscr{C}^a$-$GL\mathsf{C}^n$-équivalent au fibré Gra $(m,\ GL\,(n,\ \mathsf{C}))$.

8. Soient $p_1, \ldots, p_{n+1}$ des polynômes complexes homogènes de degré m en $n+1$ variables qui s'annulent simultanément seulement au point 0. Montrer que l'application $\mathsf{C}P^n \to \mathsf{C}P^n$ définie par la formule

$$(z_1 : \ldots : z_{n+1}) \mapsto (p_1\,(z_1,\ \ldots,\ z_{n+1}) : \ldots : p_{n+1}\,(z_1,\ \ldots,\ z_{n+1}))$$

est de degré m^n.

9. Montrer que pour $n \geqslant 1$ chaque application continue de la sphère S^n dans elle-même à degré différent de $(-1)^{n+1}$ possède un point fixe.

10. Montrer que pour $n \geqslant 1$ chaque application continue de degré impair de la sphère S^n en elle-même envoie tout couple de points antipodaux en un couple de points antipodaux.

11. Montrer que pour $n > 1$ impair le degré de toute application continue de la sphère S^n dans $\mathsf{R}P^n$ est pair.

12. Soit f une application simpliciale du simplexe standard de dimension deux sur le simplexe standard unidimensionnel. Montrer que le cylindre simplicial Scyl f n'est pas homéomorphe à Cyl f.

CHAPITRE 5

GROUPES D'HOMOTOPIE

§ 1. THÉORIE GÉNÉRALE

1. Groupes d'homotopie absolus

1. Soient (X, x_0) un espace à point de base et r un entier non négatif. Convenons de désigner l'ensemble $\mathscr{C}(I^r, \mathrm{Fr}\, I^r; X, x_0)$ de toutes les applications continues du couple $(I^r, \mathrm{Fr}\, I^r)$ dans le couple (X, x_0) plus brièvement par $\mathrm{Sph}_r(X, x_0)$, et l'ensemble des classes d'homotopies correspondantes (i.e. $\pi(I^r, \mathrm{Fr}\, I^r; X, x_0)$) par $\pi_r(X, x_0)$. Les éléments de l'ensemble $\mathrm{Sph}_r(X, x_0)$ sont appelés *sphéroïdes de dimension r de l'espace X d'origine en x_0.*

Pour $r > 0$, nous définissons le *produit* $\varphi\psi$ *des sphéroïdes* $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$ par la formule

$$\varphi\psi(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \begin{cases} \varphi(2t_1, t_2, \ldots, t_r) & \text{si } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_r) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases} \tag{1}$$

$\varphi\psi \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$, et le sphéroïde φ^{-1}, *inverse* du sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$, par la formule

$$\varphi^{-1}(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \varphi(1 - t_1, t_2, \ldots, t_r),$$

$\varphi^{-1} \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$. Il est clair que si un sphéroïde φ_1 est homotope à φ, et un sphéroïde ψ_1 homotope à ψ, alors le sphéroïde $\varphi_1\psi_1$ est homotope à $\varphi\psi$. Par conséquent, la formule (1) détermine une multiplication dans $\pi_r(X, x_0)$. *Cette multiplication est associative, la classe d'homotopie du sphéroïde constant* const *(qui applique I^r dans x_0) joue le rôle de l'unité bilatère et les classes d'homotopie des sphéroïdes φ, φ^{-1} sont inverses l'une de l'autre.*

La première assertion signifie que pour des sphéroïdes quelconques $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$ les produits $(\varphi\psi)\chi$ et $\varphi(\psi\chi)$ sont homotopes; en effet, la formule

$$((t_1, t_2, \ldots, t_r), t) \mapsto$$

$$\mapsto \begin{cases} \varphi\left(\frac{4t_1}{t+1}, t_2, \ldots, t_r\right) & \text{si } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{t+1}{4}, \\ \psi(4t_1 - t - 1, t_2, \ldots, t_r) & \text{si } \frac{t+1}{4} \leqslant t_1 \leqslant \frac{t+2}{4}, \\ \chi\left(\frac{4t_1 - t - 2}{2 - t}, t_2, \ldots, t_r\right) & \text{si } \frac{t+2}{4} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

détermine une homotopie $I^r \times I \to X$ qui joint $(\varphi\psi)\chi$ à $\varphi(\psi\chi)$.

La deuxième assertion signifie que pour chaque sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$ les produits φ (const) et (const) φ sont homotopes à φ. En effet, les formules

$$((t_1, t_2, \ldots, t_r), t) \mapsto \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t_1}{t+1}, t_2, \ldots, t_r\right) & \text{si } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{t+1}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{t+1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1; \end{cases} \tag{3}$$

$$((t_1, t_2, \ldots, t_r), t) \mapsto$$

$$\mapsto \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1-t}{2}, \\ \varphi\left(\frac{2t_1-1+t}{t+1}, t_2, \ldots, t_r\right) & \text{si } \frac{1-t}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases} \tag{4}$$

déterminent des homotopies qui joignent φ (const) et (const) φ avec φ. La troisième assertion signifie que les produits $\varphi\varphi^{-1}$ et $\varphi^{-1}\varphi$ sont homotopes à const; en effet, la formule

$$((t_1, t_2, \ldots, t_r), t) \mapsto \begin{cases} \varphi(2t_1, t_2, \ldots, t_r) & \text{si } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1-t}{2}, \\ \varphi(1-t, t_2, \ldots, t_r) & \text{si } \frac{1-t}{2} \leqslant t_1 \leqslant \frac{1+t}{2}, \\ \varphi(2-2t_1, t_2, \ldots, t_r) & \text{si } \frac{1+t}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases} \tag{5}$$

détermine une homotopie qui joint $\varphi\varphi^{-1}$ et const.

L'ensemble $\pi_r(X, x_0)$, $r > 0$, muni ainsi d'une structure de groupe est appelé *groupe d'homotopie de dimension r de l'espace X* au point x_0.

Pour $r > 0$, tout sphéroïde de dimension r applique I^r dans la composante X_0, de l'espace X, contenant le point x_0. Ainsi, pour $r > 0$, le groupe $\pi_r(X, x_0)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_r(X_0, x_0)$.

Le théorème 2.3.4.3 implique que si X est un espace cellulaire dénombrable, alors tous les ensembles $\pi_r(X, x_0)$ sont dénombrables.

Le cas $r = 0$

2. Puisque I^0 est un point, tandis que $\mathrm{Fr}\, I^0 = \varnothing$, on peut identifier $\mathrm{Sph}_0(X, x_0)$ avec X, et $\pi_0(X, x_0)$ avec l'ensemble comp X des composantes de l'espace X. L'ensemble $\pi_0(X, x_0)$ est dépourvu de structure de groupe naturelle; il ne possède qu'un point de base qui, comme dans le cas des plus grandes dimensions, sera appelé unité: c'est la classe d'homotopie du sphéroïde const, i.e. la composante de l'espace X qui contient le point x_0.

Pour unifier les énoncés qui se rapportent aux cas $r > 0$ et $r = 0$, nous allons appeler l'ensemble $\pi_0(X, x_0)$ *groupe d'homotopie*

de dimension nulle de l'espace X au point x_0 et nous étendrons la terminologie de la théorie des groupes aux ensembles à point de base et à leurs applications. En particulier, par produit direct, nous entendrons le produit usuel, par homomorphisme, toute application qui envoie le point de base dans le point de base, par noyau d'un homomorphisme, l'image inverse du point de base et par isomorphisme, un homomorphisme bijectif.

Le cas $r = 1$

3. Les sphéroïdes de dimension un sont précisément les chemins fermés (lacets) et les définitions du produit, de l'élément inverse et de l'homotopie des sphéroïdes données dans *1*, sont en accord avec les définitions correspondantes relatives aux chemins qu'on trouve dans 1.3.2.1 et 1.3.2.3. Le groupe d'homotopie de dimension un est également appelé *groupe fondamental* ou *groupe de Poincaré.* Il a été défini quelques dizaines d'années avant les groupes d'homotopie de dimensions supérieures et, comme nous le verrons, occupe une place particulière.

4. Il est clair que pour que les homotopies (2) à (5) aient, pour $r = 1$, une signification réelle il ne suffit pas que φ, ψ, χ soient des lacets à origine commune, mais que ce soient des chemins pour lesquels sont définis les produits envisagés. De même que dans le cas des lacets, la classe d'homotopie du produit est déterminée par celle des facteurs, de sorte que l'on peut multiplier les classes d'homotopie des chemins lorsque l'origine du deuxième chemin coïncide avec l'extrémité du premier. La multiplication est associative, la classe du chemin constant joue le rôle de l'unité à gauche pour les classes de chemins de même origine et le rôle de l'unité à droite pour les classes des chemins avec la même extrémité ; les classes des chemins s, s^{-1} sont inverses l'une de l'autre en ce sens que leur produit, effectué en ordre quelconque, est égal à l'unité appropriée.

Le cas $r > 1$

5. Pour $r > 1$ *le groupe* $\pi_r(X, x_0)$ *est commutatif.*

Cela signifie que pour des sphéroïdes quelconques $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$, $r > 1$, les produits $\varphi\psi$ et $\psi\varphi$ sont homotopes. En effet, le produit de trois homotopies successives $I^r \times I \to X$ définies par les formules

$$((t_1, t_2, t_3, \ldots, t_r), t) \mapsto$$

$$\mapsto \begin{cases} \varphi(2t_1, (1+t)t_2, t_3, \ldots, t_r) & \text{si } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2},\ 0 \leqslant t_2 \leqslant \frac{1}{1+t}, \\ \psi(2t_1 - 1, (1+t)t_2 - t, t_3, \ldots, t_r) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1,\ \frac{t}{1+t} \leqslant t_2 \leqslant 1, \\ x_0 & \text{dans les autres cas;} \end{cases}$$

$$((t_1, t_2, t_3, \ldots, t_r), t) \mapsto$$
$$\mapsto \begin{cases} \varphi(2t_1 - t, 2t_2, t_3, \ldots, t_r) & \text{si } \frac{t}{2} \leqslant t_1 \leqslant \frac{t+1}{2},\ 0 \leqslant t_2 \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi(2t_1 + t - 1, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_r) & \text{si } \frac{1-t}{2} \leqslant t_1 \leqslant \frac{2-t}{2},\ \frac{1}{2} \leqslant t_2 \leqslant 1, \\ x_0 & \text{dans les autres cas;} \end{cases}$$

$$((t_1, t_2, t_3, \ldots, t_r), t) \mapsto$$
$$\mapsto \begin{cases} \varphi(2t_1 - 1, (2-t)\, t_2, t_3, \ldots, t_r) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant t_2 \leqslant \frac{1}{2-t}, \\ \psi(2t_1, (2-t)\, t_2 + t - 1, t_3, \ldots, t_r) & \text{si } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2},\ \frac{1-t}{2-t} \leqslant t_2 \leqslant 1, \\ x_0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

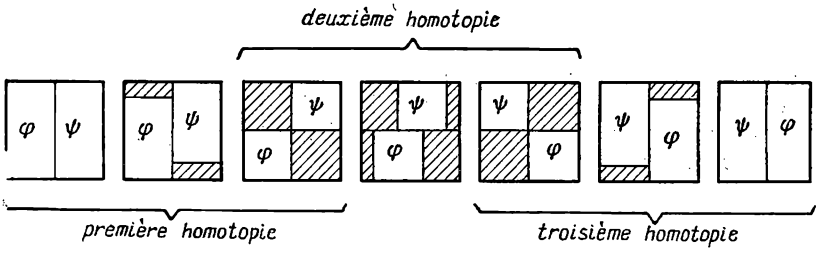


Fig. 13 ($r = 2$)

joint $\varphi\psi$ à $\psi\varphi$. (Ces homotopies sont illustrées par la figure 13; les parties hachurées y étant appliquées dans le point x_0.)

Sphéroïdes et applications continues

6. Si $f\colon (X, x_0) \to (X', x_0')$ est une application continue d'un espace à point de base dans un autre, alors à chaque sphéroïde $\varphi\colon (I^r, \operatorname{Fr} I^r) \to (X, x_0)$ correspond le sphéroïde $f \circ \varphi\colon (I^r, \operatorname{Fr} I^r) \to (X_0', x_0')$, de sorte qu'on obtient une application

$$f_{\#} = f_{\#r}\colon \operatorname{Sph}_r(X, x_0) \to \operatorname{Sph}_r(X', x_0').$$

Il est clair que $f_{\#}$ envoie les sphéroïdes homotopes dans des sphéroïdes homotopes et le sphéroïde constant dans le sphéroïde constant; d'autre part, $f_{\#r}(\varphi\psi) = f_{\#r}(\varphi)\, f_{\#r}(\psi)$ pour $r > 0$. Par conséquent, $f_{\#r}$ définit pour chaque $r \geqslant 0$ un certain homomorphisme $\pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X', x_0')$ que l'on appelle *homomorphisme induit par l'application* f et que l'on note f_* ou plus explicitement f_{*r}.

7. Pour des applications continues quelconques $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *et* $r \geqslant 0$ *on a*

$$(g \circ f)_{*r} = g_{*r} \circ f_{*r}.$$

Si $f = \mathrm{id}\,(X, x_0)$, *alors* $f_{*r} = \mathrm{id}\,\pi_r\,(X, x_0)$.

Démonstration. $(g \circ f)_{\#r} = g_{\#r} \circ f_{\#r}$ et $[\mathrm{id}\,(X, x_0)]_{\#r} = \mathrm{id}\,\mathrm{Sph}_r\,(X, x_0)$.

8. Si les applications $f, f'\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *sont homotopes, alors* $f'_{*r} = f_{*r}$ *quel que soit* r. *Si* $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *est une équivalence d'homotopie, alors les* f_{*r} *sont des isomorphismes.*

La première assertion découle du fait que les sphéroïdes $f \circ \varphi$, $f' \circ \varphi$ sont homotopes pour tout sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r\,(X, x_0)$. La seconde découle des égalités

$$g_{*r} \circ f_{*r} = (g \circ f)_{*r} = \mathrm{id}, \qquad f_{*r} \circ g_{*r} = (f \circ g)_{*r} = \mathrm{id},$$

où g est une application homotopiquement inverse de f (voir 7).

Théorème du produit

9. Pour des espaces quelconques (X, x_0), (Y, y_0) *à points de base et tout* r, *le groupe d'homotopie* $\pi_r\,(X \times Y, (x_0, y_0))$ *est canoniquement isomorphe au produit direct* $\pi_r\,(X, x_0) \times \pi_r\,(Y, y_0)$: *l'isomorphisme canonique*

$$\pi_r\,(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_r\,(X, x_0) \times \pi_r\,(Y, y_0)$$

est déterminé par la formule $\alpha \mapsto (\mathrm{pr}_{1*}\,(\alpha), \mathrm{pr}_{2*}\,(\alpha))$. *Si* (X', x'_0), (Y', y'_0) *sont d'autres espaces à points de base et* $f\colon (X, x_0) \to (X', x'_0)$, $g\colon (Y, y_0) \to (Y', y'_0)$ *sont des applications continues, alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \pi_r\,(X \times Y, (x_0, y_0)) & \to & \pi_r\,(X, x_0) \times \pi_r\,(Y, y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle (f \times g)_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_* \times g_*} \\ \pi_r\,(X' \times Y', (x'_0, y'_0)) & \to & \pi_r\,(X', x'_0) \times \pi_r\,(Y', y'_0), \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les isomorphismes canoniques, est commutatif.

La vérification est immédiate.

2. Digression: assemblages

1. Nous dirons qu'un espace topologique X est muni d'un *assemblage de groupes* si à chaque point $x \in X$ correspond un certain groupe G_x et à chaque chemin $s\colon I \to X$ un homomorphisme $T_s\colon G_{s(0)} \to G_{s(1)}$, les trois conditions suivantes étant remplies:

(i) si $s_1\,(0) = s\,(1)$, alors $T_{ss_1} = T_{s_1} \circ T_s$;

(ii) si s est le chemin constant, alors T_s est l'automorphisme identique;

(iii) si les chemins s, s_1 sont homotopes, alors $T_s = T_{s_1}$.

La condition (iii) montre que l'on peut écrire T_σ à la place de T_s, où σ est la classe d'homotopie du chemin s. En outre, il découle des conditions (i) à (iii) que tous les homomorphismes T_s (T_σ) sont des isomorphismes et l'on a $T_s^{-1} = T_{s^{-1}}$ ($T_\sigma^{-1} = T_{\sigma^{-1}}$); en effet, d'après 1.4 les chemins ss^{-1}, $s^{-1}s$ sont homotopes à des chemins constants, de sorte que $T_{s^{-1}} \circ T_s = T_{ss^{-1}} = \mathrm{id}\, G_{s(0)}$ et $T_s \circ T_{s^{-1}} = T_{s^{-1}s} = \mathrm{id}\, G_{s(1)}$.

L'isomorphisme T_s est appelé *translation le long de s*.

2. Si, en particulier, s est un lacet d'origine x, ou, ce qui revient au même, σ est un élément du groupe fondamental $\pi_1(X, x)$, alors $T_s = T_\sigma$ est un automorphisme du groupe G_x. En considérant maintenant les conditions *1* (i), *1* (ii), nous voyons que la formule $\sigma \mapsto T_\sigma$ détermine une action à droite du groupe $\pi_1(X, x)$ dans G_x.

A chaque chemin $s: I \to X$ correspond l'isomorphisme naturel $t_s: \pi_1(X, s(0)) \to \pi_1(X, s(1))$ défini par la formule $t_s\omega = \sigma^{-1}\omega\sigma$, où σ est la classe d'homotopie du chemin s; on le notera également t_σ. Une vérification évidente montre que $T_s: G_{s(0)} \to G_{s(1)}$ est une t_σ-application (voir 4.2.3.1).

3. Soient $(X, \{G_x\}, \{T_s\})$, $(X', \{G'_{x'}\}, \{T'_{s'}\})$ des assemblages de groupes sur les espaces X, X', et soit $f: X \to X'$ une application continue. Définissons pour chaque point $x \in X$ un homomorphisme $h_x: G_x \to G'_{f(x)}$. Nous dirons que les homomorphismes h_x constituent avec f un *homomorphisme du premier assemblage dans le second* si $h_{s(1)} \circ T_s = T'_{f\circ s} \circ h_{s(0)}$ pour tout chemin $s: I \to X$. Un homomorphisme $(f, \{h_x\})$ est appelé *isomorphisme* si f est un homéomorphisme et tous les h_x sont des isomorphismes; on l'appelle *équivalence* lorsqu'en outre $X' = X$ et $f = \mathrm{id}\, X$.

Si $(X', \{G'_{x'}\}, \{T'_{x'}\})$ est un assemblage de groupes et f une application continue de X dans X', alors une structure d'*assemblage induit* $(X, \{G_x\}, \{T_s\})$ apparaît sur X; dans cette structure G_x se définit comme $G'_{f(x)}$ et T_s comme $T'_{f\circ s}$. Il est clair que $(f, \{\mathrm{id}\, G_x\})$ est un homomorphisme de l'assemblage induit dans l'assemblage donné.

4. Les assemblages de groupes $(X, \{G_x\}, \{T_s\})$ *et* $(X, \{G'_x\}, \{T'_{s'}\})$ *donnés sur un espace connexe X à point de base* x_0 *sont équivalents si et seulement si les actions du groupe* $\pi_1(X, x_0)$ *qu'ils déterminent dans* G_{x_0} et G'_{x_0} *sont isomorphes en ce sens qu'il existe un isomorphisme de groupe* $G_{x_0} \to G'_{x_0}$ *qui est en même temps une* $\pi_1(X, x_0)$*-application.*

Le fait que l'équivalence des assemblages implique que les actions du groupe $\pi_1(X, x_0)$ dans G_{x_0} et G'_{x_0} sont isomorphes est évident. Pour démontrer la réciproque, fixons un $\pi_1(X, x_0)$-isomorphisme $h: G_{x_0} \to G'_{x_0}$ et choisissons pour chaque point $x \in X$ un chemin s_x d'origine x_0 et d'extrémité x. Une vérification immédiate montre que $(\mathrm{id}\, X, \{h_x\})$ pour $h_x = T'_{s_x} \circ h \circ T_{s_x}^{-1}$ est une équivalence du premier assemblage sur le second.

5. Un assemblage de groupes donné sur un espace topologique X est dit *simple* s'il est équivalent à l'*assemblage canonique simple* $(X, \{G_x\}, \{T_s\})$ dont tous les groupes G_x coïncident avec un certain groupe G et tous les homomorphismes T_s avec l'automorphisme identique de ce groupe.

Il découle du théorème *4* que l'assemblage de groupes donné sur un groupe topologique connexe X à point de base x_0 est simple si et seulement si l'action du groupe $\pi_1(X, x_0)$ dans G_{x_0} qu'il détermine est l'identité. En particulier, il est toujours simple si le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est trivial, ainsi que dans le cas où tous les groupes qui le constituent sont isomorphes à $\mathbf{Z}_2$.

6. Les assertions *1* à *5* sont également vraies pour les assemblages constitués par d'autres structures algébriques, par exemple par les espaces vectoriels ou par les anneaux.

Dans ce paragraphe nous aurons affaire non seulement aux assemblages de groupes mais aussi aux assemblages d'ensembles à unité (à point de base).

3. Assemblages de groupes d'homotopie d'un espace topologique

1. Les sphéroïdes $\varphi_0 \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$, $\varphi_1 \in \mathrm{Sph}_r(X, x_1)$ sont dits *librement homotopes* lorsque les applications abs φ_0, abs $\varphi_1 : I^r \to X$ peuvent être jointes par une homotopie constituée de sphéroïdes. Autrement dit, deux sphéroïdes φ_0, φ_1 sont librement homotopes lorsqu'il existe une application continue $h : I^r \times I \to X$, constante sur chacun des ensembles $\mathrm{Fr}\, I^r \times t$, $t \in I$, telle que

$$h(y, 0) = \varphi_0(y), \quad h(y, 1) = \varphi_1(y), \quad \forall\, y \in I^r.$$

Un élément essentiel d'une telle homotopie est le chemin parcouru par l'origine du sphéroïde, i.e. déterminé par la formule

$$t \mapsto h(\mathrm{Fr}\, I^r \times t).$$

On dit que h est une homotopie libre *qui joint les sphéroïdes* φ_0, φ_1 *suivant ce chemin.*

2. Chaque sphéroïde d'origine x_0 possède une homotopie libre le long d'un chemin quelconque d'origine x_0. Par des homotopies libres de sphéroïdes homotopes suivant des chemins homotopes on obtient des sphéroïdes homotopes.

Pour effectuer une homotopie libre d'un sphéroïde donné $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$ le long du chemin s à l'origine x_0, il suffit de prolonger d'une manière quelconque l'homotopie de l'application constante $\varphi|_{\mathrm{Fr}\, I^r}$ définie par la formule $(y, t) \mapsto s(t)$, $y \in \mathrm{Fr}\, I^r$, $t \in I$, en une homotopie de l'application $\varphi : I^r \to X$. (L'existence d'un tel prolongement découle de 2.3.1.3.)

Pour établir l'homotopie des sphéroïdes φ_1, φ'_1 en lesquels sont envoyés les sphéroïdes homotopes φ_0, φ'_0 par les homotopies libres h, h': $I^r \times I \to X$ suivant les chemins homotopes s, s', nous fixerons des homotopies quelconques f: $I^r \times I \to X$ et g: $I \times I \to X$ qui joignent φ_0 à φ'_0 et s à s' et définirons un sous-ensemble K du cube $I^{r+2} = I^r \times I \times I$ et une application H: $K \to X$ par les formules

$$K = \mathrm{Fr}_{\mathbf{R}^{r+2}} I^{r+2} \setminus [(\mathrm{Int}_{\mathbf{R}^{r+1}} I^{r+1}) \times 1],$$

$$H(y, u, v) = \begin{cases} f(y, u) & \text{si } v = 0, \\ g(u, v) & \text{si } y \in \mathrm{Fr}_{\mathbf{R}^r} I^r, \\ h(y, v) & \text{si } u = 0, \\ h'(y, v) & \text{si } u = 1 \end{cases}$$

(où $y \in I^r$, $u \in I$, $v \in I$). Il existe un homéomorphisme k: $I^r \times I \to K$ tel que $k(y, u) = (y, u, 1)$ pour $(y, u) \in \mathrm{Fr}(I^r \times I)$; tel sera, par exemple, l'homéomorphisme inverse de l'homéomorphisme k_1: $K \to I^r \times I$ défini par la formule

$$k_1(y, u, v) = \left(y_0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(1 + v)\left(y - y_0, u - \frac{1}{2}\right),$$

où $y_0 = (\mathrm{ort}_1 + \ldots + \mathrm{ort}_r)/2$. Il est clair que $H \circ k$: $I^r \times I \to X$ est une homotopie liant un φ_1 et φ'_1.

3. D'après le théorème précédent, les homotopies libres suivant le chemin s: $I \to X$ déterminent pour chaque $r \geqslant 0$ une certaine application T_s: $\pi_r(X, s(0)) \to \pi_r(X, s(1))$. En vertu du même théorème, les applications T_s possèdent la propriété 2.1 (iii); il est évident qu'elles possèdent en même temps les propriétés 2.1 (i) et 2.1 (ii), tout en étant des homomorphismes. L'assemblage $(X, \{\pi_r(X, x)\}, \{T_s\})$ qui apparaît ainsi est un assemblage de groupes pour $r \geqslant 1$ et un assemblage d'ensembles à point de base pour $r = 0$; on l'appelle *assemblage de groupes d'homotopie de dimension r de l'espace X*. En particulier, pour des $x \in X$ quelconques et $r \geqslant 1$ il existe une action de groupe à droite unique du groupe $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_r(X, x)$.

4. Pour $r = 1$, l'isomorphisme T_s agit suivant la formule $T_s\omega = \sigma^{-1}\omega\sigma$, où σ est la classe d'homotopie du chemin s (i.e. coïncide avec l'isomorphisme t_s de 2.2). En particulier, l'action à droite du groupe $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_1(X, x)$ est une action à droite intérieure.

Démonstration. Choisissons dans la classe ω un lacet quelconque w et définissons le chemin s_t: $I \to X$, $t \in I$, par la formule $s_t(y) = s(ty)$ et le lacet w_t par la formule $w_t = (s_t^{-1}w)\, s_t$. Puisque s_0 est un chemin constant, le lacet w_0 appartient à la classe ω et l'homotopie libre $I \times I \to X$, définie par la formule $(y, t) \mapsto w_t(y)$, le joint suivant s au lacet $w_1 = (s^{-1}w)\, s$ appartenant à la classe $\sigma^{-1}\omega\sigma$.

5. Dans le cas d'un espace connexe X il découle de *3* que tous les groupes d'homotopie $\pi_r(X, x_0)$ sont isomorphes entre eux, quel que soit r. Pour $r = 1$ ceci découle déjà de 2.2.

L'espace X est dit *r-simple* s'il est connexe et l'assemblage de ses groupes d'homotopie de dimension r est simple. Dans ce cas, les groupes $\pi_r(X, x)$ ne sont pas seulement isomorphes mais sont liés par un isomorphisme canonique de proche en proche qui permet de les identifier à un groupe unique $\pi_r(X)$ — *le groupe d'homotopie de l'espace X sans point de base* — dont les éléments sont des classes de sphéroïdes librement homotopes. Un espace r-simple pour tout r est dit *simple*.

Si l'espace X n'est pas r-simple, les isomorphismes T_s ne permettent pas d'identifier les groupes $\pi_r(X, x)$ pour des x distincts. Dans ce cas le groupe $\pi_r(X)$ de l'espace X est seulement un groupe abstrait.

Il est évident que l'assemblage des groupes d'homotopie de dimension nulle d'un espace topologique est toujours simple, et dans le cas où l'espace est connexe, il se réduit à un assemblage d'ensembles tous constitués d'un seul point.

Il découle de *4* qu'un espace est 1-simple, si et seulement si, il est connexe et son groupe fondamental est commutatif (voir 2.5).

6. D'après 1.6, toute application continue f d'un espace X dans un espace X' définit en chaque point $x \in X$ un homomorphisme $f_* = (f_*)_x : \pi_r(X, x) \to \pi_r(X', f(x))$. Il est clair que si h est une homotopie libre qui joint les sphéroïdes φ_0, φ_1 suivant un chemin s, alors $f \circ h$ est une homotopie libre qui joint les sphéroïdes $f \circ \varphi_0$, $f \circ \varphi_1$ le long du chemin $f \circ s$, de sorte que $(f_*)_{s(1)} \circ T_s = T_{f \circ s} \circ (f_*)_{s(0)}$. Ainsi, pour chaque $r \geqslant 0$ les homomorphismes induits $(f_{*r})_x$ constituent avec f un homomorphisme de l'assemblage des groupes d'homotopie de dimension r de l'espace X dans l'assemblage des groupes d'homotopie de dimension r de l'espace X'.

Trois cas particuliers méritent d'être mentionnés: 1° l'espace X est r-simple; 2° l'espace X' est r-simple, 3° les deux espaces X, X' sont r-simples. Dans le premier cas, les homomorphismes $(f_{*r})_x$ appliquent un même groupe $\pi_r(X)$ dans les groupes $\pi_r(X', f(x))$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_r(X) \arrow[dl, "(f_*)_{s(0)}"'] \arrow[dr, "(f_*)_{s(1)}"] & \\
\pi_r(X', f \circ s(0)) \arrow[rr, "T_{f \circ s}"] & & \pi_r(X', f \circ s(1))
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour chaque chemin $s: I \to X$. Dans le deuxième cas, les homomorphismes $(f_{*r})_x$ appliquent les groupes $\pi_r(X, x)$ dans un même groupe $\pi_r(X')$ et pour chaque chemin $s: I \to X$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_r(X, s(0)) \arrow[rr, "T_s"] \arrow[dr, "(f_*)_{s(0)}"'] & & \pi_r(X, s(1)) \arrow[dl, "(f_*)_{s(1)}"] \\ & \pi_r(X') & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Dans le troisième cas, les assemblages des groupes d'homotopie de dimension r des espaces X, X' se réduisent aux deux groupes $\pi_r(X)$, $\pi_r(X')$ et les isomorphismes $(f_{*r})_x$ à un seul homomorphisme $f_{*r}: \pi_r(X) \to \pi_r(X')$.

7. *Si $f: X \to X'$ est une équivalence d'homotopie, alors tous les homomorphismes induits $(f_*)_x: \pi_r(X, x) \to \pi_r(X', f(x))$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. Soit $f': X' \to X$ une application homotopiquement inverse de f. Si $H: X \times I \to X$ est une homotopie joignant $f' \circ f$ à id X, alors pour chaque sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, x)$ l'application $I^r \times I \to X$ définie par la formule $(y, t) \mapsto H(\varphi(y), t)$ est une homotopie libre qui joint φ au sphéroïde $f' \circ f \circ \varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, f' \circ f(x))$ suivant un chemin s défini par la formule $s(t) = H(x, t)$. Par conséquent, l'homomorphisme

$$(f'_*)_{f(x)} \circ (f_*)_x = ((f' \circ f)_*)_x: \pi_r(X, x) \to \pi_r(X, f' \circ f(x))$$

qui coïncide avec la translation T_s est, en particulier, un isomorphisme tandis que $(f'_*)_{f(x)}$ est un épimorphisme. D'autre part, le fait que la composée analogue $(f_*)_{f' \circ f(x)} \circ (f'_*)_{f(x)}$ est un isomorphisme implique que $(f'_*)_{f(x)}$ est un monomorphisme. Ainsi $(f'_*)_{f(x)}$ est un isomorphisme et $(f_*)_x = [(f'_*)_{f(x)}]^{-1} \circ T_s$ est également un isomorphisme.

8. *La trivialité des groupes d'homotopie $\pi_r(X, x_0)$ pour $r \leqslant k$ $(0 \leqslant k < \infty)$ au point de base x_0 est équivalente à la k-connexité de l'espace X. La trivialité de tous les groupes d'homotopie $\pi_r(X, x_0)$ est équivalente à la ∞-connexité de l'espace X.*

Le fait que pour un espace X k-connexe les groupes d'homotopie indiqués sont triviaux s'obtient simplement en comparant la définition des groupes d'homotopie $\pi_r(X, x_0)$ avec celle de la k-connexité (voir 1.3.3.7; dans 1.3.3.6 on peut remplacer le couple (D^{r+1}, S^r) par le couple homéomorphe $(I^{r+1}, \mathrm{Fr}\, I^{r+1})$). La réciproque découle de la même comparaison, puisque la trivialité des groupes d'homotopie $\pi_r(X, x_0)$, $r \leqslant k$, entraîne, d'après 1.2 et 5, celle des groupes d'homotopie $\pi_r(X, x)$, $r \leqslant k$, en tous les points $x \in X$.

4. Groupes d'homotopie relatifs

1. Posons $J^{r-1} = \mathrm{Fr}_{\mathbf{R}^r} I^r \setminus \mathrm{Int}_{\mathbf{R}^{r-1}} I^{r-1}$. Pour un couple topologique quelconque (X, A) à point de base $x_0 \in A$ et un entier naturel r, désignons par $\mathrm{Sph}_r(X, A, x_0)$ l'ensemble $\mathscr{C}(I^r, \mathrm{Fr}\, I^r, J^{r-1}; X, A, x_0)$ de toutes les applications continues du triplet $(I^r, \mathrm{Fr}\, I^r, J^{r-1})$ dans le triplet (X, A, x_0). Les éléments de l'ensemble $\mathrm{Sph}_r(X, A, x_0)$ sont appelés *sphéroïdes de dimension r d'origine* x_0 *du couple* (X, A). L'ensemble $\pi(I^r, \mathrm{Fr}\, I^r, J^{r-1}; X, A, x_0)$ de leurs classes d'homotopie se désigne plus brièvement par $\pi_r(X, A, x_0)$.

Remarquons que chaque sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, A, x_0)$, $\varphi(I^r) \subset \subset A$, est homotope au sphéroïde constant. Il existe une homotopie standard $I^r \times I \to X$ qui joint chaque tel sphéroïde avec le sphéroïde constant : elle est déterminée par la formule

$$((t_1, \ldots, t_{r-1}, t_r), t) \mapsto \varphi(t_1, \ldots, t_{r-1}, (1-t)\, t_r + t).$$

Un sphéroïde de dimension un d'origine x_0 du couple (X, A) est évidemment un chemin d'origine A et d'e x t r é m i t é x_0. Mise en garde : l'homotopie d'un tel sphéroïde, étant liée au point 1, n'est pas nécessairement liée au point 0 si A ne se réduit pas à x_0.

Pour $r \geqslant 2$ la formule (1) détermine dans $\mathrm{Sph}_r(X, A, x_0)$ une multiplication que l'on peut transposer dans $\pi_r(X, A, x_0)$ et qui transforme ce dernier en un groupe lorsque $r \geqslant 2$. L'unité de ce groupe est la classe d'homotopie du sphéroïde constant, tandis que la classe du sphéroïde φ^{-1}, donné par la formule

$$\varphi^{-1}(t_1, t_2, \ldots, t_r) = \varphi(1 - t_1, t_2, \ldots, t_r),$$

est inverse de la classe du sphéroïde φ. Tout ceci se démontre de même que dans le cas absolu.

Le groupe $\pi_r(X, A, x_0)$ pour $r \geqslant 2$ est appelé *groupe d'homotopie de dimension r du couple* (X, A) *au point* x_0. Le groupe d'homotopie de dimension un du couple (X, A) au point x_0 se définit comme l'ensemble $\pi_1(X, A, x_0)$ à unité (à point de base) : celle-ci est simplement la classe d'homotopie du sphéroïde constant.

Si $A = x_0$, alors $\pi_r(X, A, x_0)$ coïncide avec $\pi_r(X, x_0)$ (i.e. $\pi_r(X, x_0, x_0)$ et $\pi_r(X, x_0)$ coïncident en tant que groupes pour $r \geqslant 2$ et en tant qu'ensembles à point de base pour $r = 1$).

Pour $r > 1$, le groupe $\pi_r(X, A, x_0)$ est canoniquement isomorphe au groupe $\pi_r(X_0, A_0, x_0)$, où X_0 et A_0 sont les composantes des espaces X et A qui contiennent x_0.

Pour $r > 2$, le groupe $\pi_r(X, A, x_0)$ est commutatif. La démonstration est une modification évidente de la démonstration du théorème 1.5.

2. A chaque application continue $f : (X, A, x_0) \to (X', A', x_0')$ correspond (pour $r \geqslant 1$) un *homomorphisme induit*

$$f_* : \pi_r(X, A, x_0) \to \pi_r(X', A', x_0')$$

qui se définit de même que dans le cas absolu, et qui coïncide pour $A = x_0$. $A' = x'_0$ avec l'homomorphisme induit absolu $f_* : \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X', x'_0)$. Comme dans le cas absolu, nous avons $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ et $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$. Si f et f' sont homotopes, alors $f'_* = f_*$; si f est une équivalence d'homotopie, alors f_* est un isomorphisme.

L'homomorphisme frontière

3. L'abréviation $\mathrm{ab}\,\varphi : (I^{r-1}, \mathrm{Fr}\, I^{r-1}) \to (A, x_0)$ du sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, A, x_0)$ est un sphéroïde de $\mathrm{Sph}_{r-1}(A, x_0)$; on l'appelle *frontière du sphéroïde* φ et on la désigne par $\partial\varphi$. L'application $\partial : \mathrm{Sph}_r(X, A, x_0) \to \mathrm{Sph}_{r-1}(A, x_0)$ qui apparaît alors envoie évidemment des sphéroïdes homotopes dans des sphéroïdes homotopes et le sphéroïde constant dans le sphéroïde constant. Par conséquent, elle définit pour chaque $r \geqslant 1$ un certain homomorphisme $\pi_r(X, A, x_0) \to \pi_{r-1}(A, x_0)$ qu'on appelle *frontière* et qu'on désigne également par ∂.

Quelle que soit l'application continue $f : (X, A, x_0) \to (X', A', x'_0)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{r-1}(A, x_0) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{ab}\, f)_*} \\ \pi_r(X', A', x'_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{r-1}(A', x'_0) \end{array}$$

est commutatif pour tout $r \geqslant 1$. Pour la démonstration, il suffit de remarquer qu'on a déjà démontré la commutativité d'un diagramme analogue dans lequel à la place de π est écrit Sph et à la place de f_* et $(\mathrm{ab}\, f)_*$, $f_\#$ et $(ab\, f)_\#$.

Assemblages de groupes d'homotopie d'un couple topologique

4. Les sphéroïdes $\varphi_0 \in \mathrm{Sph}_r(X, A, x_0)$, $\varphi_1 \in \mathrm{Sph}_r(X, A, x_1)$ du couple (X, A) sont dits *librement homotopes* si, envisagés comme des applications de $(I^r, \mathrm{Fr}\, I^r)$ dans le couple (X, A), ils peuvent être joints par une homotopie constituée des sphéroïdes du couple (X, A), i.e. lorsqu'il existe une application $h : I^r \times I \to X$, $h(\mathrm{Fr}\, I^r \times I) \subset A$, constante sur chacun des ensembles $J^{r-1} \times t$, $t \in I$, et telle que

$$h(y, 0) = \varphi_0(y), \qquad h(y, 1) = \varphi_1(y)$$

pour chaque $y \in I^r$. Nous dirons que h est une homotopie libre joignant φ_0 à φ_1 suivant le chemin $t \mapsto h(J^{r-1} \times t)$.

Chaque sphéroïde du couple (X, A) d'origine x_0 possède une homotopie libre suivant un chemin quelconque (d'origine x_0) de

l'espace A ; en outre, des homotopies libres de sphéroïdes homotopes le long des chemins homotopes dans l'espace A ont pour résultat des sphéroïdes homotopes. La démonstration diffère de celle du théorème 3.2 en deux points : dans la première partie de la démonstration nous envisageons l'application ab $\varphi : J^{r-1} \to A$ à la place de $\varphi|_{\mathrm{Fr}\, I^r}$ et prolongeons son homotopie, définie par la formule $(y, t) \mapsto s(t)$, d'abord en une homotopie de l'application ab φ : Fr $I^r \to A$ et, ensuite, en une homotopie de l'application $\varphi : I^r \to X$; dans la deuxième partie à la place de $g : I \times I \to X$ nous écrivons $g : I \times I \to A$.

D'après ce théorème, les homotopies libres le long du chemin $s : I \to A$ définissent pour chaque $r \geqslant 1$ une certaine application

$$T_s : \pi_r(X, A, s(0)) \to \pi_r(X, A, s(1)).$$

Comme dans le cas absolu, les applications T_s sont des homomorphismes et possèdent les propriétés 2.1 (i), 2.1 (ii) et 2.1 (iii), de sorte qu'une structure d'assemblage $(A, \{\pi_r(X, A, x)\}, \{T_s\})$ apparaît sur A ; c'est un assemblage de groupes pour $r \geqslant 2$ et un assemblage d'ensembles à point de base pour $r = 1$. On l'appelle *assemblage de groupes d'homotopie de dimension r du couple* (X, A). En particulier, quels que soient $x \in A$ et $r \geqslant 1$, il existe une action naturelle à droite du groupe $\pi_1(A, x)$ dans $\pi_r(X, A, x)$ qui est une action de groupe lorsque $r > 1$ et une action laissant sur place l'unité lorsque $r = 1$.

Il découle de l'existence de l'assemblage décrit que pour $r \geqslant 1$, tous les groupes d'homotopie $\pi_r(X, A, x)$ de dimension r du couple (X, A) avec A connexe sont isomorphes entre eux.

Un couple (X, A) avec A connexe est appelé *r-simple* lorsque l'assemblage de ses groupes d'homotopie de dimension r est simple ; dans ce cas tous les groupes d'homotopie $\pi_r(X, A, x)$, $x \in A$, peuvent être identifiés à *un seul groupe d'homotopie* $\pi_r(X, A)$ *de dimension r du couple* (X, A) *sans point de base* dont les éléments sont les classes de sphéroïdes librement homotopes. Un couple qui est *r-simple* pour $r \geqslant 1$ est dit *simple*. Par exemple, un espace à point de base est simple.

5. Il est évident que, pour tout couple (X, A) et tout chemin $s : I \to A$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(X, A, s(0)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{r-1}(A, s(0)) \\ {\scriptstyle T_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_s} \\ \pi_r(X, A, s(1)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{r-1}(A, s(1)) \end{array}$$

est commutatif. Ainsi les homomorphismes frontières $\partial = \partial_x : \pi_r(X, A, x) \to \pi_{r-1}(A, x)$ constituent avec id A un homo-

morphisme de l'assemblage des groupes d'homotopie de dimension r du couple (X, A) dans l'assemblage des groupes d'homotopie de dimension $(r-1)$ de l'espace A.

Quelle que soit l'application continue $f: (X, A) \to (X', A')$, les homomorphismes

$$f_* = (f_*)_x : \pi_r (X, A, x) \to \pi_r (X', A', f(x))$$

constituent avec f un homomorphisme de l'assemblage des groupes d'homotopie de dimension r du couple (X, A) dans l'assemblage des groupes d'homotopie de dimension r du couple (X', A'). De même que dans 3.6, indiquons trois cas particuliers importants: le couple (X, A) est r-simple, le couple (X', A') est r-simple, les deux couples (X, A) et (X', A') sont r-simples. Dans les deux premiers cas, les chemins $s: I \to A$ donnent lieu à des diagrammes commutatifs analogues aux diagrammes de 3.6; dans le troisième cas, les assemblages des groupes d'homotopie de dimension r des couples (X, A), (X', A') se réduisent à deux groupes $\pi_r (X, A)$, $\pi_r (X', A')$, tandis que les homomorphismes $(f_*)_x$ se réduisent à un seul homomorphisme

$$f_* : \pi_r (X, A) \to \pi_r (X', A').$$

Si f est une équivalence d'homotopie, alors tous les homomorphismes $(f_*)_x$ sont des isomorphismes. Ceci se démontre de même que dans le cas absolu (voir 3.7).

6. Soit (X, A) un couple à point de base $x_0 \in A$. Si les espaces X, A sont connexes, la trivialité de tous les groupes d'homotopie $\pi_r (X, A, x_0)$ est équivalente à la ∞-connexité du couple (X, A), tandis que la trivialité des groupes d'homotopie $\pi_r (X, A, x_0)$, $1 \leqslant r \leqslant k$, est équivalente à sa k-connexité.

La démonstration est une modification évidente de la démonstration de la proposition 3.8 (le renvoi à 1.3.3.7 est remplacé par un renvoi à 1.3.3.9).

Le groupe $\pi_2 (X, A, x_0)$

7. Si $\alpha, \beta \in \pi_2 (X, A, x_0)$, alors $\alpha^{-1}\beta\alpha = T_{\partial\alpha}\beta$.

Démonstration (une autre démonstration sera donnée dans 10.5). L'assertion à démontrer signifie que pour des sphéroïdes quelconques $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_2 (X, A, x_0)$ le sphéroïde ψ peut être joint au sphéroïde $\varphi^{-1}\psi\varphi$ par une homotopie libre le long du lacet $\partial\varphi$. Une telle homotopie est constituée par les applications $\chi_t : I^2 \to X$ $(t \in I)$ définies de la manière suivante. Posons $f(t) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8}\left|t - \frac{1}{2}\right|$ et divisons I^2 en huit morceaux de la manière indiquée sur la figure 14, où $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $A_4(t)$ ont pour abscisses $f(t)$, $t/4$, $1-(t/2)$, $1-f(t)$, tandis que $B_1(t)$, $B_2(t)$, $B_3(t)$, $B_4(t)$

sont situés au-dessus d'eux à la hauteur $1 - f(t)$. Soient ensuite $\alpha_1 : Q_1(t) \to I^2$, $\alpha^2 : Q_2(t) \to I^2$, $\alpha_3 : Q_3(t) \to I^2$ des applications affines, définies par les conditions

$$\alpha_1(A_1(t)) = (t, 0), \quad \alpha_1(A_2(t)) = (0, 0), \quad \alpha_1(B_1(t)) = (t, 1),$$
$$\alpha_2(A_2(t)) = (0, 0), \quad \alpha_2(A_3(t)) = (1, 0), \quad \alpha_2(B_2(t)) = (0, 1).$$
$$\alpha_3(A_3(t)) = (0, 0), \quad \alpha_3(A_4(t)) = (t, 0), \quad \alpha_3(B_3(t)) = (0, 1).$$

Posons

$$\chi_t|_{Q_1(t)} = \varphi \circ \alpha_1, \quad \chi_t|_{Q_2(t)} = \varphi \circ \alpha_2, \quad \chi_t|_{Q_3(t)} = \varphi \circ \alpha_3$$

et prolongeons l'application continue $Q_1(t) \cup Q_2(t) \cup Q_3(t) \to X$ d'abord en une application $\bigcup_1^7 Q_i(t) \to X$ constante sur les droites

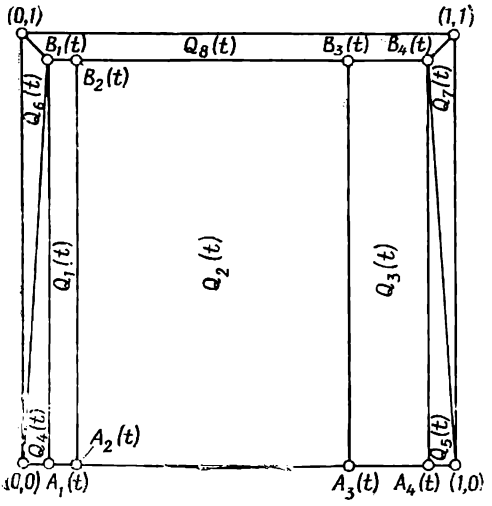


Fig. 14

horizontales de $Q_4(t) \cup Q_5(t)$ et sur les droites verticales de $Q_6(t) \cup \cup Q_7(t)$ et ensuite en $Q_8(t)$ de sorte qu'elle soit constante sur ses horizontales. (Un tel prolongement est possible puisque l'application $\bigcup_1^7 Q_i(t) \to X$ déjà construite était constante sur l'intervalle $[B_1(t), B_4(t)]$ et prenait les mêmes valeurs aux points des intervalles $[B_1(t), (0, 1)]$, $[B_4(t), (1, 1)]$ situés à la même hauteur.) La continuité de l'application $I^2 \times I \to X$ constituée des applications $\chi_t : I^2 \to X$ découle de sa continuité évidente sur chacun des huit polyèdres $\bigcup_{t \in I} (Q_i(t) \times t)$.

Action du groupe $\pi_1(X, x_0)$ dans $\pi_1(X, A, x_0)$

8. Si w un sphéroïde de $\mathrm{Sph}_1(X, A, x_0)$ et s un lacet de $\mathrm{Sph}_1(X, x_0)$, alors le produit ws est défini ; ce produit est évidemment un sphéroïde de $\mathrm{Sph}_1(X, A, x_0)$ et sa classe est déterminée par les classes des sphéroïdes w, s; ainsi pour $\omega \in \pi_1(X, A, x_0)$ et $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ le produit $\omega\sigma$ est défini. En utilisant de nouveau les homotopies de 1.1, nous voyons que $\omega(\sigma\sigma') = (\omega\sigma)\sigma'$ et $\omega e_{\pi_1(X, x_0)} = \omega$ quels que soient $\omega \in \pi_1(X, A, x_0)$ et $\sigma, \sigma' \in \pi_1(X, x_0)$, i.e. la formule $(\omega, \sigma) \mapsto \omega\sigma$ détermine une action à droite du groupe $\pi_1(X, x_0)$ dans $\pi_1(X, A, x_0)$.

Lorsque $A = x_0$, cette action coïncide évidemment avec l'action canonique à droite du groupe $\pi_1(X, x_0)$. Il est tout aussi évident que, dans le cas général, pour chaque chemin $s: I \to A$, la translation $T_s: \pi_1(X, A, s(0)) \to \pi_1(X, A, s(1))$ est une $[T_{\mathrm{in}\circ s}: \pi_1 \times (X, s(0)) \to \pi_1(X, s(1))]$-application, i.e. $T_s(\omega\sigma) = T_s(\omega) \times T_{\mathrm{in}\circ s}(\sigma)$ quels que soient $\sigma \in \pi_1(X, s(0))$, $\omega \in \pi_1(X, A, s(0))$. On voit également que, pour chaque application continue $f: (X, A, x_0) \to (X', A', x_0')$, l'homomorphisme $f_*: \pi_1(X, A, x_0) \to \pi_1 \times (X', A', x_0')$ est une $[f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X', x_0')]$-application, i.e. $f_*(\omega\sigma) = f_*(\omega) f_*(\sigma)$ quels que soient $\omega \in \pi_1(X, A, x_0)$, $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Appliquant ceci à $\mathrm{rel} = [\mathrm{in}: (X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0)]$, nous voyons que pour des $\omega, \sigma \in \pi_1(X, x_0)$ quelconques

$$(\mathrm{rel}_* \omega)\sigma = \mathrm{rel}_*(\omega\sigma).$$

9. Quels que soient $\omega \in \pi_1(X, A, x_0)$ *et* $\sigma \in \pi_1(A, x_0)$, *on a*

$$T_\sigma \omega = \omega(\mathrm{in}_* \sigma),$$

où $\mathrm{in} = [\mathrm{in}: (A, x_0) \to (X, x_0)]$.

Démonstration. Soient w, s des sphéroïdes appartenant aux classes ω, σ. Définissons le chemin $s_t: I \to A$ pour $t \in I$ par la formule $s_t(y) = s(ty)$ et posons $w_t = w(\mathrm{in} \circ s_t)$. Puisque s_0 est le chemin constant, le sphéroïde w_0 est homotope à w; il est clair que l'homotopie libre $I \times I \to X$ définie par la formule $(y, t) \mapsto w_t(y)$ joint w_0 à $w_1 = w(\mathrm{in} \circ s)$ le long du chemin s.

5. Digression: suites de groupes et d'homomorphismes et π-suites

1. On appelle *suite de groupes et d'homomorphismes* toute suite, finie ou infinie, de groupes dont les groupes voisins G_i, G_{i+1} sont liés par un homomorphisme $G_i \to G_{i+1}$.

On appelle *homomorphisme* d'une suite de groupes et d'homomorphismes $\{G_i, h_i: G_i \to G_{i+1}\}$ dans une suite de groupes et d'homomorphismes $\{G_i', h_i': G_i' \to G_{i+1}'\}$ indexée par le même ensemble de nombres entiers, une suite d'homomorphismes $\{H_i: G_i \to G_i'\}$

telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\cdots G_{i-1} \arrow[r, "h_{i-1}"] \arrow[d, "H_{i-1}"] & G_i \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "H_i"] & G_{i+1} \arrow[r, "h_{i+1}"] \arrow[d, "H_{i+1}"] & \cdots \\
\cdots G'_{i-1} \arrow[r, "h'_{i-1}"] & G'_i \arrow[r, "h'_i"] & G'_{i+1} \arrow[r, "h'_{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Un homomorphisme constitué d'isomorphismes est appelé *isomorphisme*.

2. Une suite de groupes et d'homomorphismes $\{G_i, h_i\}$ est dite *exacte* si pour chaque groupe G_i, sauf le premier et le dernier, le noyau $\operatorname{Ker} h_i$ de l'homomorphisme h_i coïncide avec l'image $\operatorname{Im} h_{i-1}$ de l'homomorphisme h_{i-1}.

Les propositions suivantes sont évidemment valables pour toute suite exacte $\{G_i, h_i\}$.

(i) Soit G_i un terme intérieur (ni le premier ni le dernier) de la suite ; la trivialité de l'homomorphisme h_{i-1} est équivalente à l'injectivité de h_i, la trivialité de h_i à la surjectivité de h_{i-1}, de sorte que la trivialité des deux homomorphismes h_{i-1}, h_i est équivalente à la trivialité du groupe G_i.

(ii) Soient G_i et G_{i+1} des termes intérieurs de la suite ; la trivialité des homomorphismes h_{i-1} et h_{i+1} est équivalente au fait que h_i est un isomorphisme.

(iii) En particulier, la trivialité des groupes G_{i-1}, G_{i+1} implique celle du groupe G_i, et la trivialité des groupes G_{i-1}, G_{i+2} implique que h_i est un isomorphisme.

3. Les suites exactes de la forme $1 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 1$ sont dites *courtes* (1 désigne le groupe trivial). En guise d'exemple, on peut citer la suite $1 \to F \xrightarrow{\text{in}} G \xrightarrow{\text{pr}} G/F \to 1$, où F est un sous-groupe normal du groupe G. Cet exemple est universel en ce sens que chaque suite exacte courte est canoniquement isomorphe à une suite de ce type, à savoir la suite exacte $1 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 1$ s'applique sur la suite $1 \to \operatorname{Im} f \xrightarrow{\text{in}} G \xrightarrow{\text{pr}} G/\operatorname{Im} f \to 1$ par l'isomorphisme

$$\{\mathrm{id}\ 1,\ \mathrm{ab}\, f\colon F \to \operatorname{Im} f,\ \mathrm{id}\ G,\ h \mapsto \mathrm{pr}\,(g^{-1}(h)),\ \mathrm{id}\ 1\}.$$

Scission

4. On dit qu'une suite de groupes et d'homomorphismes $\{G_i, h_i\}$ *se scinde au terme* G_α *à droite par l'homomorphisme* $\zeta\colon G_{\alpha+1} \to G_\alpha$ si $h_\alpha \circ \zeta = \mathrm{id}\ G_{\alpha+1}$, et que cette scission est *normale* si en outre $\operatorname{Im} \zeta$ est un sous-groupe normal du groupe G_α.

On dit que la suite $\{G_i, h_i\}$ *se scinde au terme* G_α *à gauche par l'homomorphisme* $\zeta\colon G_\alpha \to G_{\alpha-1}$ si $\zeta \circ h_{\alpha-1} = \mathrm{id}\ G_{\alpha-1}$.

5 (Lemme). *Soient A, B des groupes et $\alpha: A \to B$, $\beta: B \to A$ des homomorphismes. Si* Im β *est un sous-groupe normal du groupe A et $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}\, B$, alors* $A = \mathrm{Ker}\, \alpha \times \mathrm{Im}\, \beta$.

Démonstration. Chaque élément a du groupe A peut être représenté sous la forme $[a\,(\beta \circ \alpha\,(a))^{-1}]\,(\beta \circ \alpha\,(a))$; il est clair que le premier facteur est contenu dans Ker α, le second dans Im β. Si l'on a $a \in \mathrm{Ker}\, \alpha \cap \mathrm{Im}\, \beta$, alors $\alpha\,(a) = e_B$ et il existe un $b \in B$, $\beta\,(b) = a$, de sorte que $b = \alpha \circ \beta\,(b) = \alpha\,(a) = e_B$ et $a = \beta\,(b) = e_A$.

6. *Si la suite exacte $\{G_i, h_i\}$ se scinde normalement à droite au terme G_α et se scinde à droite au terme $G_{\alpha-3}$, alors elle se scinde à gauche au terme G_α et $G_\alpha \cong G_{\alpha-1} \times G_{\alpha+1}$. En détail: dans les conditions indiquées, $h_{\alpha-1}$ est un monomorphisme, h_α un épimorphisme et G_α se décompose en un produit direct dont les facteurs sont le sous-groupe* Im $h_{\alpha-1}$ *et un certain sous-groupe appliqué bijectivement sur $G_{\alpha+1}$ par la restriction de h_α; dans ce cas, chaque homomorphisme $\zeta: G_{\alpha+1} \to G_\alpha$ qui opère une scission à droite est un monomorphisme; si cette scission est normale, alors* Im ζ *peut servir de complément direct du sous-groupe* Im $h_{\alpha-1}$.

Démonstration. L'égalité $G_\alpha = \mathrm{Im}\, h_{\alpha-1} \times \mathrm{Im}\, \zeta$ découle du lemme 5 et de l'exactitude de la suite $\{G_i, h_i\}$. La relation $h_\alpha \circ \zeta = \mathrm{id}\, G_{\alpha+1}$ implique que h_α est un épimorphisme et ζ un monomorphisme. De la scission de la suite $\{G_i, h_i\}$ à droite au terme $G_{\alpha-3}$ on déduit que $h_{\alpha-3}$ est également un épimorphisme, d'où, en se servant de son exactitude, on tire que $h_{\alpha-2}$ est un homomorphisme trivial et $h_{\alpha-1}$ un monomorphisme. Enfin, en guise d'homomorphisme scindant à gauche au terme G_α on peut prendre l'homomorphisme inverse de $h_{\alpha-1}$ sur Im $h_{\alpha-1}$ et égal à un sur Im ζ.

7. *Si la suite exacte $\{G_i, h_i\}$ se scinde à gauche aux termes G_α et $G_{\alpha+3}$, alors elle se scinde normalement à droite au terme G_α et $G_\alpha \cong G_{\alpha-1} \times G_{\alpha+1}$. En détail: dans ces conditions, $h_{\alpha-1}$ est un monomorphisme, h_α un épimorphisme et G_α se décompose en un produit direct du sous-groupe* Im $h_{\alpha-1}$ *et d'un certain sous-groupe appliqué bijectivement sur $G_{\alpha+1}$ par la restriction de h_α; dans ce cas, chaque homomorphisme scindant à gauche $\zeta: G_\alpha \to G_{\alpha-1}$ est un épimorphisme, et en guise de complément direct du sous-groupe* Im $h_{\alpha-1}$ *on peut prendre* Ker ζ.

Démonstration. L'égalité $G_\alpha = \mathrm{Im}\, h_{\alpha-1} \times \mathrm{Ker}\, \zeta$ découle du lemme 5. Le fait que $h_{\alpha-1}$ est un monomorphisme et ζ un épimorphisme découle de l'égalité $\zeta \circ h_{\alpha-1} = \mathrm{id}\, G_{\alpha-1}$. Du fait que la suite $\{G_i, h_i\}$ se scinde à gauche au terme $G_{\alpha+3}$ et de son exactitude, on déduit que h_α est un épimorphisme. En guise d'homomorphisme normal à droite scindant au terme G_α on peut prendre l'homomorphisme composé $G_{\alpha+1} = G_\alpha/\mathrm{Ker}\, h_\alpha = G_\alpha/\mathrm{Im}\, h_{\alpha-1} = (\mathrm{Im}\, h_{\alpha-1} \times \mathrm{Ker}\, \zeta)/\mathrm{Im}\, h_{\alpha-1} = \mathrm{Ker}\, \zeta \xrightarrow{\mathrm{in}} G_\alpha$.

8. Pour la suite exacte $1 \to F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 1$ *la scission à gauche ainsi que la scission normale à droite au terme G sont équivalentes à l'existence d'un complément direct de* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

Ceci découle du lemme **5**.

Le lemme des cinq

9. Si

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & G_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & G_3 \arrow[r, "h_3"] \arrow[d, "\varphi_3"] & G_4 \arrow[r, "h_4"] \arrow[d, "\varphi_4"] & G_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
G'_1 \arrow[r, "h'_1"] & G'_2 \arrow[r, "h'_2"] & G'_3 \arrow[r, "h'_3"] & G'_4 \arrow[r, "h'_4"] & G'_5
\end{tikzcd}$$

est un homomorphisme d'une suite exacte dans une autre suite exacte, où φ_1 *est un épimorphisme,* φ_2 *et* φ_4 *des isomorphismes et* φ_5 *monomorphisme, alors* φ_3 *est un isomorphisme.*

Démontrons d'abord que φ_3 est un monomorphisme. Soit $a \in \operatorname{Ker} \varphi_3$. Alors $\varphi_4 \circ h_3(a) = h'_3 \circ \varphi_3(a) = e_{G'_4}$ et par conséquent $h_3(a) = e_{G_4}$, i.e. $a \in \operatorname{Ker} h_3 = \operatorname{Im} h_2$. Soit $a = h_2(b)$, $b \in G_2$; puisque $h'_2 \circ \varphi_2(b) = \varphi_3 \circ h_2(b) = \varphi_3(a) = e_{G'_3}$, il existe un $c \in G_1$ tel que $h'_1(c) = \varphi_2(b)$ et par conséquent on peut trouver un $d \in G_1$ tel que $h'_1 \circ \varphi_1(d) = \varphi_2(b)$. D'autre part, $h'_1 \circ \varphi_1(d) = \varphi_2 \circ h_1(d)$ et donc $\varphi_2(b) = \varphi_2 \circ h_1(d)$. Par conséquent, $b = h_1(d)$ et $a = h_2 \circ h_1(d) = e_{G_3}$.

Démontrons maintenant que φ_3 est un épimorphisme. Soit $a \in G'_3$. Alors $\varphi_5 \circ h_4 \circ \varphi_4^{-1} \circ h'_3(a) = h'_4 \circ h'_3(a) = e_{G'_5}$ et donc $h_4 \circ \varphi_4^{-1} \circ h'_3(a) = e_{G_5}$, i.e. $\varphi_4^{-1} \circ h'_3(a) \in \operatorname{Ker} h_4 = \operatorname{Im} h_3$. Soit $\varphi_4^{-1} \circ h'_3(a) = h_3(b)$, $b \in G_3$; puisque

$$h'_3(a(\varphi_3(b))^{-1}) = (\varphi_4 \circ \varphi_4^{-1} \circ h'_3(a))(h'_3 \circ \varphi_3(b))^{-1} =$$
$$= \varphi_4((\varphi_4^{-1} \circ h'_3(a))(h_3(b))^{-1}) = e_{G'_4}$$

il existe un $c = G'_2$ tel que $h'_2(c) = a(\varphi_3(b))^{-1}$ et donc il existe un $d \in G_2$ tel que $h'_2 \circ \varphi_2(d) = a(\varphi_3(b))^{-1}$. D'autre part, $h'_2 \circ \varphi_2(d) = \varphi_3 \circ h_2(d)$ et donc $a(\varphi_3(b))^{-1} = \varphi_3 \circ h_2(d)$. Ainsi $a = \varphi_3(h_2(d)\, b)$.

π-suites

10. Dans les sous-paragraphes suivants, nous aurons affaire à des suites dites *homotopiques* des constructions très compliquées qui ressemblent à des suites de groupes et d'homomorphismes, mais sont munies de structures et de propriétés supplémentaires. De telles suites apparaissent dans diverses situations géométriques, mais se ressemblent du point de vue algébrique. Passons à leur description et à une étude préliminaire purement algébrique.

11. Une suite infinie à gauche

$$\ldots \Pi_7 \xrightarrow{\rho_6} \Pi_6 \xrightarrow{\rho_5} \Pi_5 \xrightarrow{\rho_4} \Pi_4 \xrightarrow{\rho_3} \Pi_3 \xrightarrow{\rho_2} \Pi_2 \xrightarrow{\rho_1} \Pi_1 \xrightarrow{\rho_0} \Pi_0, \qquad (6)$$

dans laquelle

Π_0, Π_1, Π_2 sont des ensembles à unité (à point de base),

Π_3, Π_4, Π_5 des groupes,

Π_6, Π_7, ... des groupes abéliens,

ρ_0, ρ_1, ρ_2 des homomorphismes au sens de 1.2,

ρ_3, ρ_4, ... des homomorphismes de groupes,

est appelée *π-suite* si l'on se donne

une action à droite du groupe Π_3 dans les groupes Π_{3k}, $k \geqslant 2$,

une action à droite du groupe Π_4 dans les groupes Π_{3k+1}, $k \geqslant 2$,

une action à droite du groupe Π_4 dans les groupes Π_{3k-1}, $k \geqslant 2$,

une action à droite du groupe Π_3 dans l'ensemble Π_2

telles que

(i) ρ_{3k}, $k \geqslant 2$, est un ρ_3-homomorphisme;

(ii) ρ_{3k+1}, $k \geqslant 2$, est un Π_4-homomorphisme;

(iii) ρ_{3k-1}, $k \geqslant 2$, est un Π_4-homomorphisme relativement à l'action à droite du groupe Π_4 dans Π_{3k}, cette action étant induite par l'action donnée du groupe Π_3 dans Π_{3k} suivant l'homomorphisme ρ_3;

(iv) ρ_4 est un Π_4-homomorphisme relativement à l'action intérieure à droite du groupe Π_4;

(v) la transformation du groupe Π_5 effectuée par l'image $\rho_4(\alpha)$ de l'élément α du groupe Π_5 est un automorphisme intérieur $\beta \mapsto \alpha^{-1}\beta\alpha$;

(vi) sur $\rho_2(\Pi_3)$, la transformation de l'ensemble Π_2 effectuée par l'élément σ du groupe Π_3 se détermine par la formule $\rho_2(\omega)\,\sigma = \rho_2(\omega\sigma)$.

On appelle *homomorphisme* de la π-suite $\{\Pi_i, \rho_i\}_{i=0}^{\infty}$ dans la π-suite $\{\Pi'_i, \rho'_i\}_{i=0}^{\infty}$ une suite d'homomorphismes $\{h_i : \Pi_i \to \Pi'_i\}_{i=0}^{\infty}$ telle que: $\rho'_i \circ h_{i+1} = h_i \circ \rho_i$ pour chaque $i \geqslant 0$; h_{3k}, h_{3k+1}, h_{3k-1}, $k \geqslant 2$, sont (respectivement) des h_3-, h_4-, h_4-homomorphismes; $h_2(\omega)\,h_3(\sigma) = h_2(\omega\sigma)$ quels que soient $\omega \in \Pi_2$, $\sigma \in \Pi_3$. Un *isomorphisme* se définit comme homomorphisme constitué d'isomorphismes.

12. Parmi les conditions (i) à (vi) qui participent à la définition d'une π-suite, il y en a deux, à savoir (iv) et (v), qui se rapportent à ρ_4. Il découle de (iv) que si Π_4 agit dans Π_5 identiquement, alors $\operatorname{Im}\rho_4$ est contenu dans le centre du groupe Π_4. D'autre part, il découle de (v) que si Π_4 agit dans Π_5 identiquement, alors le groupe Π_5 est commutatif; la réciproque est vraie lorsque ρ_4 est un épimorphisme; enfin, dans le cas général $\operatorname{Ker}\rho_4$ est contenu dans le centre du groupe Π_5.

13. Nous dirons qu'une π-suite (6) est *exacte* si $\operatorname{Ker}\rho_i = \operatorname{Im}\rho_{i+1}$ quel que soit $i \geqslant 0$, et en outre les images inverses des éléments de

l'ensemble Π_1 par l'application ρ_1 coïncident avec les orbites de l'action du groupe Π_3 dans Π_2.

Si la π-suite (6) est exacte, alors il est évident que la trivialité de l'homomorphisme ρ_i pour $i \geqslant 0$ est équivalente à la surjectivité de ρ_{i+1}, tandis que la trivialité du noyau $\operatorname{Ker} \rho_i$ est équivalente à la trivialité de l'homomorphisme ρ_{i+1}. Dans le cas général, pour $i \geqslant 3$, la trivialité du noyau $\operatorname{Ker} \rho_i$ signifie que l'homomorphisme ρ_i est injectif puisque c'est un homomorphisme de groupe. La trivialité du noyau $\operatorname{Ker} \rho_2$ entraîne également l'injectivité de l'application ρ_2: si $\rho_2(\alpha) = \rho_2(\beta)$, alors

$$\rho_2(\alpha\beta^{-1}) = \rho_2(\alpha)\,\beta^{-1} = \rho_2(\beta)\,\beta^{-1} = \rho_2(\beta\beta)^{-1} = \rho_2(e_{\Pi_3})$$

(voir la condition (vi) dans *11*) et $\alpha = \beta$. On ne peut déduire de la trivialité du noyau $\operatorname{Ker} \rho_0$ l'injectivité de l'application ρ_0, et il en est de même pour l'application ρ_1, pourtant dans le cas d'une π-suite exacte (6) l'injectivité de l'application ρ_1 est garantie si le groupe Π_3 est trivial ou si son action dans Π_2 est l'identité.

Il découle du précédent que dans le cas d'une π-suite exacte (6) la trivialité de ρ_i et de ρ_{i+2} pour $i \geqslant 1$ est équivalente à la bijectivité de ρ_{i+1}; la trivialité de Π_i et de Π_{i+2} implique celle de Π_{i+1}, tandis que la trivialité de Π_{i-1} et de Π_{i+2} implique la bijectivité de ρ_i (voir *2*).

14. Soit (6) *une π-suite exacte. Si l'action du groupe Π_4 dans Π_2 induite par l'action du groupe Π_3 au moyen de l'homomorphisme ρ_3 est l'identité, alors* $\operatorname{Im} \rho_3$ *est un sous-groupe normal du groupe Π_3. La réciproque est vraie si ρ_2 est un épimorphisme.*

Démonstration. Supposons que Π_4 agit identiquement dans Π_2. Si $\alpha \in \Pi_4$, $\beta \in \Pi_3$, alors $\rho_2(\beta)\,\rho_3(\alpha) = \rho_2(\beta)$ et donc

$$\rho_2(\beta\rho_3(\alpha)\,\beta^{-1}) = \rho_2(\beta\rho_3(\alpha))\,\beta^{-1} = [\rho_2(\beta)\,\rho_3(\alpha)]\,\beta^{-1} =$$
$$= \rho_2(\beta)\,\beta^{-1} = \rho_2(\beta\beta^{-1}) = e_{\Pi_2}$$

(voir la condition (vi) dans *11*), de sorte que $\beta\rho_3(\alpha)\,\beta^{-1} \in \operatorname{Ker} \rho_2 = \operatorname{Im} \rho_3$. Ainsi $\operatorname{Im} \rho_3$ est un sous-groupe normal du groupe Π_3.

Soient ρ_2 un épimorphisme et $\operatorname{Im} \rho_3$ un sous-groupe normal du groupe Π_3. Si $\alpha \in \Pi_4$, $\gamma \in \Pi_2$, alors il existe un $\beta \in \Pi_3$ avec $\rho_2(\beta) = \gamma$ et puisque $\beta\rho_3(\alpha)\,\beta^{-1} \in \operatorname{Im} \rho_3 = \operatorname{Ker} \rho_2$, on a $\gamma\rho_3(\alpha) = \rho_2(\beta)\,\rho_3(\alpha) = \rho_2(\beta\rho_3(\alpha)) = \rho_2(\beta\rho_3(\alpha)\,\beta^{-1}\beta) = \rho_2(\beta\rho_3(\alpha)\,\beta^{-1})\,\beta = e_{\Pi_2}\,\beta = \rho_2(e_{\Pi_3})\,\beta = \rho_2(\beta) = \gamma$ (voir toujours la condition (vi) dans *11*). Ainsi Π_4 agit identiquement dans Π_2.

15. Toute suite de groupes commutatifs et d'homomorphismes de groupes de la forme (6) peut être envisagée comme une π-suite dans laquelle les actions du groupe Π_3 dans les groupes Π_{3k}, $k \geqslant 2$, et les actions du groupe Π_4 dans les groupes Π_{3k+1} et Π_{3k-1}, $k \geqslant 2$, sont les identités, tandis que l'action du groupe Π_3 dans le groupe Π_2 se définit par la formule $\omega\sigma = \omega\rho_2(\sigma)$, $\omega \in$

$\in \Pi_2$, $\sigma \in \Pi_3$. Il est clair alors que les suites, exactes au sens de *2*, le seront en tant que π-suites, de même les applications qui sont des homomorphismes au sens de *1* le seront au sens de *11*.

Scission des π-suites

16. On dit qu'une π-suite (6) *se scinde au terme* Π_α *à droite par l'homomorphisme* $\zeta\colon \Pi_{\alpha-1} \to \Pi_\alpha$ si $\rho_{\alpha-1} \circ \zeta = \mathrm{id}\, \Pi_{\alpha-1}$; cette scission est dite *normale* si $\alpha = 0, 1, 2$ ou bien si $\mathrm{Im}\, \zeta$ est un sous-groupe normal du groupe Π_α. On dit qu'une π-suite (6) *se scinde au terme* Π_α *à gauche par l'homomorphisme* $\zeta\colon \Pi_\alpha \to \Pi_{\alpha+1}$ si $\zeta \circ \rho_\alpha = \mathrm{id}\, \Pi_{\alpha+1}$. (L'homomorphisme est entendu comme un homomorphisme de groupe si cela a un sens, et comme un homomorphisme d'un ensemble à unité dans un ensemble à unité dans le cas contraire.)

17. Dans les termes Π_α, $\alpha \geqslant 5$, *la scission à droite d'une* π*-suite* (6) *est toujours normale. Dans le terme* Π_4, *la scission à droite est également normale si la suite est exacte et* Π_4 *agit identiquement dans* Π_5.

Puisque les groupes Π_α, $\alpha > 5$, sont commutatifs, seul le cas des termes Π_5 et Π_4 nécessite une démonstration. Supposons que la π-suite (6) se scinde au terme Π_5 à droite par l'homomorphisme $\zeta\colon \Pi_4 \to \Pi_5$. Si $\alpha, \beta \in \Pi_5$, alors

$$\beta\alpha\beta^{-1} = [\beta\zeta(\rho_4(\beta^{-1}))]\,[\zeta(\rho_4(\beta))\,\alpha\beta^{-1}] =$$
$$= [\zeta(\rho_4(\beta))\,\alpha\beta^{-1}]\,[\beta\zeta(\rho_4(\beta^{-1}))] = \zeta(\rho_4(\beta))\,\alpha\zeta(\rho_4(\beta^{-1}));$$

on peut changer de place les facteurs car $\beta\zeta(\rho_4(\beta^{-1}))$ appartient, comme on voit à partir de l'égalité $\rho_4 \circ \zeta = \mathrm{id}\, \Pi_4$, au noyau de l'homomorphisme ρ_4 et par conséquent au centre du groupe Π_5 (voir *12*). Cette représentation du produit $\beta\alpha\beta^{-1}$ nous montre que $\alpha \in \mathrm{Im}\, \zeta$ implique $\beta\alpha\beta^{-1} \in \mathrm{Im}\, \zeta$ quel que soit $\beta \in \Pi_5$.

Supposons que la π-suite (6) est exacte et se scinde au terme Π_4 à droite par l'homomorphisme $\zeta\colon \Pi_3 \to \Pi_4$; supposons que Π_4 agit identiquement dans Π_5. Si $\alpha, \beta \in \Pi_4$, alors

$$\beta\alpha\beta^{-1} = [\beta\zeta(\rho_3(\beta^{-1}))]\,[\zeta(\rho_3(\beta))\,\alpha\beta^{-1}] =$$
$$= [\zeta(\rho_3(\beta))\,\alpha\beta^{-1}]\,[\beta\zeta(\rho_3(\beta^{-1}))] = \zeta(\rho_3(\beta))\,\alpha\zeta(\rho_3(\beta^{-1}));$$

on peut permuter les facteurs puisque $\beta\zeta(\rho_3(\beta^{-1}))$ appartient à $\mathrm{Ker}\, \rho_3 = \mathrm{Im}\, \rho_4$ comme on voit à partir de l'égalité $\rho_3 \circ \zeta = \mathrm{id}\, \Pi_3$ et par conséquent au centre du groupe Π_4 (voir *12*). Cette représentation du produit $\beta\alpha\beta^{-1}$ nous montre que $\alpha \in \mathrm{Im}\, \zeta$ implique $\beta\alpha\beta^{-1} \in \mathrm{Im}\, \zeta$ quel que soit $\beta \in \Pi_4$.

18. Supposons que la π-suite (6) est exacte, se scinde normalement à droite au terme Π_α et se scinde à droite au terme $\Pi_{\alpha+3}$. Pour $\alpha \geqslant 4$, d'après *6*, la suite (6) se scinde au terme Π_α également

à gauche et Π_α se décompose en un produit dont l'un des facteurs est un sous-groupe canoniquement isomorphe à $\Pi_{\alpha+1}$ et l'autre, un sous-groupe isomorphe à $\Pi_{\alpha-1}$. Pour $\alpha = 1, 2, 3$, la suite (6) se scinde également à gauche au terme Π_α (pour la démonstration voir *6*), mais, comme nous montrent des exemples évidents, l'isomorphisme $\Pi_\alpha \cong \Pi_{\alpha+1} \times \Pi_{\alpha-1}$ peut ne pas avoir lieu.

Supposons maintenant que la π-suite (6) est exacte et se scinde à gauche aux termes Π_α, $\Pi_{\alpha-3}$. Si $\alpha \geqslant 6$, alors en vertu de *7*, la suite (6) se scinde normalement à droite au terme Π_α, tandis que Π_α se décompose en un produit ayant pour facteurs un sous-groupe canoniquement isomorphe à $\Pi_{\alpha+1}$ et un sous-groupe isomorphe à $\Pi_{\alpha-1}$. En reprenant les raisonnements de *7* on montre que tout ceci est vrai lorsque $\alpha = 4, 5$; pour $\alpha = 3$ on ne peut affirmer seulement que la suite se scinde à droite au terme Π_α.

Par la suite nous rencontrerons souvent des situations où notre π-suite est exacte et se scinde tous les trois termes. Il découle du précédent que si la π-suite (6) est exacte et se scinde normalement à droite aux termes Π_{i_0+3k}, $i_0 + 3k \geqslant 1$, alors elle s'y scinde également à gauche; si elle est exacte et se scinde à gauche aux termes Π_{i_0+3k}, alors aux termes Π_{i_0+3k}, $i_0 + 3k \geqslant 3$, a lieu une scission à droite, tandis qu'aux termes Π_{i_0+3k}, $i_0 + 3k \geqslant 4$, elle se scinde normalement à droite.

π-variante du lemme des cinq

19. Soient $\{\Pi_i, \rho_i\}_{i=0}^\infty$, $\{\Pi'_i, \rho'_i\}_{i=0}^\infty$ *des π-suites exactes et supposons que* $\{h_i : \Pi_i \to \Pi'_i\}_{i=0}^\infty$ *est un homomorphisme de la première dans la seconde. Si* $h_{\alpha-1}$, $h_{\alpha+1}$ *sont des isomorphismes et* $\operatorname{Ker} h_{\alpha-2} = e_{\Pi_{\alpha-2}}$, $\operatorname{Im} h_{\alpha+2} = \Pi'_{\alpha+2}$, *alors* $\operatorname{Ker} h_\alpha = e_{\Pi_\alpha}$ *et* $\operatorname{Im} h_\alpha = \Pi'_\alpha$ (*de sorte que* h_α *est un isomorphisme de groupes si* $\alpha \geqslant 3$).

Pour $\alpha \geqslant 5$, voir *9*, pour $\alpha = 2, 3, 4$ l'assertion se démontre de la même manière.

6. Suite d'homotopie d'un couple

1. Soit (X, A) un couple topologique à point de base $x_0 \in A$. D'après les pp. 1, 4, pour $r \geqslant 0$ sont définis les groupes d'homotopie $\pi_r(X, x_0)$ et $\pi_r(A, x_0)$ et pour $r \geqslant 1$ le groupe d'homotopie $\pi_r(X, A, x_0)$. En outre, d'après 4.3, on a les homomorphismes $\partial : \pi_r(X, A, x_0) \to \pi_{r-1}(A, x_0)$. Ajoutons-y les homomorphismes

$$\mathrm{in}_* : \pi_r(A, x_0) \to \pi_r(X, x_0), \quad \mathrm{rel}_* : \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X, A, x_0)$$

induits par les inclusions

$$\mathrm{in} : A \to X, \quad \mathrm{rel} : (X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0).$$

Ces trois séries de groupes d'homotopie et les trois séries d'homomorphismes forment une suite infinie à gauche

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_2(A, x_0) \xrightarrow{\mathrm{in}_*} \pi_2(X, x_0) \xrightarrow{\mathrm{rel}_*} \pi_2(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{\mathrm{in}_*}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{in}_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\mathrm{rel}_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{\mathrm{in}_*} \pi_0(X_0, x_0), \quad (7)$$

dont tous les termes, sauf les six derniers, sont des groupes commutatifs, tous les termes, sauf les trois derniers, sont des groupes, et les trois derniers sont des ensembles à unité; toutes les applications, sauf les trois dernières, sont des homomorphismes de groupes, tandis que les trois dernières sont des homomorphismes d'ensembles à unité dans des ensembles à unité. D'après 3.3 et 4.4, sont définies les actions à droite du groupe $\pi_1(X, x_0)$ dans les groupes $\pi_r(X, x_0)$ et du groupe $\pi_1(A, x_0)$ dans les groupes $\pi_r(A, x_0)$ et $\pi_r(X, A, x_0)$. Les homomorphismes in_*, rel_*, ∂ sont compatibles avec ces actions, comme le requiert la définition 5.11 (voir 3.6, 4.5 et 3.4), et l'on a $\alpha^{-1}\beta\alpha = T_{\partial\alpha}\beta \ \forall\ \alpha, \ \beta \in \pi_2(X, A, x_0)$ (voir 4.7). En outre, d'après 4.8 et 4.9, on se donne une action de groupe à droite de $\pi_1(X, x_0)$ dans $\pi_1(X, A, x_0)$ qui vérifie $\mathrm{rel}_*(\omega)\sigma = \mathrm{rel}_*(\omega\sigma)$ $\forall\ \omega, \ \sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Ainsi (7) est une π-suite. On l'appelle *suite d'homotopie du couple* (X, A) *à point de base* x_0.

2. La suite (7) *est exacte.*

La démonstration consiste en une vérification immédiate des six inclusions

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{in}_* \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{rel}_*, \ \mathrm{Ker}\ \mathrm{rel}_* \subset \mathrm{Im}\ \mathrm{in}_*; \ \mathrm{Im}\ \mathrm{rel}_* \subset \mathrm{Ker}\ \partial,$$
$$\mathrm{Ker}\ \partial \subset \mathrm{Im}\ \mathrm{rel}_*; \ \mathrm{Im}\ \partial \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{in}_*, \ \mathrm{Ker}\ \mathrm{in}_* \subset \mathrm{Im}\ \partial$$

et du fait que pour les éléments α, β de l'ensemble $\pi_1(X, A, x_0)$ on peut trouver un élément $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ vérifiant $\alpha\sigma = \beta$ si et seulement si $\partial\alpha = \partial\beta$.

3. Pour un chemin quelconque $s : I \to A$ *les isomorphismes verticaux*

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \pi_r(A, s(0)) & \xrightarrow{\mathrm{in}_*} & \pi_r(X, s(0)) & \xrightarrow{\mathrm{rel}_*} & \pi_r(X, A, s(0)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{r-1}(A, s(0)) \ldots \\
\downarrow T_s & & \downarrow T_{\mathrm{in}\circ s} & & \downarrow T_s & & \downarrow T_s \\
\ldots \pi_r(A, s(1)) & \xrightarrow{\mathrm{in}_*} & \pi_r(X, s(1)) & \xrightarrow{\mathrm{rel}_*} & \pi_r(X, A, s(1)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{r-1}(A, s(1)) \ldots
\end{array}$$

constituent un isomorphisme de la première suite sur la seconde.

La commutativité du premier carré a été établie dans 3.6, celle du second et du troisième dans 4.5. La compatibilité des homomorphismes verticaux avec les actions des groupes fondamentaux se réduit à la propriété 2.1 (i) des assemblages

$$(A, \{\pi_r(A, x)\}, \{T_s\}), \quad (X, \{\pi_r(X, x)\}, \{T_s\}), \ (A, \{\pi_r(X, A, x)\}, \{T_s\})$$

et à l'égalité

$T_s(\omega\sigma) = T_s(\omega)\, T_{\mathrm{in}\circ s}(\sigma)$ $[\sigma \in \pi_1(X, s(0)),\ \omega \in \pi_1(X, A, s(0))]$,

établie dans 4.8.

4. Les homomorphismes verticaux

$$\begin{tikzcd}
\cdots \pi_r(A, x_0) \arrow[r, "\mathrm{in}_*"] \arrow[d, "(\mathrm{ab}\, f)_*"] & \pi_r(X, x_0) \arrow[r, "\mathrm{rel}_*"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_r(X, A, x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_{r-1}(A, x_0) \cdots \arrow[d, "(\mathrm{ab}\, f)_*"] \\
\cdots \pi_r(A', x_0') \arrow[r, "\mathrm{in}_*"] & \pi_r(X', x_0') \arrow[r, "\mathrm{rel}_*"] & \pi_r(X', A', x_0') \arrow[r, "\partial"] & \pi_{r-1}(A', x_0') \cdots
\end{tikzcd} \qquad (8)$$

induits par l'application continue $f\colon (X, A, x_0) \to (X', A', x_0')$ *constituent un homomorphisme de la première suite dans la seconde.*

La commutativité des deux premiers carrés découle de 1.7 et de 4.2, celle du troisième a été établie dans 4.3, tandis que la compatibilité des homomorphismes verticaux avec les actions des groupes fondamentaux — dans 3.6, 4.5 et 4.8.

Cas particuliers importants

5. Si X est ∞-connexe, alors tous les homomorphismes $\partial\colon \pi_r \times (X, A, x_0) \to \pi_{r-1}(A, x_0)$ sont des isomorphismes. Si X est k-connexe et $k < \infty$, alors les homomorphismes $\partial\colon \pi_r(X, A, x_0) \to \pi_{r-1}(A, x_0)$, $r \leqslant k$, sont des isomorphismes, tandis que $\partial\colon \pi_{k+1}(X, A, x_0) \to \pi_k(A, x_0)$ est un épimorphisme. Dans les deux cas la réciproque est vraie si X est connexe.

Si l'espace A est ∞-connexe alors tous les homomorphismes $\mathrm{rel}_*\colon \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X, A, x_0)$ sont des isomorphismes. Si A est k-connexe et $k < \infty$, alors les homomorphismes $\mathrm{rel}_*\colon \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X, A, x_0)$, $r \leqslant k$, sont des isomorphismes et $\mathrm{rel}_*\colon \pi_{k+1} \times (X, x_0) \to \pi_{k+1}(X, A, x_0)$ est un épimorphisme. Dans les deux cas la réciproque est vraie si un des espaces X, A est connexe.

Si le couple (X, A) est ∞-connexe, alors tous les homomorphismes $\mathrm{in}_*\colon \pi_r(A, x_0) \to \pi_r(X, x_0)$ sont des isomorphismes. Si le couple (X, A) est k-connexe et $k < \infty$, alors les homomorphismes $\mathrm{in}_*\colon \pi_r(A, x_0) \to \pi_r(X, x_0)$ pour $r < k$ sont des isomorphismes et $\mathrm{in}_*\colon \pi_k(A, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$ est un épimorphisme. Dans les deux cas la réciproque est également valable (sans hypothèses supplémentaires). En particulier, si $\mathrm{in}\colon A \to X$ est une équivalence d'homotopie, alors le couple (X, A) est ∞-connexe (voir 3.7 et 1.3.3.9).

6. Soit A un rétracte de l'espace X ; la suite (7) *se scinde à gauche aux termes* $\pi_r(X, x_0)$. *En guise d'homomorphismes de scission on peut prendre les homomorphismes* $\rho_*\colon \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(A, x_0)$ *induits par une rétraction quelconque* $\rho\colon X \to A$.

D é m o n s t r a t i o n. Puisque $\rho \circ \mathrm{in} = \mathrm{id}\, A$, on a $\rho_* \circ \mathrm{in}_* = \mathrm{id}\, \pi_r(A, x_0)$.

7. Si (X, x_0) *se contracte dans* (A, x_0), *i.e. l'application* id X *est* x_0*-homotope à une certaine application* $h: X \to X$ *vérifiant* $hX \subset \subset A$, *alors la suite* (7) *se scinde à droite aux termes* $\pi_r(A, x_0)$. *En guise d'homomorphismes de scission on peut prendre les homomorphismes* $(\mathrm{ab}\, h)_*: \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(A, x_0)$.

Démonstration. La composée $\mathrm{in} \circ \mathrm{ab}\, h$ est x_0-homotope à id X et donc $\mathrm{in}_* \circ (\mathrm{ab}\, h)_* = \mathrm{id}\, \pi_r(X, x_0)$.

8. Si (A, x_0) *se contracte dans* (X, x_0) *au point* x_0, *i.e. l'inclusion* $A \to X$ *est* x_0*-homotope à l'application constante, alors la suite* (7) *se scinde à droite aux termes* $\pi_r(X, A, x_0)$. *En guise d'homomorphismes de scission on peut prendre les homomorphismes* $\pi_r(A, x_0) \to \pi_{r+1}(X, A, x_0)$ *induits par les applications* $\gamma_r: \mathrm{Sph}_r(A, x_0) \to \mathrm{Sph}_{r+1}(X, A, x_0)$ *définies par la formule*

$$[\gamma_r(\varphi)](t_1, \ldots, t_{r+1}) = h(\varphi(t_1, \ldots, t_r), t_{r+1}), \quad \varphi \in \mathrm{Sph}_r(A, x_0),$$

à l'aide d'une x_0*-homotopie* $h: A \times I \to X$ *quelconque qui joint* $\mathrm{in}: A \to X$ *à l'application constante.*

L'assertion découle de l'égalité évidente $\partial \circ \gamma_r = \mathrm{id}\, \mathrm{Sph}_r(A, x_0)$.

9. Les remarques ci-dessous se rapportent non pas à la suite d'homotopie d'un couple, mais à l'homomorphisme (8) induit par l'application $f: (X, A, x_0) \to (X', A', x_0')$ d'un couple à point de base dans un couple à point de base.

Il découle de la π-variante du lemme des cinq (voir 5.19) que:

si tous les homomorphismes $(\mathrm{ab}\, f)_*: \pi_r(A, x_0) \to \pi_r(A', x_0')$, $r \geqslant 0$, et tous les homomorphismes $f_*: \pi_r(X, A, x_0) \to \pi_r(X', A', x_0')$, $r \geqslant 1$, sont des isomorphismes, alors tous les homomorphismes $f_*: \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X', x_0')$, $r \geqslant 1$, sont des isomorphismes;

si tous les homomorphismes $f_*: \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X', x_0')$, $r \geqslant 1$, et tous les homomorphismes $f_*: \pi_r(X, A, x_0) \to \pi_r(X', A', x_0')$, $r \geqslant 1$, sont des isomorphismes, alors tous les homomorphismes $(\mathrm{ab}\, f)_*: \pi_r(A, x_0) \to \pi_r(A', x_0')$, $r \geqslant 1$, sont des isomorphismes;

si tous les homomorphismes $f_*: \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X', x_0')$, $r \geqslant 0$, et tous les homomorphismes $(\mathrm{ab}\, f)_*: \pi_r(A, x_0) \to \pi_r(A', x_0')$, $r \geqslant 0$ sont des isomorphismes, alors tous les homomorphismes $f_*: \pi_r \times \times (X, A, x_0) \to \pi_r(X', A', x_0')$, $r \geqslant 2$, sont des isomorphismes et $f_*: \pi_1(X, A, x_0) \to \pi_1(X', A', x_0')$ est un épimorphisme à noyau nul.

Dans le dernier cas l'application $f_*: \pi_1(X, A, x_0) \to \pi_1(X', A', x_0')$ n'est pas nécessairement injective (voir 3.8.8). On peut néanmoins affirmer qu'elle le sera (et sera alors un isomorphisme) si l'on admet en plus que tous les homomorphismes $(\mathrm{ab}\, f)_*: \pi_1(A, x) \to \pi_1(A', f(x))$ pour $x \in A$ sont des épimorphismes. En effet, soient $\omega_1, \omega_2 \in \pi_1(X, A, x_0)$ et $f_*(\omega_1) = f_*(\omega_2)$ et supposons que w_1, w_2 sont des sphéroïdes appartenant aux classes ω_1, ω_2. Puisque $f_*(\omega_1) = f_*(\omega_2)$, on voit que les points $f \circ w_1(1)$, $f \circ w_2(1)$ peuvent

être joints par un chemin $s' : I \to A'$ tel que le lacet

$$((f \circ w_1)\,([\mathrm{in} : A' \to X'] \circ s'))\,(f \circ w_2)^{-1} \tag{9}$$

est homotope au lacet constant. Puisque

$$(\mathrm{ab}\, f)_* : \pi_0\,(A,\ x_0) \to \pi_0\,(A',\ x_0')$$

est un isomorphisme, tandis que

$$(\mathrm{ab}\, f)_* : \pi_1\,(A,\ w_1\,(1)) \to \pi_1\,(A',\ f\,(w_1\,(1)))$$

est un épimorphisme, les points $w_1\,(1)$, $w_2\,(1)$ peuvent être joints par un chemin $s : I \to A$ tel que le chemin $\mathrm{ab}\, f \circ s : I \to A'$ est homotope à s'. Pour un tel choix de s, le lacet

$$(w_1\,([\mathrm{in} : A \to X] \circ s))\, w_2^{-1} \tag{10}$$

est envoyé par l'application f dans un lacet homotope au lacet (9) et donc homotope au lacet constant. Puisque $f_* : \pi_1\,(X,\ x_0) \to \pi_1\,(X',\ x_0')$ est un isomorphisme, il en découle que le lacet (10) est homotope au lacet constant, i.e. que les sphéroïdes w_1, w_2 sont homotopes.

Suite d'homotopie d'un triplet

10. Soit $(X,\ A,\ B)$ un triplet topologique à point de base $x_0 \in B$. D'après *4*, pour $r \geqslant 1$ sont définis les groupes d'homotopie

$$\pi_r\,(X,\ A,\ x_0), \qquad \pi_r\,(X,\ B,\ x_0), \qquad \pi_r\,(A,\ B,\ x_0)$$

et les homomorphismes

$$\mathrm{in}_* : \pi_r\,(A,\ B,\ x_0) \to \pi_r\,(X,\ B,\ x_0), \quad \mathrm{rel}_* : \pi_r\,(X,\ B,\ x_0) \to \pi_r\,(X,\ A,\ x_0)$$

induits par les inclusions

$$\mathrm{in} : (A,\ B) \to (X,\ B), \qquad \mathrm{rel} : (X,\ B) \to (X,\ A).$$

Pour $r \geqslant 2$, nous définirons également l'homomorphisme

$$\partial : \pi_r\,(X,\ A,\ x_0) \to \pi_{r-1}\,(A,\ B,\ x_0)$$

comme la composée de l'homomorphisme frontière $\pi_r\,(X,\ A,\ x_0) \to \pi_{r-1}\,(A,\ x_0)$ et de l'homomorphisme $\pi_{r-1}\,(A,\ x_0) \to \pi_{r-1}\,(A,\ B,\ x_0)$ induit par l'inclusion $(A,\ x_0,\ x_0) \to (A,\ B,\ x_0)$. Ces trois séries de groupes d'homotopie et les trois séries d'homomorphismes forment une suite infinie à gauche

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_2\,(A,\ B,\ x_0) \xrightarrow{\mathrm{in}_*} \pi_2\,(X,\ B,\ x_0) \xrightarrow{\mathrm{rel}_*} \pi_2\,(X,\ A,\ x_0) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} \pi_1\,(A,\ B,\ x_0) \xrightarrow{\mathrm{in}_*} \pi_1\,(X,\ B,\ x_0) \xrightarrow{\mathrm{rel}_*} \pi_1\,(X,\ A,\ x_0), \tag{11}$$

qui, de même que (7), est une π-suite : les actions à droite du groupe $\pi_2\,(X,\ A,\ x_0)$ dans les groupes $\pi_r\,(X,\ A,\ x_0)$ et les actions à droite

du groupe $\pi_2(X, B, x_0)$ dans les groupes $\pi_r(A, B, x_0)$, $\pi_r(X, B, x_0)$ sont induites par les actions des groupes $\pi_1(A, x_0)$ et $\pi_1(B, x_0)$ à l'aide des homomorphismes

$$\partial: \pi_2(X, A, x_0) \to \pi_1(A, x_0), \qquad \partial: \pi_2(X, B, x_0) \to \pi_1(B, x_0),$$

tandis que l'action à droite du groupe $\pi_2(X, A, x_0)$ dans $\pi_1(A, B, x_0)$ est induite par l'action du groupe $\pi_1(A, x_0)$ à l'aide de l'homomorphisme $\partial: \pi_2(X, A, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$. Le fait que les conditions requises par la définition 5.11 sont satisfaites découle de 4.4, 4.5, 4.7, 4.8. La suite obtenue est appelée *suite d'homotopie du triplet* (X, A, B) *à point de base* x_0.

La suite (11) est exacte (voir *2*). Pour chaque chemin $s: I \to B$, les translations

$$\pi_r(X, A, s(0)) \to \pi_r(X, A, s(1)), \ \pi_r(X, B, s(0)) \to \pi_r(X, B, s(1)),$$
$$\pi_r(A, B, s(0)) \to \pi_r(A, B, s(1))$$

constituent un isomorphisme de la suite d'homotopie du triplet (X, A, B) à point de base $s(0)$ sur la suite d'homotopie du triplet (X, A, B) à point de base $s(1)$ (voir *3*). Pour toute application continue f d'un triplet (X, A, B) à point de base $x_0 \in B$ dans un triplet (X', A', B') à point de base $x_0' \in B'$, les homomorphismes

$$f_*: \pi_r(X, A, x_0) \to \pi_r(X', A', x_0'), \qquad f_*: \pi_r(X, B, x_0) \to$$
$$\to \pi_r(X', B', x_0'),$$
$$\text{ab}\, f_*: \pi_r(A, B, x_0) \to \pi_r(A', B', x_0')$$

constituent un homomorphisme de la suite d'homotopie du premier triplet dans la suite d'homotopie du second (voir *4*).

7. Assemblages de groupes d'homotopie des fibres d'un fibré de Serre

1. Soient ξ un fibré de Serre, F_0, F_1 ses fibres et x_0, x_1 des points de F_0, F_1. Les sphéroïdes

$$\varphi_0 \in \mathrm{Sph}_r(F_0, x_0), \qquad \varphi_1 \in \mathrm{Sph}_r(F_1, x_1)$$

sont dits *homotopes par fibres* si les sphéroïdes

$$[\text{in}: F_0 \to \text{tl}\, \xi] \circ \varphi_0 \in \mathrm{Sph}_r(\text{tl}\, \xi, x_0),$$
$$[\text{in}: F_1 \to \text{tl}\, \xi] \circ \varphi_1 \in \mathrm{Sph}_r(\text{tl}\, \xi, x_1)$$

peuvent être joints par une homotopie libre constituée de sphéroïdes de l'espace tl ξ qui appliquent I^r dans des fibres du fibré ξ, i.e. s'il existe une application $h: I^r \times I \to \text{tl}\, \xi$, constante sur chacun des ensembles $\mathrm{Fr}\, I^r \times t$, $t \in I$, et telle que

$$h(y, 0) = \varphi_0(y), \qquad h(y, 1) = \varphi_1(y)$$

pour $y \in I^r$, l'application $\mathrm{pr}\,\xi \circ h$ étant constante sur chacun des ensembles $I^r \times t$, $t \in I$. On dit alors que h est une *homotopie par fibres qui joint* φ_0 à φ_1 *le long du chemin* $t \mapsto h$ $(\mathrm{Fr}\, I^r \times t)$.

2. Tout sphéroïde de la fibre F_0 *d'origine* x_0 *admet une homotopie par fibres le long d'un chemin quelconque d'origine* x_0 *de l'espace* $\mathrm{tl}\,\xi$. *Les homotopies par fibres de sphéroïdes homotopes le long de chemins homotopes de l'espace* $\mathrm{tl}\,\xi$ *donnent toujours des sphéroïdes homotopes. Les homotopies par fibres de sphéroïdes librement homotopes le long de chemins qui recouvrent des chemins homotopes de l'espace* $\mathrm{bs}\,\xi$ *donnent des sphéroïdes librement homotopes.*

Démonstration. Soit $s: I \to \mathrm{tl}\,\xi$ un chemin d'origine x_0; supposons que $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(F_0, x_0)$. Définissons les homotopies

$$H: I^r \times I \to \mathrm{bs}\,\xi, \qquad G: \mathrm{Fr}\, I^r \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$$

en posant

$$H(y, t) = \mathrm{pr}\,\xi \circ s(t), \; G(y, t) = s(t).$$

Puisque $H(y, 0) = \mathrm{pr}\,\xi(\varphi(y))$ pour $y \in I^r$ et $G(y, 0) = \varphi(y)$ pour $y \in \mathrm{Fr}\, I^r$, il existe une homotopie $\widetilde{H}: I^r \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ qui recouvre H et telle que $\widetilde{H}(y, t) = G(y, t)$ pour $y \in \mathrm{Fr}\, I^r$ et $\widetilde{H}(y, 0) = \varphi(y)$ pour $y \in I^r$ (voir 4.1.3.6). Il est clair que $\widetilde{H}$ est une homotopie par fibres du sphéroïde φ le long de s.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, il suffit d'établir que les sphéroïdes $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_r(F_0, x_0)$ qui sont homotopes par fibres le long du lacet $s: I \to \mathrm{tl}\,\xi$ homotope au lacet constant, sont homotopes au sens usuel. Fixons une homotopie par fibres Φ: $I^r \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ qui joint φ à ψ le long de s et une homotopie $h: I \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ qui joint s au lacet constant; définissons l'application $\widetilde{f}: I^{r+1} \to \mathrm{tl}\,\xi$ et les homotopies

$$H: I^{r+1} \times I \to \mathrm{bs}\,\xi, \qquad G: \mathrm{Fr}\, I^{r+1} \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$$

par les formules

$$\widetilde{f}(t_1, \ldots, t_{r+1}) = \Phi((t_1, \ldots, t_r), t_{r+1}),$$
$$H((t_1, \ldots, t_{r+1}), t) = \mathrm{pr}\,\xi \circ s(t)$$

et

$$G((t_1, \ldots, t_{r+1}), t) = \begin{cases} \varphi(t_1, \ldots, t_r) & \text{pour } t_{r+1} = 0, \\ \psi(t_1, \ldots, t_r) & \text{pour } t_{r+1} = 1, \\ h(t_{r+1}, t) & \text{pour } (t_1, \ldots, t_r) \in \mathrm{Fr}\, I^r. \end{cases}$$

Puisque $H(y, 0) = \mathrm{pr}\,\xi(\widetilde{f}(y))$ pour $y \in I^{r+1}$ et $G(y, 0) = \widetilde{f}(y)$ pour $y \in \mathrm{Fr}\, I^{r+1}$, il existe une homotopie $\widetilde{H}: I^r \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ qui recouvre H et telle que $\widetilde{H}(y, t) = G(y, t)$ pour $y \in \mathrm{Fr}\, I^r$ et

$\widetilde{H}(y, 0) = \varphi(y)$ pour $y \in I^r$. Il est clair que la formule

$$\Psi((t_1, \ldots, t_r), t) = \widetilde{H}((t_1, \ldots, t_r, t), 1)$$

définit l'homotopie $\Psi: I^r \times I \to F_0$ qui joint (au sens usuel) les sphéroïdes φ, ψ.

Démontrons la dernière partie du théorème. Supposons que les sphéroïdes $\varphi_0 \in \mathrm{Sph}_r(F_0, x_0)$, $\psi_0 \in \mathrm{Sph}_r(F_0, y_0)$ sont joints aux sphéroïdes $\varphi_1 \in \mathrm{Sph}_r(F_1, x_1)$, $\psi_1 \in \mathrm{Sph}_r(F_1, y_1)$ de la fibre F_1 par des homotopies par fibres le long des chemins $u, v: I \to \mathrm{tl}\,\xi$ tels que les chemins $\mathrm{pr}\,\xi \circ u$, $\mathrm{pr}\,\xi \circ v: I \to \mathrm{bs}\,\xi$ sont homotopes. Supposons en outre que φ_0 est joint à ψ_0 par une homotopie libre le long du chemin $w: I \to F_0$. Ceci signifie que φ_0 est joint à ψ_0 par une homotopie par fibres le long du chemin $w_0 = [\mathrm{in}: F_0 \to \mathrm{tl}\,\xi] \circ w$; il est clair que le lacet $\mathrm{pr}\,\xi \circ (u^{-1}(w_0 v)): I \to \mathrm{bs}\,\xi$ est homotope au lacet constant, de sorte que le chemin $u^{-1}(w_0 v)$ est homotope à un certain chemin $w_1: I \to \mathrm{tl}\,\xi$ avec $w_1(I) \subset F_1$ (voir 4.1.3.6). D'après la première partie du théorème, φ_1 admet une homotopie par fibres le long de w_1 et, d'après la deuxième partie, le sphéroïde obtenu par cette homotopie est homotope au sphéroïde ψ_1 (auquel φ_1 peut être joint par une homotopie par fibres le long du chemin $u^{-1}(w_0 v)$). Ainsi φ_1 peut être joint à ψ_1 par une homotopie par fibres le long d'un chemin contenu dans F_1, i.e. les sphéroïdes φ_1 et ψ_1 sont librement homotopes.

3. En vertu du théorème *2*, les homotopies par fibres le long du chemin $s: I \to \mathrm{tl}\,\xi$ définissent (pour chaque $r \geqslant 0$) une certaine application $T_s: \pi_r(F_0, s(0)) \to \pi_r(F_1, s(1))$, où $F_0 = \mathrm{pr}\,\xi^{-1} \times \times (\mathrm{pr}\,\xi(s(0)))$, $F_1 = \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{pr}\,\xi(s(1)))$. Ces applications sont évidemment des homomorphismes et possèdent les propriétés 2.1 (i), 2.1 (ii), 2.1 (iii), de sorte que l'espace $\mathrm{tl}\,\xi$ se trouve muni de l'assemblage

$$(\mathrm{tl}\,\xi, \{\pi_r(\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{pr}\,\xi(x)), x)\}, \{T_s\})$$

qui est pour $r \geqslant 1$ un assemblage de groupes et pour $r = 0$ un assemblage d'ensembles à point de base. On l'appelle *assemblage supérieur des groupes d'homotopie de dimension r des fibres du fibré* ξ. En particulier, pour chaque $x \in \mathrm{tl}\,\xi$ et $r \geqslant 1$, il existe une action naturelle à droite du groupe $\pi_1(\mathrm{tl}\,\xi, x)$ dans $\pi_r(\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{pr}\,\xi(x)), x)$.

Il est clair que la restriction de cet assemblage à une fibre quelconque du fibré ξ coïncide avec l'assemblage des groupes d'homotopie de dimension r de cette fibre. On voit également, que les homomorphismes

$$\mathrm{in}_*: \pi_r(\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{pr}\,\xi(x)), x) \to \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, x)$$

constituent, avec l'application $\mathrm{id}\,\mathrm{tl}\,\xi$, un homomorphisme de cet assemblage dans l'assemblage des groupes d'homotopie de dimension r de l'espace $\mathrm{tl}\,\xi$.

4. Si les fibres du fibré ξ sont r-simples, alors pour chaque point $b \in bs\ \xi$ tous les groupes d'homotopie π_r (pr ξ^{-1} (b), x) pour $x \in$ pr ξ^{-1} (b) peuvent être identifiés au groupe d'homotopie π_r (pr $\xi^{-1}(b)$) (voir 3.5). Définissons dans ce cas, pour le chemin s: $I \to$ bs ξ, l'application

$$T_s:\ \pi_r\ (\mathrm{pr}\ \xi^{-1}\ (s\ (0))) \to \pi_r\ (\mathrm{pr}\ \xi^{-1}\ (s\ (1)))$$

comme étant la translation

$$T_{\tilde{s}}:\ \pi_r\ (\mathrm{pr}\ \xi^{-1}\ (s\ (0)),\ \tilde{s}\ (0)) \to \pi_r\ (\mathrm{pr}\ \xi^{-1}\ (s\ (1)),\ \tilde{s}\ (1))$$

le long d'un chemin quelconque $\tilde{s}$: $I \to$ tl ξ qui recouvre le chemin s; le fait que T_s ne dépend pas du choix de $\tilde{s}$ découle de *2*. Les applications T_s sont évidemment des homomorphismes et possèdent les propriétés 2.1 (i), 2.1 (ii) et 2.1 (iii), de sorte que bs ξ se trouve muni d'un assemblage (bs ξ, $\{\pi_r\ (\mathrm{pr}\ \xi^{-1}\ (b))\}$, $\{T_s\}$) qui est un assemblage de groupes pour $r \geqslant 1$ et un assemblage d'ensembles à un seul point pour $r = 0$. On l'appelle *assemblage inférieur des groupes d'homotopie de dimension r des fibres du fibré* ξ. En particulier, lorsque $r \geqslant 1$, pour chaque point $b \in$ bs ξ il existe une action naturelle à droite du groupe π_1 (bs ξ, b) dans π_r (pr ξ^{-1} (b)).

Il est clair que l'assemblage induit par assemblage donné sur tl ξ par la projection pr ξ est précisément l'assemblage supérieur défini dans *3*.

5. Si φ est une application d'un fibré de Serre ξ dans un fibré de Serre ξ_1, alors les homomorphismes

$$\mathrm{ab\ tl}\ \varphi_*:\ \pi_r\ (\mathrm{pr}\ \xi^{-1}\ (\mathrm{pr}\ \xi\ (x)),\ x) \to$$
$$\to \pi_r\ (\mathrm{pr}\ \xi_1^{-1}\ (\mathrm{pr}\ \xi_1\ (\mathrm{tl}\ \varphi\ (x)),\ \mathrm{tl}\ \varphi\ (x))),\ x \in \mathrm{tl}\ \xi,$$

constituent avec tl φ un homomorphisme de l'assemblage supérieur des groupes d'homotopie de dimension r des fibres du fibré ξ dans l'assemblage supérieur des groupes d'homotopie de dimension r des fibres du fibré ξ_1. Si dans ce cas les fibres des fibrés ξ, ξ_1 sont simples, alors les homomorphismes

$$\mathrm{ab\ tl}\ \varphi_*\ :\ \pi_r\ (\mathrm{pr}\ \xi^{-1}\ (b)) \to \pi_r\ (\mathrm{pr}\ \xi_1^{-1}\ (\mathrm{bs}\ \varphi\ (b))),\ b \in \mathrm{bs}\ \xi,$$

constituent avec bs φ un homomorphisme de l'assemblage inférieur des groupes d'homotopie de dimension r des fibres du fibré ξ dans l'assemblage inférieur des groupes d'homotopie de dimension r des fibres du fibré ξ_1.

8. Suite d'homotopie d'un fibré de Serre

1 (Lemme). *Si* ξ *est un fibré de Serre à point de base* $x_0 \in$ tl ξ *et* B *un sous-ensemble de la base* bs ξ *contenant le point* $b_0 =$ pr ξ (x_0), *alors l'homomorphisme*

$$\mathrm{pr}\ \xi_*:\ \pi_r\ (\mathrm{tl}\ \xi,\ \mathrm{pr}\ \xi^{-1}\ (B),\ x_0) \to \pi_r\ (\mathrm{bs}\ \xi,\ B,\ b_0),$$

et en particulier l'homomorphisme

$$\mathrm{pr}\ \xi_*: \pi_r(\mathrm{tl}\ \xi,\ \mathrm{pr}\ \xi^{-1}(b_0),\ x_0) \to \pi_r(\mathrm{bs}\ \xi,\ b_0),$$

est un isomorphisme quel que soit $r \geqslant 1$.

Démonstration de la surjectivité de $\mathrm{pr}\ \xi_*$. Soit $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(\mathrm{bs}\ \xi,\ B,\ b_0)$. Définissons l'application $\tilde{f}: I^{r-1} \to \mathrm{tl}\ \xi$ et les homotopies

$$H: I^{r-1} \times I \to \mathrm{bs}\ \xi, \qquad G: \mathrm{Fr}\ I^{r-1} \times I \to \mathrm{tl}\ \xi$$

par les formules

$$\tilde{f}(I^{r-1}) = x_0, \qquad H((t_1, \ldots, t_{r-1}), t) = \\ = \varphi(t_1, \ldots, t_{r-1}, 1-t), \qquad G(\mathrm{Fr}\ I^{r-1} \times I) = x_0.$$

Puisque $H(y, 0) = \mathrm{pr}\ \xi(\tilde{f}(y))$ pour $y \in I^{r-1}$ et $G(y, 0) = \tilde{f}(y)$ pour $y \in \mathrm{Fr}\ I^{r-1}$, il existe une homotopie $\tilde{H}: I^{r-1} \times I \to \mathrm{tl}\ \xi$ qui recouvre H et coïncide avec G sur $\mathrm{Fr}\ I^{r-1} \times I$ (voir 4.1.3.6). La formule

$$\psi(t_1, \ldots, t_r) = \tilde{f}((t_1, \ldots, t_{r-1}), 1-t_r)$$

définit le sphéroïde

$$\psi \in \mathrm{Sph}_r(\mathrm{tl}\ \xi,\ \mathrm{pr}\ \xi^{-1}(B),\ x_0),$$

et il est clair que $\mathrm{pr}\ \xi_\#(\psi) = \varphi$.

Démonstration de l'injectivité de $\mathrm{pr}\ \xi_*$. Soit $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(\mathrm{tl}\ \xi,\ \mathrm{pr}\ \xi^{-1}(B),\ x_0)$ et supposons que le sphéroïde $\mathrm{pr}\ \xi_\#(\psi) \in \mathrm{Sph}_r(\mathrm{bs}\ \xi, B, b_0)$ est homotope au sphéroïde constant. Fixons une homotopie $\Phi: I^r \times I \to \mathrm{bs}\ \xi$ qui joint le sphéroïde $\mathrm{pr}\ \xi_\#(\psi)$ au sphéroïde constant, et définissons l'application $\tilde{f}: I^r \to \mathrm{tl}\ \xi$ et les homotopies $H: I^r \times I \to \mathrm{bs}\ \xi$, $G: \mathrm{Fr}\ I^r \times I \to \mathrm{tl}\ \xi$ par les formules

$$\tilde{f}(I^r) = x_0, \qquad H((t_1, \ldots, t_r), t) = \Phi((t_1, \ldots, t_{r-1}, 1-t), t_r)$$

et

$$G((t_1, \ldots, t_r), t) = \begin{cases} \psi(t_1, \ldots, t_{r-1}, 1-t) & \text{pour } t_r = 0, \\ x_0 & \text{pour } (t_1, \ldots, t_r) \in \mathrm{Fr}\ I^r,\ t_r \neq 0. \end{cases}$$

Puisque $H(y, 0) = \mathrm{pr}\ \xi(\tilde{f}(y))$ pour $y \in I^r$ et $G(y, 0) = \tilde{f}(y)$ pour $y \in \mathrm{Fr}\ I^r$, il existe une homotopie $\tilde{H}: I^r \times I \to \mathrm{tl}\ \xi$ qui recouvre H et coïncide avec G sur $\mathrm{Fr}\ I^r \times I$. Il est clair que la formule

$$\Psi((t_1, \ldots, t_r), t) = \tilde{H}((t_1, \ldots, t_{r-1}, t), 1-t_r)$$

définit une homotopie $\Psi: I^r \times I \to \mathrm{tl}\ \xi$ qui joint ψ au sphéroïde constant.

Action du groupe π_1 (bs ξ, b_0) dans comp (F_0)

2. Soit ξ un fibré de Serre à point de base $b_0 \in$ bs ξ. Posons $F_0 =$ pr ξ^{-1} (b_0) et définissons l'action à droite du groupe π_1 (bs ξ, b_0) dans l'ensemble comp (F_0) en prenant en guise de $C\sigma$, où $C \in$ $\in$ comp (F_0), $\sigma \in \pi_1$ (bs ξ, b_0), la composante de l'espace F_0 qui contient les origines des chemins qui se terminent dans C et recouvrent les lacets de classe σ. Cette description de $C\sigma$ est correcte en vertu du lemme *1* ; en effet, le chemin qui se termine dans C et recouvre un lacet de classe σ peut être interprété comme un sphéroïde du couple (tl ξ, F_0) d'origine dans C qui est envoyé par l'application pr $\xi_\#$ dans un lacet de classe σ ; lorsque $s_1 \in$ Sph$_1$ (tl ξ, F_0, x_1), $s_2 \in$ Sph$_1$ (tl ξ, F_0, x_2) sont deux tels sphéroïdes et w est un chemin de C qui joint x_1 à x_2, alors les lacets pr $\xi_\#$ $(s_1 w)$ et pr $\xi_\#$ (s_2) sont homotopes, d'où l'on tire en vertu du lemme *1* le fait que les sphéroïdes $s_1 w$, $s_2 \in$ Sph$_1$ (tl ξ, F_0, x_2) sont homotopes, ce qui implique que les composantes de l'espace F_0 contenant les points s_1 (0), s_2 (0) coïncident. Le fait qu'il s'agit d'une action à droite est évident.

Cette action est compatible avec l'action du groupe fondamental de l'espace tl ξ dans les groupes d'homotopie des fibres (voir 7.3) en ce sens que C pr ξ_* $(\sigma) = T_\sigma C$ quels que soient $C \in$ comp $(F_0) =$ $= \pi_0$ (F_0, x_0), $\sigma \in \pi_1$ (tl ξ, x_0) et $x_0 \in F_0$. Il est également clair que si f est une application du fibré ξ dans un autre fibré de Serre, ξ', alors

$$\text{fact ab tl } f\colon \text{comp } (F_0) \to \text{comp } (\text{pr } \xi'^{-1} (\text{bs } f\,(b_0))),$$

où ab tl $f =$ [ab tl f: $F_0 \to$ pr ξ'^{-1} (bs f (b_0))], est une [bs f_*: $\pi_1 \times$ $\times$ (bs ξ, b_0) $\to \pi_1$ (bs ξ', bs f (b_0))]-application.

3. Si $C \in$ comp (F_0) et $x_0 \in C$, alors le sous-groupe stationnaire du groupe π_1 (bs ξ, b_0) appartenant à C (voir 4.2.3.4) *coïncide avec l'image de l'homomorphisme*

$$\text{pr } \xi_*\colon \pi_1 (\text{tl } \xi, x_0) \to \pi_1 (\text{bs } \xi, b_0).$$

En effet, l'égalité $C\sigma = C$ signifie qu'il existe dans tl ξ un chemin d'origine et d'extrémité dans C qui recouvre un lacet de classe σ ; or, si un tel chemin existe, il doit évidemment exister un lacet d'origine x_0 recouvrant un lacet de classe σ.

Construction de la suite

4. Soit ξ un fibré de Serre à point de base $x_0 \in$ tl ξ. Posons $b_0 =$ $=$ pr ξ (x_0), $F_0 =$ pr ξ^{-1} (b_0) et transformons la suite homotopique du couple (tl ξ, F_0) à point de base x_0 dans l'esprit du lemme *1*, en remplaçant, pour chaque $r \geqslant 1$, le groupe d'homotopie π_r (tl ξ, F_0, x_0) par le groupe d'homotopie π_r (bs ξ, b_0), l'homomorphisme

$$\text{rel}_*\colon \pi_r (\text{tl } \xi, x_0) \to \pi_r (\text{tl } \xi, F_0, x_0)$$

par sa composée avec l'isomorphisme

$$\mathrm{pr}\ \xi_*: \pi_r(\mathrm{tl}\ \xi, F_0, x_0) \to \pi_r(\mathrm{bs}\ \xi, b_0)$$

et l'homomorphisme

$$\partial: \pi_r(\mathrm{tl}\ \xi, F_0, x_0) \to \pi_{r-1}(F_0, x_0)$$

par la composée

$$\Delta = \partial \circ (\mathrm{pr}\ \xi_*)^{-1}: \pi_r(\mathrm{bs}\ \xi, b_0) \to \pi_{r-1}(F_0, x_0).$$

Puisque la composée de l'inclusion

$$\mathrm{rel}: (\mathrm{tl}\ \xi, x_0, x_0) \to (\mathrm{tl}\ \xi, F_0, x_0)$$

et de la projection

$$\mathrm{pr}\ \xi: (\mathrm{tl}\ \xi, F_0, x_0) \to (\mathrm{bs}\ \xi, b_0, b_0)$$

est précisément la projection

$$\mathrm{pr}\ \xi: (\mathrm{tl}\ \xi, x_0, x_0) \to (\mathrm{bs}\ \xi, b_0, b_0),$$

la composée $[\mathrm{pr}\ \xi_*: \pi_r(\mathrm{tl}\ \xi, F_0, x_0) \to \pi_r(\mathrm{bs}\ \xi, b_0)] \circ \mathrm{rel}_*$ est précisément

$$\mathrm{pr}\ \xi_*: \pi_r(\mathrm{tl}\ \xi, x_0) \to \pi_r(\mathrm{bs}\ \xi, b_0).$$

Si l'on ajoute à droite de la suite obtenue le groupe d'homotopie $\pi_0(\mathrm{bs}\ \xi, b_0)$ et l'homomorphisme $\mathrm{pr}\ \xi_*: \pi_0(\mathrm{tl}\ \xi, x_0) \to \pi_0(\mathrm{bs}\ \xi, b_0)$, on obtient la suite

$$\begin{aligned}
\ldots \pi_2(F_0, x_0) &\xrightarrow{\mathrm{in}_*} \pi_2(\mathrm{tl}\ \xi, x_0) \xrightarrow{\mathrm{pr}\ \xi_*} \pi_2(\mathrm{bs}\ \xi, b_0) \xrightarrow{\Delta} \\
&\xrightarrow{\Delta} \pi_1(F_0, x_0) \xrightarrow{\mathrm{in}_*} \pi_1(\mathrm{tl}\ \xi, x_0) \xrightarrow{\mathrm{pr}\ \xi_*} \pi_1(\mathrm{bs}\ \xi, b_0) \xrightarrow{\Delta} \\
&\xrightarrow{\Delta} \pi_0(F_0, x_0) \xrightarrow{\mathrm{in}_*} \pi_0(\mathrm{tl}\ \xi, x_0) \xrightarrow{\mathrm{pr}\ \xi_*} \pi_0(\mathrm{bs}\ \xi, b_0). \qquad (12)
\end{aligned}$$

D'après 3.3, 7.3 et *2*, sont définies les actions à droite du groupe $\pi_1(\mathrm{bs}\ \xi, b_0)$ dans les groupes $\pi_r(\mathrm{bs}\ \xi, b_0)$ et du groupe $\pi_1(\mathrm{tl}\ \xi, x_0)$ dans les groupes $\pi_r(\mathrm{tl}\ \xi, x_0)$ et $\pi_r(F_0, x_0)$, ainsi que l'action du groupe $\pi_1(\mathrm{bs}\ \xi, b_0)$ dans l'ensemble $\pi_0(F_0, x_0)$. Les homomorphismes in_*, $\mathrm{pr}\ \xi_*$, Δ sont compatibles avec ces actions exactement comme le stipule la définition 5.11 (voir 3.6, 4.5, 7.3 et *2*) de sorte que (12) est une π-suite. On l'appelle *suite homotopique du fibré* ξ *à point de base* x_0.

5. La suite (12) *est exacte.*

Ceci découle de l'exactitude de la suite homotopique du couple $(\mathrm{tl}\ \xi, F_0)$ et des deux faits évidents suivants: 1° le noyau de l'homomorphisme $\mathrm{pr}\ \xi_*: \pi_0(\mathrm{tl}\ \xi, x_0) \to \pi_0(\mathrm{bs}\ \xi, b_0)$ coïncide avec l'image de l'homomorphisme $\mathrm{in}_*: \pi_0(F_0, x_0) \to \pi_0(\mathrm{tl}\ \xi, x_0)$; 2° deux éléments α, β de l'ensemble $\pi_0(F_0, x_0)$ sont envoyés l'un dans

l'autre par un élément du groupe π_1 (bs ξ, b_0) si et seulement si $\mathrm{in}_*(\alpha) = \mathrm{in}_*(\beta)$.

6. Pour chaque application f d'un fibré ξ dans un autre fibré de Serre, ξ', les homomorphismes verticaux

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \pi_r(F_0, x_0) & \xrightarrow{\mathrm{in}_*} & \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, x_0) & \xrightarrow{\mathrm{pr}\,\xi_*} & \pi_r(\mathrm{bs}\,\xi, b_0) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{r-1}(F_0, x_0) \ldots \\
\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{ab\,tl}\,f)_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{tl}\,f_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{bs}\,f_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{ab\,tl}\,f)_*} \\
\ldots \pi_r(F'_0, x'_0) & \xrightarrow{\mathrm{in}_*} & \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi', x'_0) & \xrightarrow{\mathrm{pr}\,\xi'_*} & \pi_r(\mathrm{bs}\,\xi', b'_0) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{r-1}(F'_0, x'_0) \ldots,
\end{array}$$

où $x'_0 = \mathrm{tl}\,f(x_0)$, $b'_0 = \mathrm{bs}\,f(b_0)$, $F'_0 = \mathrm{pr}\,\xi'^{-1}(b'_0)$, constituent un homomorphisme de la première ligne dans la deuxième.

La commutativité des deux premiers carrés découle de 1.7, celle du troisième, de 4.2 et 4.3, la compatibilité des homomorphismes verticaux avec les actions des groupes fondamentaux a été établie dans 3.6, 4.5, 7.5 et *2*.

Principaux cas particuliers

7. Si l'espace tl ξ est ∞-connexe, tous les homomorphismes $\Delta: \pi_r(\mathrm{bs}\,\xi, b_0) \to \pi_{r-1}(F_0, x_0)$ sont des isomorphismes. Si l'espace tl ξ est k-connexe, $k < \infty$, les homomorphismes $\Delta: \pi_r(\mathrm{bs}\,\xi, b_0) \to \pi_{r-1}(F_0, x_0)$ pour $r \leqslant k$ sont des isomorphismes, tandis que $\Delta: \pi_{k+1}(\mathrm{bs}\,\xi, b_0) \to \pi_k(F_0, x_0)$ est un épimorphisme. Dans les deux cas la réciproque est vraie lorsque l'espace tl ξ est connexe.

Si l'espace bs ξ est ∞-connexe, tous les homomorphismes $\mathrm{in}_*: \pi_r(F_0, x_0) \to \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, x_0)$ sont des isomorphismes. Si l'espace bs ξ est k-connexe, $k < \infty$, les homomorphismes $\mathrm{in}_*: \pi_r(F_0, x_0) \to \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, x_0)$ pour $r \leqslant k$ sont des isomorphismes, tandis que $\mathrm{in}_*: \pi_{k+1}(F_0, x_0) \to \pi_{k+1}(\mathrm{tl}\,\xi, x_0)$ est un épimorphisme. Dans les deux cas la réciproque est vraie, à condition que l'espace bs ξ soit connexe.

Si l'espace F_0 est ∞-connexe, tous les homomorphismes $\mathrm{pr}\,\xi_*: \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, x_0) \to \pi_r(\mathrm{bs}\,\xi, b_0)$ sont des isomorphismes. Si l'espace F_0 est k-connexe et $k < \infty$, les homomorphismes $\mathrm{pr}\,\xi_*: \pi_r \times (\mathrm{tl}\,\xi, x_0) \to \pi_r(\mathrm{bs}\,\xi, b_0)$ pour $r \leqslant k$ sont des isomorphismes et $\mathrm{pr}\,\xi_*: \pi_{k+1}(\mathrm{tl}\,\xi, x_0) \to \pi_{k+1}(\mathrm{bs}\,\xi, b_0)$ est un épimorphisme. Dans les deux cas la réciproque est vraie sans conditions supplémentaires.

8. Si ξ possède une section qui envoie b_0 dans x_0, alors la suite (12) *se scinde à droite dans les membres $\pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, x_0)$. La scission peut être opérée par les homomorphismes $s_*: \pi_r(\mathrm{bs}\,\xi, b_0) \to \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, x_0)$ induits par une section quelconque s: $(\mathrm{bs}\,\xi, b_0) \to (\mathrm{tl}\,\xi, x_0)$.*

Démonstration. Puisque $\mathrm{pr}\,\xi \circ s = \mathrm{id}\,\mathrm{bs}\,\xi$, on a $\mathrm{pr}\,\xi_* \circ s_* = \mathrm{id}\,\pi_r(\mathrm{bs}\,\xi, b_0)$.

9. Si F_0 est un rétracte de l'espace tl ξ, *alors la suite* (12) *se scinde à gauche dans les termes $\pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, x_0)$. Les homomorphismes $\rho_*: \pi_r \times$*

$\times$ (tl ξ, x_0) $\to \pi_r(F_0, x_0)$ *induits par une rétraction quelconque* ρ: tl $\xi \to F_0$ *peuvent servir d'homomorphismes de scission.*

Démonstration. Puisque $\rho \circ \mathrm{in} = \mathrm{id}\, F_0$, on a $\rho_* \circ \mathrm{in}_* = \mathrm{id}\, \pi_r(F_0, x_0)$.

10. Si l'inclusion in: $F_0 \to$ tl ξ *est* x_0*-homotope à l'application constante, alors la suite* (12) *se scinde à droite dans les termes* π_r (bs ξ, b_0). *La scission peut être opérée par les homomorphismes* $\pi_r(F_0, x_0) \to \pi_{r+1}$ (bs ξ, b_0) *induits par les applications* γ_r: $\mathrm{Sph}_r(F_0, x_0) \to \mathrm{Sph}_{r+1}$ (bs ξ, b_0) *définies à l'aide de la formule*

$$[\gamma_r(\varphi)](t_1, \ldots, t_{r+1}) = \mathrm{pr}\, \xi \circ h(\varphi(t_1, \ldots, t_r), t_{r+1}), \quad \varphi \in \mathrm{Sph}_r(F_0, x_0)$$

d'après toute x_0*-homotopie* $h: F_0 \times I \to$ tl ξ *qui joint* in *à l'application constante.*

Pour la démonstration, il suffit d'indiquer pour chaque sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(F_0, x_0)$ un sphéroïde $\psi \in \mathrm{Sph}_{r+1}$ (tl ξ, F_0, x_0) vérifiant $\partial\psi = \varphi$, $\mathrm{pr}\, \xi_\#(\psi) = \gamma_r(\varphi)$. Tel sera par exemple le sphéroïde défini par la formule

$$\psi(t_1, \ldots, t_{r+1}) = h(\varphi(t_1, \ldots, t_r), t_{r+1}).$$

11. Si la projection pr ξ *est* x_0*-homotope à l'application constante, alors la suite* (12) *se scinde à gauche dans les termes* $\pi_r(F_0, x_0)$. *Des homomorphismes de scission sont, en particulier, les homomorphismes* $\pi_r(F_0, x_0) \to \pi_{r+1}$ (bs ξ, b_0) *induits par les applications* γ_r: $\mathrm{Sph}_r(F_0, x_0) \to \mathrm{Sph}_{r+1}$ (bs ξ, b_0) *définies par la formule*

$$[\gamma_r(\varphi)](t_1, \ldots, t_{r+1}) = h(\varphi(t_1, \ldots, t_r), t_{r+1})$$

d'après toute x_0*-homotopie* h: tl $\xi \times I \to$ bs ξ *qui joint* pr ξ *à l'application constante.*

Il suffit de démontrer que pour chaque sphéroïde $\psi \in \mathrm{Sph}_{r+1}$ (tl ξ, F_0, x_0) les sphéroïdes $\gamma_r \circ \partial(\psi)$, $\mathrm{pr}\, \xi_\#(\psi) \in \mathrm{Sph}_{r+1}$ (bs ξ, b_0) sont homotopes. L'homotopie nécessaire est définie par la formule

$$((t_1, \ldots, t_{r+1}), t) \mapsto h(\psi(t_1, \ldots, t_r, tt_{r+1}), (1-t)\, t_{r+1}).$$

12. Si ξ *est un revêtement au sens large, alors* pr ξ_*: π_r(tl ξ, x_0) $\to \pi_r$ (bs ξ, b_0) *est un isomorphisme pour* $r \geqslant 2$ *et un monomorphisme pour* $r = 1$. *Si* ξ *est un revêtement au sens restreint, alors l'application* fact Δ: π_1 (bs ξ, b_0)/Im pr $\xi_* \to F_0$ *définie par l'application* Δ: π_1 (bs ξ, b_0) $\to \pi_0(F_0, x_0) = F_0$ *est en outre inversible.*

Ceci découle de l'exactitude de la suite homotopique du fibré ξ et du fait que $\pi_r(F_0, x_0) = 0$ pour $r > 0$ et π_0 (tl ξ, x_0) $= 0$ si ξ est un fibré au sens restreint.

13. Soit f une application d'un fibré de Serre ξ à point de base $x_0 \in$ tl ξ dans un fibré de Serre ξ' à point de base $x_0' \in$ tl ξ'. Il découle des propositions *6* et 5.19 que :

si tous les homomorphismes bs $f_*: \pi_r(\text{bs } \xi, b_0) \to \pi_r(\text{bs } \xi', b'_0)$ pour $r \geqslant 1$ et tous les homomorphismes

$$(\text{ab tl } f)_*: \pi_r(F_0 = \text{pr } \xi^{-1}(\text{pr } \xi(x_0)), x_0) \to \pi_r(F'_0 = \\ = \text{pr } \xi'^{-1}(\text{pr } \xi'(x'_0)), x'_0)$$

pour $r \geqslant 0$ sont des isomorphismes, alors tous les homomorphismes tl $f_*: \pi_r(\text{tl } \xi, x_0) \to \pi_r(\text{tl } \xi', x'_0)$ pour $r \geqslant 1$ sont des isomorphismes;

si tous les homomorphismes tl $f_*: \pi_r(\text{tl } \xi, x_0) \to \pi_r(\text{tl } \xi', x'_0)$ pour $r \geqslant 0$ et tous les homomorphismes $(\text{ab tl } f)_*: \pi_r(F_0, x_0) \to \pi_r(F'_0, x'_0)$ pour $r \geqslant 0$ sont des isomorphismes, alors tous les homomorphismes bs $f_*: \pi_r(\text{bs } \xi, b_0) \to \pi_r(\text{bs } \xi', b'_0)$ pour $r \geqslant 1$ sont des isomorphismes;

si tous les homomorphismes bs $f_*: \pi_r(\text{bs } \xi, b_0) \to \pi_r(\text{bs } \xi', b'_0)$ pour $r \geqslant 0$ et tous les homomorphismes tl $f_*: \pi_r(\text{tl } \xi, x_0) \to \pi_r(\text{tl } \xi', x'_0)$ pour $r \geqslant 0$ sont des isomorphismes, alors tous les homomorphismes $(\text{ab tl } f)_*: \pi_r(F_0, x_0) \to \pi_r(F'_0, x'_0)$ pour $r \geqslant 1$ sont des isomorphismes, tandis que $(\text{ab tl } f)_*: \pi_0(F_0, x_0) \to \pi_0(F'_0, x'_0)$ est un épimorphisme à noyau nul.

Remarquons que dans le dernier cas l'application $(\text{ab tl } f)_*: \pi_0(F_0, x_0) \to \pi_0(F'_0, x'_0)$ est aussi un isomorphisme si tous les homomorphismes tl $f_*: \pi_1(\text{tl } \xi, x) \to \pi_1(\text{tl } \xi', \text{tl } f(x))$, $x \in F_0$, sont des épimorphismes. En effet, soient x_1, x_2 des points de la fibre F_0 tels que les points tl $f(x_1)$, tl $f(x_2)$ sont situés dans une même composante de la fibre F'_0 et soit $s': I \to F'_0$ un chemin qui joint tl $f(x_1)$ à tl $f(x_2)$. Puisque $(\text{tl } f)_*: \pi_0(\text{tl } \xi, x_0) \to \pi_0(\text{tl } \xi', x'_0)$ est un isomorphisme, tandis que $(\text{tl } f)_*: \pi_1(\text{tl } \xi, x_1) \to \pi_1(\text{tl } \xi', \text{tl } f(x_1))$ est un épimorphisme, on peut joindre les points x_1, x_2 par un chemin $s: I \to \text{tl } \xi$ tel que le chemin tl $f \circ s: I \to \text{tl } \xi'$ soit homotope au chemin $[\text{in}: F'_0 \to \text{tl } \xi'] \circ s'$. Pour un tel choix de s, le lacet pr $\xi' \circ \text{tl } f \circ s$ est homotope au lacet constant, et puisque bs $f_*: \pi_1(\text{bs } \xi, b_0) \to \pi_1(\text{bs } \xi', b'_0)$ est un isomorphisme, le lacet pr $\xi \circ s$ est également homotope au lacet constant. En appliquant le théorème 4.1.3.6 à l'application s, à une homotopie quelconque qui joint le lacet pr $\xi \circ s$ au lacet constant et à l'homotopie constante de l'application $s|_{\text{Fr } I}$, nous obtenons une homotopie qui joint s avec le chemin d'origine x_1 et d'extrémité x_2 contenu dans F_0.

9. Influence d'autres structures

1. Nous allons envisager les propriétés les plus simples des groupes d'homotopie qui découlent de l'existence dans l'espace de structures supplémentaires qui ont une nature de groupe et sont compatibles avec la topologie. La propriété la plus importante est la simplicité.

Le cas d'un groupe topologique

2. Si X est un groupe topologique, alors pour chaque chemin $s: I \to X$ la translation $\pi_r(X, s(0)) \to \pi_r(X, s(1))$ coïncide pour chaque $r \geqslant 0$ avec l'isomorphisme induit par la translation à gauche sur $[s(1)][s(0)]^{-1}$.

Il existe même une homotopie canonique libre $I^r \times I \to X$ qui joint le sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, s(0))$ avec $[s(1)][s(0)]^{-1}\varphi$ le long de s: elle se définit par la formule $((t_1, \ldots, t_r), t)] \mapsto [s(t)] \times \times [s(0)]^{-1}\varphi(t_1, \ldots, t_r)$.

3 (Corollaire). *Les composantes d'un groupe topologique sont des espaces simples. En particulier, le groupe fondamental d'une composante d'un groupe topologique est commutatif.*

4. Dans le cas d'un groupe topologique X, il existe dans les ensembles $\mathrm{Sph}_r(X, e = e_X)$, en plus la multiplication définie dans 1.1, une multiplication obtenue à partir de la multiplication dans X (le produit des sphéroïdes $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_r(X, e)$ est donné par la formule $y \mapsto \varphi(y)\psi(y)$), et cette deuxième multiplication a un sens même lorsque $r = 0$, cas où la première est absente.

Il est clair que la nouvelle multiplication munit l'ensemble $\mathrm{Sph}_r(X, e)$ pour chaque $r \geqslant 0$ d'une structure de groupe et que les sphéroïdes homotopes aux sphéroïdes constants constituent un sous-groupe normal de ce groupe, le groupe quotient correspondant coïncidant, en tant qu'ensemble, avec $\pi_r(X, e)$. Pour $r = 0$, le groupe $\pi_0(X, e)$ coïncide avec le groupe quotient X/X_0, où X_0 est la composante de l'unité, tandis que pour $r \geqslant 1$ la nouvelle structure de groupe dans $\pi_r(X, e)$ coïncide avec l'ancienne: quels que soient deux sphéroïdes $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_r(X, e)$, l'homotopie $I^r \times I \to X$ définie par la formule

$$((t_1, \ldots, t_r), t) \mapsto$$
$$\mapsto \varphi\left(\min\left(1, \frac{2t_1}{1+t}\right), t_2, \ldots, t_r\right)\psi\left(\max\left(0, \frac{2t_1+t-1}{1+t}\right), t_2, \ldots, t_r\right),$$

joint le nouveau produit de ces sphéroïdes avec l'ancien.

Ajoutons que la multiplication que l'on avait déjà dans X munit d'une structure de groupe également l'ensemble $\bigcup_{x \in X} \mathrm{Sph}_r(X, x)$ de t o u s les sphéroïdes de dimension r de l'espace X. Les sphéroïdes homotopes à un sphéroïde constant constituent dans ce groupe un sous-groupe normal qui donne un groupe quotient canoniquement isomorphe pour $r \geqslant 1$ au groupe $\pi_r(X, e)$.

5. Puisque chaque automorphisme intérieur d'un groupe topologique X induit des automorphismes des groupes $\pi_r(X, e)$, l'action à droite intérieure du groupe X définit son action à droite dans tous les groupes $\pi_r(X, e)$. Les transformations effectuées par les éléments du sous-groupe X_0 (voir *4*) sont alors l'identité: si $w: I \to X$ est un chemin qui joint e à x, alors pour chaque sphéroïde $\varphi \in$

$\in \mathrm{Sph}_r(X, e)$ la formule $(y, t) \mapsto [w(t)]^{-1}\varphi(y)\, w(t)$ définit une homotopie $I^r \times I \to X$ liant φ au sphéroïde $y \mapsto x^{-1}\varphi(y)\, x$. Ainsi les groupes $\pi_r(X, e)$ sont munis d'une action naturelle à droite du groupe $\pi_0(X, e) = X/X_0$.

Le cas d'un espace homogène

6. Soient G un groupe topologique et H son sous-groupe connexe. Si $(G, \mathrm{pr}, X = G/H)$ est un fibré de Serre, alors pour chaque chemin $s: I \to X$ la translation $\pi_r(X, s(0)) \to \pi_r(X, s(1))$ coïncide pour chaque $r \geqslant 0$ avec l'isomorphisme induit pour une transformation quelconque de l'espace X effectuée (pour une action canonique) par un élément du groupe G et appliquant $s(0)$ dans $s(1)$.

Démonstration. Soient g un élément quelconque du groupe G tel que $gs(0) = s(1)$ et $\tilde{s}: I \to G$ un chemin arbitraire qui recouvre s. Puisque les points $\tilde{s}(1)$ et $g\tilde{s}(0)$ sont situés dans une même classe d'équivalence du groupe G relativement à H, et puisque les classes d'équivalence par un sous-groupe connexe sont connexes, on peut joindre ces points, à l'intérieur de leur classe d'équivalence, par un certain chemin w. La formule

$$((t_1, \ldots, t_r), t) \mapsto [s_1(t)]\,[s_1(0)]^{-1}\varphi(t_1, \ldots, t_r),$$

où $s_1 = \tilde{s}w$, définit pour chaque sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, s(0))$ l'homotopie libre $I^r \times I \to X$ qui joint φ à $[s_1(1)]\,[s_1(0)]^{-1}\varphi$ le long d'un chemin homotope à s (à savoir le long du produit du chemin s par le chemin constant).

7 (Corollaire). *Si H est un sous-groupe connexe du groupe topologique G et $(G, \mathrm{pr}, G/H)$ est un fibré de Serre, alors les composantes de l'espace G/H sont des espaces simples. En particulier, les groupes fondamentaux des composantes de tels espaces sont commutatifs.*

8. La condition imposée à $(G, \mathrm{pr}, G/H)$ dans les énoncés des théorèmes *6* et *7* (être un fibré de Serre) sera satisfaite automatiquement par la suite : le groupe G et l'espace quotient G/H seront toujours des variétés fermées différentiables, tandis que la projection $G \to G/H$ sera une submersion, de sorte que la condition de Serre pour le fibré sera une conséquence des théorèmes 4.6.1.3 et 4.1.3.4.

Le cas des H-espaces

9. L'espace topologique X à point de base e est appelé *H-espace* et on donne une application continue $\mu: X \times X \to X$ telle que $\mu(e, e) = e$, les applications $X \to X$ définies par les formules $x \mapsto \mu(e, x)$ et $x \mapsto \mu(x, e)$ étant e-homotopes à id X. L'application μ est appelée *multiplication* et e, *unité*. A la place de $\mu(x, y)$ on écrit généralement xy.

H-espace X est dit *homotopiquement associatif* si les applications $X \times X \times X \to X$ définies par les formules $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1x_2)\, x_3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1\, (x_2x_3)$ sont homotopes, et *homotopiquement commutatif* si les applications $X \times X \to X$ définies par les formules $(x_1, x_2) \mapsto x_1x_2$, $(x_1, x_2) \mapsto x_2x_1$ sont homotopes.

Une application continue ν d'un H-espace X dans X est appelée *inversion homotopique* lorsque les applications $X \to X$ définies par les formules $x \mapsto x\nu\,(x)$ et $x \mapsto \nu\,(x)\, x$ sont homotopes à l'application constante de X dans e. A la place de $\nu\,(x)$ on écrit généralement x^{-1}.

Les premiers exemples de H-espaces sont les groupes topologiques. Un groupe topologique (envisagé comme H-espace) est homotopiquement associatif et admet une inversion homotopique, tandis qu'un groupe topologique commutatif est homotopiquement commutatif.

10. Les espaces de sphéroïdes forment une autre classe importante de H-espaces. Pour chaque espace topologique X à point de base x_0, sont H-espaces les ensembles $\mathrm{Sph}_r\,(X, x_0)$, $r \geqslant 1$, ayant pour topologie celle qu'ils obtiennent comme sous-espaces de l'espace $\mathscr{C}\,(I^r, X)$ pour point de base le sphéroïde constant et munis de la multiplication usuelle : en effet, l'application $\varphi \mapsto (\mathrm{const})\,\varphi$ se joint à l'application id $\mathrm{Sph}_r\,(X, x_0)$ par la const-homotopie $\mathrm{Sph}_r\,(X, x_0) \times I \to \mathrm{Sph}_r\,(X, x_0)$ définie par la formule $(\varphi, t) \mapsto \varphi_t$, où φ_t est un sphéroïde dont la valeur au point $(t_1, \ldots, t_r) \in I^r$ est égale au deuxième membre de la formule (3), tandis que l'application $\varphi \mapsto \varphi(\mathrm{const})$ se joint à l'application id $\mathrm{Sph}_r(X, x_0)$ par une const-homotopie qui se définit de la même manière à l'aide de la formule (4). Les H-espaces $\mathrm{Sph}_r\,(X, x_0)$ sont homotopiquement associatifs et admettent des inversions homotopiques pour $r \geqslant 1$; ils sont homotopiquement commutatifs pour $r \geqslant 2$; les homotopiques nécessaires pour démontrer ces faits s'obtiennent également des formules (2) à (5).

De même, pour chaque couple topologique (X, A) à point de base x_0 les ensembles $\mathrm{Sph}_r\,(X, A, x_0)$, pour $r \geqslant 2$, sont des H-espaces homotopiquement associatifs, admettant des inversions homotopiques. Pour $r \geqslant 3$ ils sont homotopiquement commutatifs.

11. Tout H-espace connexe est simple et possède, en particulier, un groupe fondamental commutatif.

Démonstration. Si X est un *H-espace* connexe à unité e, alors la formule $(y, t) \mapsto s\,(t)\,\varphi\,(y)$ définit pour le sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r\,(X, e)$ pour chaque r et chaque lacet $s \in \mathrm{Sph}_1\,(X, e)$ une homotopie libre $I^r \times I \to X$ qui joint le sphéroïde $y \mapsto e\,\varphi\,(y)$ homotope à φ avec le même sphéroïde $y \mapsto e\varphi\,(y)$ le long du chemin $t \mapsto s\,(t)\, e$ homotope à s. Ainsi le groupe $\pi_1\,(X, e)$ agit dans les groupes $\pi_r\,(X, e)$ identiquement.

12. On peut transposer au cas des H-espaces X à unité e la deuxième description des groupes d'homotopie $\pi_r\,(X, e)$ donnée dans *4*

dans le cas des groupes topologiques. Quoique la multiplication qu'héritent alors les ensembles $\mathrm{Sph}_r(X, e)$ à partir de X ne les munit pas d'une structure de groupe dans le cas général, elle définit dans $\pi_r(X, e)$ une multiplication qui coïncide avec la multiplication usuelle lorsque $r \geqslant 1$. L'ensemble $\pi_0(X, e)$ est alors un groupe dans le cas où X est homotopiquement associatif et admet une inversion homotopique.

Assemblages de groupes d'homotopie de l'espace total d'un fibré principal

13 (Lemme). *Soient* ξ *un fibré principal à groupe structural* G *et* $u, v: I \to \mathrm{tl}\,\xi$ *des chemins vérifiant* $\mathrm{pr}\,\xi \circ u = \mathrm{pr}\,\xi \circ v$. *Si* g_0, g_1 *sont des éléments du groupe* G *tels que* $u(0)\,g_0 = v(0)$, $u(1)\,g_1 = v(1)$ (*il s'agit de l'action canonique à droite du groupe* G *dans* $\mathrm{tl}\,\xi$; *voir* 4.3.2.10), *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, u(0)) & \xrightarrow{T_u} & \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, u(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, u(0)) & \xrightarrow{T_v} & \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, v(1)), \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales désignent les isomorphismes induits par les transformations $x \mapsto xg_0$, $x \mapsto xg_1$, *est commutatif.*

Démonstration. Rappelons que l'action canonique à droite $\mathrm{tl}\,\xi \times G \to \mathrm{tl}\,\xi$ est libre et que ses trajectoires coïncident avec les fibres du fibré ξ. Puisque les points $u(t)$, $v(t)$ sont situés dans une même fibre, il existe pour chaque $t \in I$ un élément et un seul $g(t) \in G$ vérifiant $u(t)\,g(t) = v(t)$. Donc si $h: I^r \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ est une homotopie libre qui joint le sphéroïde $\varphi_0 \in \mathrm{Sph}_r(\mathrm{tl}\,\xi, u(0))$ avec un certain sphéroïde $\varphi_1 \in \mathrm{Sph}_r(\mathrm{tl}\,\xi, u(1))$ le long de u, alors la formule $(y, t) \mapsto h(y, t)\,g(t)$ détermine une homotopie libre qui joint le sphéroïde $y \mapsto \varphi_0(y)\,g_0$ au sphéroïde $y \mapsto \varphi_1(y)\,g_1$ le long du chemin v.

14. Les transformations effectuées dans l'espace total d'un fibré principal ξ par les éléments de son groupe structural pour l'action canonique à droite relient pour chaque point $b \in \mathrm{bs}\,\xi$ et chaque $r \geqslant 0$ les groupes d'homotopie $\pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, x)$ avec $x \in \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b)$ par un isomorphisme canonique composé qui permet de les identifier. Le résultat de cette identification (qui est un groupe pour $r > 0$ et un ensemble à unité pour $r = 0$) est appelé *groupe d'homotopie de dimension r de l'espace* $\mathrm{tl}\,\xi$ *au-dessus de b*; on le désigne par $\pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, b)$.

Pour un chemin $s: I \to bs\,\xi$ définissons l'application T_s: $\pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, s(0)) \to \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, s(1))$ comme la translation $T_{\tilde{s}}: \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, \tilde{s}(0)) \to \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, \tilde{s}(1))$ le long d'un chemin quelconque $\tilde{s}$ qui recouvre s; cette définition est correcte en vertu du lemme *13*. Les applications T_s sont évidemment des homomorphismes et possèdent les propriétés 2.1 (i), 2.1 (ii) et 2.1(iii), de sorte qu'on a sur

bs ξ un assemblage (bs ξ, $\{\pi_r(\text{tl}\,\xi, b)\}$, $\{T_s\}$). On l'appelle *assemblage inférieur des groupes d'homotopie de dimension r de l'espace total du fibré* ξ.

Il est clair que l'assemblage induit par cet assemblage sur tl ξ au moyen de la projection pr ξ coïncide avec l'assemblage usuel des groupes d'homotopie de dimension r de l'espace tl ξ.

Si $\varphi: G \to G'$ est un monomorphisme, alors toute φ-application d'un G-fibré de Steenrod dans un G'-fibré de Steenrod induit d'une manière évidente pour chaque r un homomorphisme de l'assemblage inférieur des groupes d'homotopie de dimension r de l'espace totale du premier fibré dans un assemblage de même type du deuxième fibré.

Suite homotopique d'un fibré principal

15. Soit ξ un fibré principal à point de base $x_0 \in \text{tl}\,\xi$. Si l'on remplace dans la suite (12) la fibre F_0 à point de base x_0 par le groupe structural G à point de base $e = e_G$ qui lui est canoniquement homéomorphe (par l'homéomorphisme $g \mapsto x_0 g$) et si l'on adjoint à droite de cette suite une unité, on obtient la suite

$$\begin{aligned} \ldots \pi_2(G, e) &\xrightarrow{\text{in}_*} \pi_2(\text{tl}\,\xi, x_0) \xrightarrow{\text{pr}\,\xi_*} \pi_2(\text{bs}\,\xi, b_0) \xrightarrow{\Delta} \\ &\xrightarrow{\Delta} \pi_1(G, e) \xrightarrow{\text{in}_*} \pi_1(\text{tl}\,\xi, x_0) \xrightarrow{\text{pr}\,\xi_*} \pi_1(\text{bs}\,\xi, b_0) \xrightarrow{\Delta} \\ &\xrightarrow{\Delta} \pi_0(G, e) \xrightarrow{\text{in}_*} \pi_0(\text{tl}\,\xi, x_0) \xrightarrow{\text{pr}\,\xi_*} \pi_0(\text{bs}\,\xi, b_0) \to 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Rappelons que $\pi_0(G, e)$ est un groupe (voir *4*) et que le groupe $\pi_1(G, e)$ est commutatif (voir *3*). Une vérification immédiate montre que l'homomorphisme $\Delta: \pi_1(\text{bs}\,\xi, b_0) \to \pi_0(G, e)$ est un homomorphisme de groupe. Le groupe $\pi_0(G, e)$ agit à droite dans les groupes $\pi_r(G, e)$ (voir *5*), tandis que le groupe $\pi_1(\text{bs}\,\xi, b_0)$ agit dans les groupes $\pi_r(\text{bs}\,\xi, b_0)$ (voir 3.3) et $\pi_r(\text{tl}\,\xi, x_0) = \pi_r(\text{tl}\,\xi, b_0)$ (voir *14*). L'action canonique à droite du groupe G dans tl ξ induit son action à droite dans $\pi_0(\text{tl}\,\xi, x_0) = \text{comp}(\text{tl}\,\xi)$ et par conséquent une action à droite du groupe $\pi_0(G, e)$ dans $\pi_0(\text{tl}\,\xi, x_0)$. (Nous envisageons $\pi_0(G, e)$ comme le groupe quotient de G par la composante de l'élément unité — voir *4*; cette composante agit dans $\pi_0(\text{tl}\,\xi, x_0)$ comme identité.) Il est clair que les homomorphismes in_*, $\text{pr}\,\xi_*$, Δ sont compatibles avec les actions envisagées — comme il est requis par la définition 5.11. Ainsi, (13) est une π-suite. On l'appelle *suite homotopique du G-fibré* ξ *à point de base* x_0.

Il est clair que $\text{pr}\,\xi_*: \pi_0(\text{tl}\,\xi, x_0) \to \pi_0(\text{bs}\,\xi, b_0)$ est un épimorphisme et que la partition de l'ensemble $\pi_0(\text{tl}\,\xi, x_0)$ en orbites de l'action du groupe $\pi_0(G, e)$ coïncide avec zer $(\text{pr}\,\xi_*)$. Ainsi la suite (13) est exacte.

Il est clair également que si $\varphi: G' \to G$ est un monomorphisme, alors toute φ-application f d'un fibré principal ξ' à groupe structu-

ral G' et à point de base $x'_0 \in \mathrm{tl}\ \xi'$ dans un fibré principal ξ à groupe structural G et à point de base $x_0 \in \mathrm{tl}\ \xi$ vérifiant $\mathrm{tl}\ f(x'_0) = x_0$ induit un homomorphisme de la suite d'homotopie du premier fibré dans la suite d'homotopie du second.

10. Autres descriptions des groupes d'homotopie

1. Le sphéroïde $DS \circ ID \in \mathrm{Sph}_r(S^r, \mathrm{ort}_1)$ (voir 1.2.8.9) est appelé *sphéroïde fondamental de la sphère* S^r, il est désigné par IS. L'élément du groupe $\pi_r(S^r, \mathrm{ort}_1)$ qu'il détermine est désigné par sph_r. Le sphéroïde $ID \in \mathrm{Sph}_r(D^r, S^{r-1}, \mathrm{ort}_1)$ est appelé *sphéroïde fondamental de la boule* D^r, et l'élément du groupe d'homotopie $\pi_r(D^r, S^{r-1}, \mathrm{ort}_1)$ qu'il détermine est désigné par kug_r.

Il est clair que $\partial(ID) = IS$ et par conséquent $\partial(\mathrm{kug}_r) = \mathrm{sph}_{r-1}$.

2. Désignons par $\mathrm{Sph}_r^\circ(X, x_0)$ l'ensemble de toutes les applications continues de l'espace à point de base (S^r, ort_1) dans l'espace à point de base (X, x_0) et définissons l'application $IS^\#: \mathrm{Sph}_r^\circ(X, x_0) \to \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$ par la formule $IS^\#(\varphi) = \varphi \circ IS$. Il est clair que cette application est inversible, et il découle de 1.3.7.6. que les applications $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_r^\circ(X, x_0)$ sont homotopes si et seulement si les sphéroïdes $IS^\#(\varphi)$ et $IS^\#(\psi)$ le sont. Ainsi nous obtiendrons une description équivalente de l'ensemble $\pi_r(X, x_0)$ en remplaçant nos sphéroïdes cubiques et leurs homotopies par des sphéroïdes sphériques appartenant à $\mathrm{Sph}_r^\circ(X, x_0)$ et leurs homotopies.

Il est évident que le sphéroïde identique id S^r appartient à la classe sph_r. Il est clair également que l'élément du groupe $\pi_r(X, x_0)$ défini par le sphéroïde $f: (S^r, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$ coïncide avec $f_*(\mathrm{sph}_r)$.

Pour $r \geqslant 1$ l'application $IS^\#$ munit $\mathrm{Sph}_r^\circ(X, x_0)$ par la multiplication qui existe dans $\mathrm{Sph}_r(X, x_0)$. La multiplication qui apparaît ainsi dans $\mathrm{Sph}_r^\circ(X, x_0)$ peut facilement être décrite directement: le produit des sphéroïdes

$$\varphi, \psi: (S^r, \mathrm{ort}_1) = (S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes \ldots \otimes (S^1, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$$

est le sphéroïde

$$\varphi\psi: (S^r, \mathrm{ort}_1) = (S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes \ldots \otimes (S^1, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$$

défini par la formule

$$\varphi\psi(y_1, y_2, \ldots, y_r) = \begin{cases} \varphi(y_1^2, y_2, \ldots, y_r) & \text{si } \mathrm{im}\, y_1 \geqslant 0, \\ \psi(y_1^2, y_2, \ldots, y_r) & \text{si } \mathrm{im}\, y_1 \leqslant 0, \end{cases} \tag{14}$$

où $y_1, \ldots, y_r$ sont des nombres complexes égaux à 1 en valeur absolue, tandis que im désigne la partie imaginaire. Cette multiplication induit dans $\pi_r(X, x_0)$ une multiplication qui coïncide avec celle que cet ensemble possédait déjà. On peut étudier les propriétés homotopiques de la multiplication dans $\mathrm{Sph}_r^\circ(X, x_0)$ en se servant directement de la formule (14), ce qui nous donne une description

indépendante des groupes d'homotopie $\pi_r(X, x_0)$ dans le langage des sphéroïdes sphériques.

Il est particulièrement simple de décrire en termes de sphéroïdes sphériques le sphéroïde $\varphi^{-1} = (IS^{\#})^{-1}([IS^{\#}(\varphi)]^{-1})$ inverse du sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, x_0)$: il est déterminé par la formule

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}) = \varphi(x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}).$$

3. Désignons par $\mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, A, x_0)$ l'ensemble de toutes les applications continues du triplet $(D^r, S^{r-1}, \mathrm{ort}_1)$ dans le triplet (X, A, x_0) et définissons l'application

$$ID^{\#}: \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, A, x_0) \to \mathrm{Sph}_r(X, A, x_0)$$

par la formule $ID^{\#}(\varphi) = \varphi \circ ID$. Cette application est inversible et il découle de 1.3.7.6 que les applications $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, A, x_0)$ sont homotopes si et seulement si les sphéroïdes $ID^{\#}(\varphi)$, $ID^{\#}(\psi)$ le sont. Pour $r \geqslant 2$, l'application $ID^{\#}$ munit $\mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, A, x_0)$ de la multiplication définie dans $\mathrm{Sph}_r(X, A, x_0)$. Celle-ci peut être facilement décrite directement : pour les applications

$$\varphi, \psi: (D^r, \mathrm{ort}_1) = (S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes \ldots \otimes (S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes (I, 1) \to \\ \to (X, x_0)$$

la formule (14) dans laquelle $y_1, \ldots, y_{r-1}$ sont des nombres complexes à valeur absolue égale à 1, tandis que $y_r \in I$, détermine l'application $\varphi\psi: (D^r, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$ qui appartient à $\mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, A, x_0)$ pour $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, A, x_0)$. Le sphéroïde $\varphi^{-1} = (ID^{\#})^{-1} \times \times ([ID^{\#}(\varphi)]^{-1})$ inverse du sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, A, x_0)$ se définit de même que dans le cas absolu à l'aide de la formule

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}) = \varphi(x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}).$$

Ainsi, en remplaçant les sphéroïdes cubiques par des sphéroïdes sphériques, nous avons obtenu une description adéquate des groupes d'homotopie $\pi_r(X, A, x_0)$.

Il est évident que le sphéroïde identique id D^r est de classe kug_r. Il est également clair que l'élément du groupe $\pi_r(X, A, x_0)$ défini par le sphéroïde $f: (D^r, S^{r-1}, \mathrm{ort}_1) \mapsto (X, A, x_0)$ coïncide avec $f_*(\mathrm{kug}_r)$.

Contrairement aux ensembles cubiques $\mathrm{Sph}_r(X, x_0, x_0)$, $\mathrm{Sph}_r(X, x_0)$, les ensembles $\mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, x_0, x_0)$ et $\mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, x_0)$ ne sont pas identiques, mais sont seulement liés par l'application canonique inversible

$$(ID^{\#})^{-1} \circ (IS^{\#}): \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, x_0) \to \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, x_0, x_0)$$

qui peut être décrite plus explicitement par la formule $\varphi \mapsto \varphi \circ DS$.

La frontière $\partial\varphi$ du sphéroïde sphérique plein $\varphi \in \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, A, x_0)$ est un sphéroïde sphérique (appartenant à $\mathrm{Sph}_{r-1}^{\circ}(A, x_0)$) qu'on

donne à l'aide de la formule

$$\partial\varphi = [\mathrm{ab}\ \varphi\colon (S^{r-1}, \mathrm{ort}_1) \to (A, x_0)].$$

Il est évident que $IS^{\#} \circ \partial = \partial \circ ID^{\#}$, de sorte que cette définition de la frontière du sphéroïde nous donne le même homomorphisme frontière $\partial\colon \pi_r(X, A, x_0) \to \pi_{r-1}(A, x_0)$ que celui qui a été défini dans la théorie cubique.

4. Soit une application continue $f\colon (X, x_0) \to (X', x_0')$ ou $f\colon (X, A, x_0) \to (X', A', x_0')$. Il lui correspond une application $f_{\#}\colon \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, x_0) \to \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X', x_0')$ (resp. $f_{\#}\colon \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, A, x_0) \to \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X', A', x_0')$) définie par la formule $f_{\#}(\varphi) = f \circ \varphi$. Comme, évidemment, $IS^{\#} \circ f_{\#} = f_{\#} \circ IS^{\#}$ et $ID^{\#} \circ f_{\#} = f_{\#} \circ ID^{\#}$, ces applications $f_{\#}$ donnent les mêmes homomorphismes induits $f_*\colon \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X', x_0')$, $f_*\colon \pi_r(X, A, x_0) \to \pi_r(X', A', x_0')$ que les définitions correspondantes de la théorie cubique.

L'homotopie libre qui joint les sphéroïdes $\varphi_0 \in \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, x_0)$, $\varphi_1 \in \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, x_1)$ le long du chemin $s\colon I \to X$ se définit simplement comme l'homotopie $S^r \times I \to X$ qui joint les applications φ_0, φ_1 et qui applique (ort_1, t) dans $s(t)$ quel que soit t. Si h est une telle homotopie, alors évidemment $h \circ (IS \times \mathrm{id}\, I)$ est une homotopie libre qui joint les sphéroïdes $IS^{\#}(\varphi_0) \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$, $IS^{\#}(\varphi_1) \in \mathrm{Sph}_r(X, x_1)$ le long du même chemin s, de sorte qu'avec les homotopies sphériques le long de s nous retrouvons l'isomorphisme $T_s\colon \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X, x_1)$ que nous avons vu dans la théorie cubique. Tout ceci se transfère facilement au cas relatif.

Une autre démonstration du théorème 4.7

5. Les notions de sphéroïdes sphériques pleins et de suite homotopique d'un couple nous permettent de donner une deuxième démonstration du théorème 4.7, moins directe, mais en revanche sans formules encombrantes.

D'abord nous considérons le cas modèle : $X = (D^2, \mathrm{ort}_1) \vee (D^2, \mathrm{ort}_1)$; $A = (S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^1, \mathrm{ort}_1)$; x_0 est le centre des deux bouquets ; $\alpha = \mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{kug}_2)$, $\beta = \mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{kug}_2)$. Puisque $\partial(\alpha^{-1}\beta\alpha) = (\partial\alpha)^{-1}(\partial\beta)(\partial\alpha) = T_{\partial\alpha}\partial\beta$ (voir 3.4) et $T_{\partial\alpha}\partial\beta = \partial T_{\partial\alpha}\beta$ (voir 4.5), on a $\partial(\alpha^{-1}\beta\alpha) = \partial T_{\partial\alpha}\beta$, et puisqu'en outre l'espace X est contractile, on voit que les ∂ sont des isomorphismes (voir 6.5). Ainsi $\alpha^{-1}\beta\alpha = T_{\partial\alpha}\beta$.

Dans le cas général, nous fixons des sphéroïdes quelconques $\varphi, \psi \in \mathrm{Sph}_2^{\circ}(X, A, x_0)$ de classes α, β et définissons une application

$$f\colon ((D^2, \mathrm{ort}_1) \vee (D^2, \mathrm{ort}_1), (S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^1, \mathrm{ort}_1)) \to (X, A)$$

par les formules

$$f(\mathrm{imm}_1(x)) = \varphi(x), \quad f(\mathrm{imm}_2(x)) = \psi(x), \quad x \in D^2.$$

Puisque $\varphi = f \circ \mathrm{imm}_1$, $\psi = f \circ \mathrm{imm}_2$, on a

$$\alpha = (f \circ \mathrm{imm}_1)_* (\mathrm{kug}_2), \quad \beta = (f \circ \mathrm{imm}_2)_* (\mathrm{kug}_2)$$

et par conséquent

$$\alpha^{-1}\beta\alpha = f_* ([\mathrm{imm}_{1*} (\mathrm{kug}_2)]^{-1} [\mathrm{imm}_{2*} (\mathrm{kug}_{2*})] [\mathrm{imm}_{1*} (\mathrm{kug}_2)] =$$
$$= f_* (T_{\partial \circ \mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{kug}_2)} \mathrm{imm}_{2*} (\mathrm{kug}_2)) = T_{\partial\alpha}\beta.$$

Les sphéroïdes dans les espaces de sphéroïdes

6. Soit X un espace à point de base x_0. Chacune des formules

$$[\psi (t_1, \ldots, t_r)] (u_1, \ldots, u_s) = \varphi (t_1, \ldots, t_r, u_1, \ldots, u_s),$$
$$[\psi (t_1, \ldots, t_r)] (u_1, \ldots, u_s) = \varphi (u_1, \ldots, u_s, t_1, \ldots, t_r)$$

fait correspondre au sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_{r+s} (X, x_0)$ un sphéroïde ψ de dimension r de l'espace $\mathrm{Sph}_s (X, x_0)$ (voir 9.10) avec pour point de base le sphéroïde constant. Ceci nous donne deux applications

$$\mathrm{Cub}, \mathrm{Buc}: \mathrm{Sph}_{r+s} (X, x_0) \to \mathrm{Sph}_r (\mathrm{Sph}_s (X, x_0), \mathrm{const})$$

qui sont évidemment inversibles et, de même que les applications inverses, appliquent les sphéroïdes homotopes dans des sphéroïdes homotopes. L'effet de l'application Cub est tel que pour $r > 0$ la multiplication que nous avons déjà dans $\mathrm{Sph}_{r+s} (X, x_0)$ devient multiplication usuelle dans $\mathrm{Sph}_r (\mathrm{Sph}_s (X, x_0), \mathrm{const})$ (multiplication des sphéroïdes). Quant à l'application Buc, elle transforme pour $s > 0$ la multiplication dans $\mathrm{Sph}_{r+s} (X, x_0)$ en la multiplication qui apparaît dans $\mathrm{Sph}_r (\mathrm{Sph}_s (X, x_0), \mathrm{const})$ grâce au fait que $\mathrm{Sph}_s (X, x_0)$ est un H-espace à unité const (voir 9.11 et 9.10). Par conséquent, pour $r + s > 0$, les applications Cub, Buc définissent des isomorphismes de groupe

$$\mathrm{cub}, \mathrm{buc}: \pi_{r+s} (X, x_0) \to \pi_r (\mathrm{Sph}_s (X, x_0), \mathrm{const})$$

(la structure de groupe dans $\pi_0 (\mathrm{Sph}_s (X, x_0), \mathrm{const})$ pour $s > 0$ est décrite dans 9.12). Ainsi le groupe $\pi_r (X, x_0)$ peut être décrit comme étant $\pi_{r-q} (\mathrm{Sph}_q (X, x_0), \mathrm{const})$ pour tout $q \leqslant r$.

Remarquons que l'isomorphisme $\mathrm{cub}: \pi_r (X, x_0) \to \pi_{r-1} (\mathrm{Sph}_1 (X, x_0), \mathrm{const})$ participe à la suite d'homotopie du fibré de Serre

$$\xi = (\mathscr{C} (I, 0; X, x_0), \mathrm{ab}\, \mathscr{C} ([\mathrm{in}: \mathrm{Fr}\, I \to I], \mathrm{id}),$$
$$X = \mathscr{C} (\mathrm{Fr}\, I, 0; X, x_0))$$

(dont la fibre au-dessus du point x_0 est $\mathrm{Sph}_1 (X, x_0)$) sous forme d'homomorphisme $\Delta: \pi_r (X, x_0) \to \pi_{r-1} (\mathrm{Sph}_1 (X, x_0), \mathrm{const})$. Le fait que ξ est un fibré de Serre découle de 4.1.4.2.

11. Théorèmes d'addition

1. Soient $d_1, \ldots, d_m$ des boules deux à deux disjointes de l'espace $\mathbf{R}^r$ contenues dans D^r, et soit g un sphéroïde appartenant à $\mathrm{Sph}_r^\circ(X, A, x_0)$ qui applique l'ensemble $C = D^r \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathrm{Int}\, d_i$ dans A. Désignons par τ_i l'application de la boule D^r dans D^r définie par la formule $\tau_i(y) = (\text{centre de } d_i) + (\text{rayon de } d_i)\, y$. Si les segments qui joignent les points $\tau_1(\mathrm{ort}_1), \ldots, \tau_m(\mathrm{ort}_1)$ à ort_1 sont contenus dans C, alors pour $r > 2$, on a

$$\gamma = (T_{s_1}\gamma_1)(T_{s_2}\gamma_2) \ldots (T_{s_m}\gamma_m), \tag{15}$$

où γ et γ_i sont les éléments des groupes $\pi_r(X, A, x_0)$ et $\pi_r(X, A, g \circ \tau_i(\mathrm{ort}_1))$ représentés par les sphéroïdes g, $g \circ \tau_i \in \mathrm{Sph}_r^\circ(X, A, g \circ \tau_i(\mathrm{ort}_1))$, tandis que s_i est le chemin dans A défini par la formule $s_i(t) = g((1-t)\tau_i(\mathrm{ort}_1) + t\,\mathrm{ort}_1)$. Le même reste vrai pour $r = 2$ si les boules $d_1, \ldots, d_m$ ont été numérotées de façon naturelle, i. e. si chacun des 2-repères $\tau_i(\mathrm{ort}_1) - \mathrm{ort}_1$, $\tau_{i+1}(\mathrm{ort}_1) - \mathrm{ort}_1$ détermine l'orientation naturelle du plan $\mathbf{R}^2$.

La démonstration s'effectue par récurrence sur m. Nous la commencerons par deux remarques, dans lesquelles l_i désigne le chemin (rectiligne) dans C défini par la formule $l_i(t) = (1-t)\tau_i(\mathrm{ort}_1) + t\,\mathrm{ort}_1$.

Première remarque: pour des boules $d_1, \ldots, d_m$ données il suffit d'effectuer la démonstration dans le cas où $(X, A, x_0) = (D^r, C, \mathrm{ort}_1)$, $g = \mathrm{rel\ id}\, D^r$ et $s_i = l_i$. En effet, l'homomorphisme $g_*: \pi_r(D^r, C, \mathrm{ort}_1) \to \pi_r(X, A, x_0)$ applique la classe du sphéroïde rel id D^r dans γ et la classe du sphéroïde τ_i, transférée le long de l_i, dans $T_{s_i}\gamma_i$.

Deuxième remarque: pour un m donné, il suffit d'effectuer la démonstration pour une famille standard de boules $d_1, \ldots, d_m$, à savoir pour les boules de rayon $1/2m$ et de centres $\frac{m-1}{m}\mathrm{ort}_2$, $\frac{m-3}{m}\mathrm{ort}_2, \ldots, \frac{3-m}{m}\mathrm{ort}_2, \frac{1-m}{m}\mathrm{ort}_2$. Pour nous en convaincre, considérons, en plus des boules standards avec les C, τ_i, l_i correspondants, des boules quelconques $d'_1, \ldots, d'_m$ vérifiant les hypothèses du théorème et les C', τ'_i, l'_i qui leur correspondent. Il est évident qu'il existe une application continue $h: D^r \to D^r$, S^{r-1}-homotope à l'identité telle que $h(C) \subset C'$, $h \circ \tau_i = \tau'_i$, $h \circ l_i = l'_i$. Il est clair également que pour un tel h l'homomorphisme rel h_*: $\pi_r(D^r, C, \mathrm{ort}_1) \to \pi_r(D^r, C', \mathrm{ort}_1)$ applique la classe du sphéroïde id D^r dans la classe du sphéroïde id D^r, et les classes des sphéroïdes τ_i transportées le long des chemins l_i dans les classes des sphéroïdes τ'_i transportées le long des chemins l'_i.

Commençons notre récurrence. Les cas $m = 0, 1$ sont triviaux; considérons le cas $m = 2$. Nos remarques permettent de supposer que

$(X, A, x_0) = (D^r, C, \mathrm{ort}_1)$, $g = \mathrm{id}$ et que les boules d_1, d_2 sont les boules standards de rayon 1/4 et de centres $\mathrm{ort}_2/2$, $-\mathrm{ort}_2/2$. Désignons par ρ_φ la rotation de la boule D^r d'un angle φ autour du sous-espace défini par les équations $x_1 = x_2 = 0$ et considérons les homotopies $D^r \times I \to D^r$ définies par les formules

$$(y, t) \mapsto [(1 + t)\, \rho_{\pi t/2}\, (y) - 2\mathrm{ort}_2]/4,$$

$$(y, t) \mapsto [(1 + t)\rho_{-\pi t/2}\, (y) + 2\mathrm{ort}_2]/4$$

$(y \in D^r,\ t \in I)$. Ces homotopies peuvent être considérées comme des homotopies libres des sphéroïdes du couple (D^r, C) et en tant que telles elles lient τ_1, τ_2 avec certains sphéroïdes σ_1, σ_2 d'origine 0. Désignons par u_1, u_2 les chemins le long desquels ces homotopies sont effectuées. Il est clair que chacun des chemins $u_1^{-1} l_1$, $u_2^{-1} l_2$ est homotope au chemin rectiligne l qui joint 0 à ort_1.

Par conséquent, le produit des classes des sphéroïdes τ_1, τ_2 transportées au point ort_1 le long des chemins l_1, l_2 coïncide avec le produit des classes des sphéroïdes σ_1, σ_2 transportées au point ort_1 le long de l, i.e. avec la classe du produit des sphéroïdes σ_1, σ_2 transportée au point ort_1 le long de l. Il reste à remarquer que le produit $\sigma_1\sigma_2$ peut être lié à id D^r par une homotopie libre le long de l, par exemple, par une homotopie rectiligne.

Soit enfin $m \geqslant 3$. De même que pour $m = 2$ nous pouvons supposer que $(X, A, x_0) = (D^r, C, \mathrm{ort}_1)$, $g = \mathrm{id}$ et que les boules $d_1, \ldots, d_m$ sont standards $\left(\text{de rayon } 1/2m \text{ et de centres } \frac{m-1}{m}\mathrm{ort}_2, \frac{m-3}{m}\mathrm{ort}_2, \ldots, \frac{3-m}{m}\mathrm{ort}_2, \frac{1-m}{m}\mathrm{ort}_2\right)$. Introduisons la boule d de rayon $3/2m$ et de centre $\frac{2-m}{m}\mathrm{ort}_2$ (qui contient les boules d_{m-1} et d_m), l'application τ: $D^r \to D^r$ définie par la formule

$$\tau\,(y) = (\text{centre de } d) + (\text{rayon de } d)\, y$$

et les chemins rectilignes l, u, et v qui joignent $\tau\,(\mathrm{ort}_1)$ à ort_1, $\tau_{m-1}\,(\mathrm{ort}_1)$ à $\tau\,(\mathrm{ort}_1)$ et $\tau_m\,(\mathrm{ort}_1)$ à $\tau\,(\mathrm{ort}_1)$. Désignons maintenant par δ l'élément du groupe $\pi_r\,(D^r, C, \tau\,(\mathrm{ort}_1))$ défini par le sphéroïde τ. Il est évident que les produits ul, vl sont homotopes aux chemins l_{m-1}, l_m et donc

$$T_{l_1}\gamma_1 \ldots T_{l_m}\gamma_m = T_{l_1}\gamma_1 \ldots$$
$$\ldots T_{l_{m-2}}\gamma_{m-2} T_l\, (T_u\gamma_{m-1} T_v\gamma_m). \quad (16)$$

En appliquant le théorème à démontrer d'abord au cas de deux facteurs et ensuite au cas de $m - 1$ facteurs nous voyons que

$$T_u\gamma_{m-1} T_v\gamma_m = \delta, \quad (17)$$

$$T_{l_1}\gamma_1 \ldots T_{l_{m-2}}\gamma_{m-2} T_l\delta = \gamma. \quad (18)$$

(Dans le premier cas l'hypothèse de récurrence s'applique à $(X, A, x_0) = (D^r, C, \tau'_{n-1}(\mathrm{ort}_1))$, $g = \tau$ et aux boules $\tau^{-1}(d_{m-1})$, $\tau^{-1}(d_m)$, tandis que dans le second elle s'applique à $(X, A, x_0) = (D^r, C, \mathrm{ort}_1)$, $g = \mathrm{id}$ et aux boules $d_1, \ldots, d_{m-2}, d$.) La relation (15) découle de (16), (17), (18).

2. Soit $X = \lim (X_k, \varphi_k)$, *tous les* X_k *étant des* T_1*-espaces et supposons que* $x \in X$, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1, \ldots$ *sont des points qui vérifient* $\mathrm{imm}_k(x_k) = x$. *Si pour un certain* r *tous les homomorphismes* $(\varphi_k)_{*r}: \pi_r(X_k, x_k) \to \pi_r(X_{k+1}, x_{k+1})$ *sont des isomorphismes, alors pour cette valeur de* r *tous les homomorphismes* $(\mathrm{imm}_k)_{*r}: \pi_r(X_k, x_k) \to \pi_r(X, x)$ *sont également des isomorphismes.*

Pour la démonstration, remarquons qu'en vertu du théorème 1.2.4.5, tout sphéroïde $I^r \to X$ peut être représenté comme la composée d'un certain sphéroïde $I^r \to X_l$ pour l suffisamment grand et d'un plongement imm_l, tandis que chaque homotopie $I^r \times I \to X$ est la composée d'une certaine homotopie $I^r \times I \to X_l$ pour l suffisamment grand et d'un plongement imm_l. Cette remarque implique que les homomorphismes $(\mathrm{imm}_k)_{*r}$ sont épimorphismes ou monomorphismes lorsque les composées

$$(\varphi_{l-1})_{*r} \circ (\varphi_{l-2})_{*r} \circ \ldots \circ (\varphi_k)_{*r}: \pi_r(X_k, x_k) \to \pi_r(X_l, x_l)$$

le sont.

12. Exercices

1. Soient X un espace topologique à point de base x_0 et G un groupe quelconque muni d'une action à droite du groupe $\pi_1(X, x_0)$. Montrer qu'il existe un assemblage de groupes $(X, \{G_x\}, \{T_s\})$, $G_{x_0} = G$, qui détermine cette action.

2. Montrer que si X est un espace cellulaire dénombrable, A son sous-espace dans le sens cellulaire et x_0 un point de A, alors les groupes $\pi_r(X, A, x_0)$ sont dénombrables.

3. Soit (X, A) un couple topologique à point de base $x_0 \in A$ tel que les groupes $\pi_r(X, x_0)$, $\pi_r(A, x_0)$, $r \geqslant 1$, ont un nombre fini de générateurs. Montrer que si X est simplement connexe, alors les groupes $\pi_r(X, A, x_0)$, $r \geqslant 2$, possèdent également un nombre fini de générateurs.

4. Soient ξ un fibré de Serre et E un sous-espace de l'espace $\mathrm{tl}\,\xi$ tel que $(E, \mathrm{pr}\,\xi|_E, \mathrm{bs}\,\xi)$ est également un fibré de Serre. Montrer que $\forall x \in E$, les homomorphismes

$$\mathrm{in}_*: \pi_r(\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{pr}\,\xi(x)), \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{pr}\,\xi(x)) \cap E, x) \to \\ \to \pi_r(\mathrm{tl}\,\xi, E, x), \ r \geqslant 1,$$

sont des isomorphismes.

5. Montrer que si la base d'un revêtement est k-simple, alors son espace total est k-simple.

6. Montrer que pour $r > 0$, $s > 0$ les homomorphismes

$$\text{cub, buc}: \pi_{r+s}(X, x_0) \to \pi_r(\mathrm{Sph}_s(X, x_0), \text{const})$$

sont identiques au facteur $(-1)^{rs}$ près.

§ 2. GROUPES D'HOMOTOPIE DES SPHÈRES ET DES VARIÉTÉS CLASSIQUES

1. Suspension dans les groupes d'homotopie des sphères

1. On appelle *suspension d'un sphéroïde* $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(X, x_0)$ un sphéroïde appartenant à $\mathrm{Sph}_{r+1}(\mathrm{su}(X, x_0), \mathrm{bp})$ défini par la formule

$$(t_1, \ldots, t_{r+1}) \mapsto \mathrm{pr}(\varphi(t_1, \ldots, t_r), t_{r+1}),$$

où $\mathrm{pr} = [\mathrm{pr}: X \times I \to \mathrm{su}(X, x_0)]$. Notation: su φ.

Une vérification immédiate montre que les suspensions de sphéroïdes homotopes sont homotopes, la suspension d'un produit de deux sphéroïdes de dimension positive coïncide avec le produit de leurs suspensions et la suspension du sphéroïde constant est le sphéroïde constant. Par conséquent, la correspondance $\varphi \mapsto \mathrm{su}\,\varphi$, détermine pour chaque $r \geqslant 0$ un homomorphisme $\pi_r(X, x_0) \to \pi_{r+1}(\mathrm{su}(X, x_0), \mathrm{bp})$. Cet homomorphisme est également appelé *suspension* et noté su.

Rappelons que nous avons déjà, à deux reprises (dans 1.2.6.2 et dans 1.2.8.5), donné la définition de la suspension d'une application continue: dans 1.2.6.2 il s'agissait de la suspension d'une application d'un espace dans un autre, dans 1.2.8.5, de la suspension d'une application d'un espace à point de base dans un espace à point de base. La troisième définition que nous venons de donner est encore plus spéciale, se rapportant aux applications du couple $(I^r, \mathrm{Fr}\, I^r)$ dans un espace à point de base et n'a rien à voir avec les deux définitions précédentes. Toutefois cette définition est compatible avec la deuxième définition en ce sens qu'elle s'en obtient lorsqu'on passe des sphéroïdes sphériques aux sphéroïdes cubiques. Plus précisément: les sphéroïdes de $\mathrm{Sph}_r^{\bullet}(X, x_0)$, étant des applications d'un espace à point de base dans un espace à point de base, possèdent des suspensions dans le sens de 1.2.8.5. et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sph}_r^{\circ}(X, x_0) & \xrightarrow{\mathrm{su}} & \mathrm{Sph}_{r+1}^{\circ}(\mathrm{su}(X, x_0), \mathrm{bp}) \\ \downarrow{\scriptstyle IS\#} & & \downarrow{\scriptstyle IS\#} \\ \mathrm{Sph}_r(X, x_0) & \xrightarrow{\mathrm{su}} & \mathrm{Sph}_{r+1}(\mathrm{su}(X, x_0), \mathrm{bp}) \end{array}$$

est commutatif.

Nous ferons maintenant deux remarques importantes. Première remarque: si f est une application continue d'un espace à point de

base (X, x_0) dans un espace à point de base (Y, y_0), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(X, x_0) & \xrightarrow{\text{su}} & \pi_{r+1}(\text{su}(X, x_0), \text{bp}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow (\text{su}\, f)_* \\ \pi_r(Y, y_0) & \xrightarrow{\text{su}} & \pi_{r+1}(\text{su}(Y, y_0), \text{bp}) \end{array}$$

(où su f doit être compris au sens de 1.2.8.5) est commutatif pour chaque $r \geqslant 0$. Deuxième remarque : puisque $(\text{su}\,(S^n, \text{ort}_1), \text{bp}) = (S^{n+1}, \text{ort}_1)$, notre construction appliquée aux sphères donne l'homomorphisme $\pi_r(S^n, \text{ort}_1) \to \pi_{r+1}(S^{n+1}, \text{ort}_1)$. Le principal théorème du présent sous-paragraphe, le théorème *4*, se rapporte justement à ce dernier homomorphisme.

2. Une autre description de l'homomorphisme su : $\pi_r(X, x_0) \to \pi_{r+1}(\text{su}\,(X, x_0), \text{bp})$ s'obtient de l'application lp : $(X, x_0) \to \text{Sph}_1(\text{su}\,(X, x_0), \text{bp})$ définie par la formule $[\text{lp}\,(x)]\,(t) = (x, t)$. A savoir, comme le montre une vérification immédiate, chaque sphéroïde $\varphi \in \text{Sph}_r(X, x_0)$ est appliqué par l'application composée

$$\text{Sph}_r(X, x_0) \xrightarrow{\text{lp}_\#} \text{Sph}_r(\text{Sph}_1(\text{su}\,(X, x_0), \text{bp}), \text{const}) \xrightarrow{\text{cub}} \xrightarrow{\text{cub}} \text{Sph}_{r+1}(\text{su}\,(X, x_0), \text{bp})$$

(voir 1.10.6) dans su φ, de sorte que l'homomorphisme su : $\pi_r(X, x_0) \to \pi_{r+1}(\text{su}\,(X, x_0), \text{bp})$ peut être défini par la formule $\text{su} = \text{cub} \circ \text{lp}_*$.

Une autre description de l'homomorpisme su apparaît en considérant la suspension $\text{su}\,(X, x_0)$ comme espace quotient du cône (X, x_0) par la base (identifiée à X). A savoir, quel que soit le sphéroïde $\varphi \in \text{Sph}_r(X, x_0)$, un sphéroïde de $\text{Sph}_{r+1}(\text{cône}\,(X, x_0), X, x_0)$ défini par la formule

$$(t_1, \ldots, t_{r+1}) \mapsto (\varphi\,(t_1, \ldots t_r), t_{r+1})$$

est envoyé par l'application

$$\text{pr}_\# : \text{Sph}_{r+1}(\text{cône}\,(X, x_0), X, x_0) \to \text{Sph}_{r+1}(\text{su}\,(X, x_0), \text{bp}),$$

où $\text{pr} = [\text{pr} : \text{cône}\,(X, x_0) \to \text{su}\,(X, x_0)]$, dans su φ, tandis que l'application

$$\partial : \text{Sph}_{r+1}(\text{cône}\,(X, x_0), X, x_0) \to \text{Sph}_r(X, x_0)$$

l'envoie dans φ, de sorte que su : $\pi_r(X, x_0) \to \pi_{r+1}(\text{su}\,(X, x_0), \text{bp})$ coïncide avec l'homomorphisme composé

$$\pi_r(X, x_0) \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_{r+1}(\text{cône}\,(X, x_0), X, x_0) \xrightarrow{\text{pr}_*} \pi_{r+1}(\text{su}\,(X, x_0), \text{bp})$$

(le fait que l'homomorphisme $\partial : \pi_{r+1}(\text{cône}\,(X, x_0), X, x_0) \to \pi_r(X, x_0)$ possède un homomorphisme inverse découle de la contractilité du cône ; voir 1.6.5).

Lorsque, par exemple, $(X, x_0) = (S^n, \text{ort}_1)$, on a $\text{cône}\,(X, x_0) = D^{n+1}$, $\text{su}\,(X, x_0) = S^{n+1}$, $\text{pr} = DS$.

Théorème des suspensions

3 (Lemme). *Soient K, L des sous-ensembles fermés disjoints du cube I^m tels que K se recouvre par un nombre fini de plans de dimension k, tandis que L se recouvre par un nombre fini de plans de dimension l et la relation*

$$K \cap \mathrm{Fr}\, I^m \subset I^{m-1} \times [0, 1/2),\ L \cap \mathrm{Fr}\, I^m \subset I^{m-1} \times (1/2, 1]$$

est vérifiée. Si $k + l \leqslant m - 2$, alors il existe une Fr I^m*-homotopie $F: I^m \times I \to I^m$ telle que:*

(i) *les applications $I^m \to I^m$ qui constituent F sont des homéomorphismes, et les applications inverses constituent également une homotopie;*

(ii) *F joint* id I^m *à l'application $I^m \to I^m$ qui envoie K dans $I^{m-1} \times [0, 1/2]$ et L dans $I^{m-1} \times [1/2, 1]$.*

Démonstration. Envisageons d'abord le cas où $L \subset I^{m-1} \times [1/2, 1]$. Puisque les droites qui coupent à la fois K et L remplissent un ensemble qui peut être recouvert par un nombre fini de plans de dimension $k + l + 1 \leqslant m - 1$, alors on peut trouver dans l'ensemble Int $I^{m-1} \times (0, 1/2)$ un point a qui ne soit contenu dans aucune de ces droites. Projetons à partir du point a les ensembles K, L sur Fr I^m. Leurs images seront des sous-ensembles disjoints fermés de l'ensemble Fr I^m; nous pouvons construire pour eux une fonction d'Urysohn Fr $I^m \to I$, mettons α. Fixons un nombre positif ε tel que l'homothétie de centre a et de rapport ε plonge le cube I^m dans $I^{m-1} \times [0, 1/2]$ et l'homothétie de centre a et de rapport $1/(1 - \varepsilon)$ applique l'intersection $K \cap (I^{m-1} \times [1/2, 1])$ à l'intérieur du cube I^m; désignons par φ_x, $x \in \mathrm{Fr}\, I^m$, le chemin rectiligne $I \to I^m$ qui joint a à x et par ψ_t, $t \in\,]-1, 1[$, l'homéomorphisme $I \to I$ qui applique linéairement $[0, (1 + t)/2]$ sur $[0, (1 - t)/2]$ et $[(1 + t)/2, 1]$ sur $[(1 - t)/2, 1]$. La formule

$$F(\varphi_x(u), t) = \varphi_x \circ \psi_{t(1-\varepsilon)\alpha(x)}(u),$$

où $x \in \mathrm{Fr}\, I^m$ et t, $u \in I$, nous donne évidemment l'homotopie F requise.

Pour réduire le cas général à ce cas particulier, il suffit de construire une Fr I^m-homotopie $F: I^m \times I \to I^m$ qui possède la propriété (i) et joint id I^m à une application qui envoie L dans $I^{m-1} \times [1/2, 1]$. Une telle homotopie peut être définie d'après un nombre quelconque δ appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, à condition que δ vérifie $L \subset I^{m-1} \times [(1 - \delta)/2, 1]$, en posant

$$F((x, u), t) = (x, \psi_{-t\delta}(u)),$$

où $x \in I^{m-1}$ et t, $u \in I$.

4. *L'homomorphisme* su: $\pi_r(S^n, \mathrm{ort}_1) \to \pi_{r+1}(S^{n+1}, \mathrm{ort}_1)$ *est un isomorphisme pour $r \leqslant 2n - 2$ et un épimorphisme pour $r = 2n - 1$.*

Démonstration du fait que su est un épimorphisme pour $r \leqslant 2n-1$. Il faut démontrer que pour chaque sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_{r+1}(S^{n+1}, \mathrm{ort}_1)$ il existe un sphéroïde $\psi \in \mathrm{Sph}_r(S^n, \mathrm{ort}_1)$ tel que le sphéroïde su ψ est homotope à φ.

La démonstration est particulièrement simple si $\varphi(I^r \times [0, 1/2])$ est contenu dans l'hémisphère nord de la sphère S^{n+1} (là où la dernière coordonnée x_{n+2} est non négative), tandis que $\varphi(I^r \times [1/2, 1])$ se trouve dans l'hémisphère sud de la sphère S^{n+1} (où la dernière coordonnée x_{n+2} est non positive). Dans ce cas $\varphi(I^r \times (1/2))$ est contenu dans l'intersection des hémisphères, i.e. dans S^n et le sphéroïde demandé ψ est donné par la formule

$$\psi(t_1, \ldots, t_r) = \varphi(t_1, \ldots, t_r, 1/2),$$

tandis que l'homotopie qui joint φ à su ψ est donnée par la formule

$$((t_1, \ldots, t_{r+1}), t) \mapsto$$

$$\mapsto \begin{cases} \varphi\left(t_1, \ldots, t_r, \dfrac{t_{r+1}}{1-t}\right) & \text{pour } 0 \leqslant t_{r+1} \leqslant \dfrac{1-t}{2}, \\ \mathrm{pr}\left(\varphi\left(t_1, \ldots, t_r, \dfrac{1}{2}\right), t_{r+1}\right) & \text{pour } \dfrac{1-t}{2} \leqslant t_{r+1} \leqslant \dfrac{1+t}{2}, \\ \varphi\left(t_1, \ldots, t_r, \dfrac{t_{r+1}-t}{1-t}\right) & \text{pour } \dfrac{1+t}{2} \leqslant t_{r+1} \leqslant 1, \end{cases}$$

où $\mathrm{pr} = [\mathrm{pr}: S^n \times I \to \mathrm{su}(S^n, \mathrm{ort}_1)]$.

Un cas plus général où l'ensemble $\varphi^{-1}(\mathrm{ort}_{n+2})$ est contenu dans $I^r \times [0, 1/2)$, tandis que l'ensemble $\varphi^{-1}(-\mathrm{ort}_{n+2})$ est contenu dans $I^r \times (1/2, 1]$, se réduit facilement à ce cas particulier. A savoir, fixons un $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque point $y \in I^r \times [1/2, 1]$ la dernière coordonnée du point $\varphi(y)$ soit inférieure ou égale à $1-\varepsilon$ et, pour chaque point $y \in I^r \times [0, 1/2]$, la dernière coordonnée du point $\varphi(y)$ soit supérieure ou égale à $-(1-\varepsilon)$; définissons ensuite l'application $h: (S^{n+1}, \mathrm{ort}_1) \to (S^{n+1}, \mathrm{ort}_1)$ par la formule

$$h(x_1, \ldots, x_{n+2}) =$$

$$= \begin{cases} (x_1, \ldots, x_{n+1}, \sqrt{x_{n+2}^2 - (1-\varepsilon^2)}) / \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} \\ \qquad\qquad \text{si } |x_{n+2}| \geqslant 1-\varepsilon, \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0) / \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2} \\ \qquad\qquad \text{si } |x_{n+2}| \leqslant 1-\varepsilon. \end{cases}$$

(Cette application « met » les calottes polaires déterminées par les inégalités $x_{n+2} \geqslant 1-\varepsilon$, $x_{n+2} \leqslant -(1-\varepsilon)$ sur les hémisphères nord et sud de la sphère S^{n+1} et applique la ceinture équatoriale restante sur l'équateur S^n.) Il est clair que l'application h est ort_1-homotope à $\mathrm{id}\, S^{n+1}$ (l'homotopie déplace uniformément chaque point $x \in S^{n+1}$ vers $h(x)$ le long de l'arc le plus court du grand cercle

correspondant) et que la composée $h \circ \varphi$ applique $I^r \times [0, 1/2]$ dans l'hémisphère nord et $I^r \times [1/2, 1]$ dans l'hémisphère sud.

Enfin, dans le cas le plus général, nous construisons une triangulation de la sphère S^{n+1} dans laquelle ort_1 est un sommet, tandis que ort_{n+2}, $-\mathrm{ort}_{n+2}$ sont des points intérieurs de simplexes de dimension $n+1$, et ensuite une triangulation rectiligne du cube I^n qui garantit l'existence d'une approximation simpliciale de l'application φ. Si φ_1 est une telle approximation, il est évident que les ensembles $K = \varphi_1^{-1}(\mathrm{ort}_{n+2})$, $L = \varphi_1^{-1}(-\mathrm{ort}_{n+2})$ vérifient les hypothèses du lemme *3* pour $m = r+1$ et $k = l = r-n$ (dans ce cas les intersections $K \cap \mathrm{Fr}\, I^{r+1}$, $L \cap \mathrm{Fr}\, I^{r+1}$ sont même vides); soit $G\colon I^{r+1} \times I \to I^{r+1}$ une homotopie constituée des homéomorphismes inverses des homéomorphismes qui constituent l'homotopie F du lemme *3*. Il est clair que φ_1 est un sphéroïde homotope à φ et il ne reste donc qu'à remarquer que l'homotopie

$$\varphi_1 \circ \mathrm{rel}\, G\colon (I^{r+1} \times I,\ \mathrm{Fr}\, I^{r+1} \times I) \to (S^{n+1},\ \mathrm{ort}_1)$$

joint φ_1 au sphéroïde pour lequel l'image inverse du point ort_{n+2} est contenue dans $I^r \times [0, 1/2)$ et celle de $-\mathrm{ort}_{n+2}$ dans $I^r \times \times (1/2, 1]$.

Démonstration du fait que su est un monomorphisme pour $r \leqslant 2n+2$. Il faut démontrer que le sphéroïde $\psi\colon (I^r, \mathrm{Fr}\, I^r) \to (S^n, \mathrm{ort}_1)$ à suspension su $\psi\colon (I^{r+1}, \mathrm{Fr}\, I^{r+1}) \to (S^{n+1}, \mathrm{ort}_1)$, homotope à un sphéroïde constant, est lui-même homotope à un sphéroïde constant.

Soit $\Phi\colon (I^{r+1} \times I, \mathrm{Fr}\, I^{r+1} \times I) \to (S^{n+1}, \mathrm{ort}_1)$ une homotopie qui joint su ψ à un sphéroïde constant. Triangulons la sphère S^{n+1} de manière à ce que l'équateur S^n soit son sous-espace au sens simplicial, le point ort_1 soit un sommet, tandis que les points ort_{n+2}, $-\mathrm{ort}_{n+2}$ soient des points intérieurs de certains simplexes de dimension $n+1$. Prenons ensuite une triangulation rectiligne du cube $I^{r+1} \times I = I^r \times I \times I$ telle que l'ensemble $I^r \times (1/2) \times 0$ soit un sous-espace au sens simplicial et l'application Φ soit une application simpliciale. Si Φ_1 est son approximation simpliciale, alors $\Phi_1(I^r \times (1/2) \times 0) \subset S^n$ et la formule $\psi_1(y) = \Phi_1(y, 1/2, 0)$ détermine un sphéroïde $\psi_1\colon (I^r, \mathrm{Fr}\, I^r) \to (S^n, \mathrm{ort}_1)$ homotope à ψ. Envisageons l'application perm: $I^{r+2} \to I^{r+2}$ définie par la formule

$$\mathrm{perm}\,(t_1, \ldots, t_{r+2}) = (t_1, \ldots, t_r, t_{r+2}, t_{r+1}).$$

Les ensembles $K = \mathrm{perm}\,(\Phi_1^{-1}(\mathrm{ort}_{n+2}))$, $L = \mathrm{perm}\,(\Phi_1^{-1}(-\mathrm{ort}_{n+2}))$ vérifient évidemment les hypothèses du lemme *3* pour $m = r+2$, $k = l = r-n+1$. Soit $G\colon I^{r+2} \times I \to I^{r+2}$ une homotopie constituée des homéomorphismes inverses des homéomorphismes qui constituaient l'homotopie F dans le lemme *3*, et soit $\rho\colon S^{n+1} \setminus (\mathrm{ort}_{n+2} \cup (-\mathrm{ort}_{n+2})) \to S^n$ une rétraction. Une vérifi-

cation immédiate montre que la formule

$$(y, t) \mapsto \rho(\Phi_1 \circ \mathrm{perm} \circ G(y, t, 1/2), 1)$$

(où $(y, t, 1/2) \in I^{r+2} = I^r \times I \times I$) détermine une homotopie $I^r \times I \to S^n$ qui joint ψ_1 à un sphéroïde constant.

Les séries $\{\pi_{n+k}(S^n, \mathrm{ort}_1)\}$

5. D'après le résultat principal du théorème *4*, chacune des séries

$$\ldots \pi_r(S^n, \mathrm{ort}_1) \xrightarrow{\mathrm{su}} \pi_{r+1}(S^{n+1}, \mathrm{ort}_1) \xrightarrow{\mathrm{su}} \pi_{r+2}(S^{n+2}, \mathrm{ort}_1) \xrightarrow{\mathrm{su}} \ldots,$$

en lesquelles la suspension décompose les groupes d'homotopie des sphères, se stabilise. Plus exactement, dans la k-série $\{\pi_{n+k}(S^n, \mathrm{ort}_1)\}$ les groupes $\pi_{n+k}(S^n, \mathrm{ort}_1)$ pour $n \geqslant k+2$ sont liés par l'isomorphisme composé induit par la suspension. Cet isomorphisme canonique permet d'identifier les groupes $\pi_{n+k}(S^n, \mathrm{ort}_1)$ pour $n \geqslant k+2$ à un seul groupe. Ce dernier s'appelle *groupe stable de la suite* $\{\pi_{n+k}(S^n, \mathrm{ort}_1)\}$; on le désigne par Stab (k).

2. Groupes d'homotopie des sphères dans les cas les plus simples

1. Les groupes $\pi_r(S^n)$, $r < n$, *sont triviaux. En particulier,* Stab $(k) = 0$ *lorsque* $k < 0$.

L'assertion découle de 2.3.2.2. et de 1.3.8.

Groupe d'homotopie du cercle

2. Les groupes $\pi_r(S^1)$, $r > 1$, *sont triviaux, tandis que* $\pi_1(S^1, \mathrm{ort}_1)$ *est le groupe des entiers à générateur* sph_1.

Pour la démonstration, nous nous servirons du revêtement $(\mathsf{R}, \mathrm{hel}, S^1)$ (voir 4.1.2.6). Remarquons d'abord que $\mathrm{hel}(0) = \mathrm{ort}_1$ et $\mathrm{hel}^{-1}(\mathrm{ort}_1) = \mathsf{Z}$. Puisque la droite R est contractile, ses groupes d'homotopie sont triviaux, d'où l'on peut déjà tirer, conformément à 1.8.12, que les groupes $\pi_r(S^1, \mathrm{ort}_1)$, $r > 1$, sont triviaux, tandis que l'application $\Delta : \pi_1(S^1, \mathrm{ort}_1) \to \pi_0(\mathsf{Z}, 0) = \mathsf{Z}$ est bijective. En outre, $(\mathsf{R}, \mathrm{hel}, S^1)$ est dans un sens évident un fibré principal à groupe structural Z d'où l'on tire que Δ est un homomorphisme de groupe (voir 1.9.15). Ainsi Δ est un isomorphisme de groupe et il ne reste qu'à remarquer que $\Delta(\mathrm{sph}_1) = -1$.

3. Dans la démonstration que nous venons d'exposer le calcul des groupes d'homotopie du cercle est une application ultrarapide de la théorie générale au revêtement $(\mathsf{R}, \mathrm{hel}, S^1)$. Une telle approche

est naturelle, étant donné que la théorie générale a déjà été construite ; néanmoins elle cache le fait important que le calcul direct est très simple. Comme le groupe fondamental occupe une position privilégiée dans la théorie, aussi bien historiquement qu'intrinsèquement, nous voudrions nous arrêter sur la démonstration élémentaire de l'égalité $\pi_1(S^1, \mathrm{ort}_1) = \mathsf{Z}$, en mettant accent sur les deux faits de la théorie générale qui sont réellement nécessaires ici : 1° chaque chemin de S^1 d'origine ort_1 admet un chemin d'origine 0 dans R qui le recouvre ; 2° deux chemins de R d'origine 0 qui recouvrent des chemins homotopes ont une extrémité commune (voir 6.2.1).

Considérons pour cela les degrés du lacet fondamental $IS : I \to S^1$ (avec l'ordre de multiplication naturel), et désignons par u_n ($n \in \mathsf{Z}$) le degré n-ième de IS. Introduisons les chemins $\widetilde{u}_n : I \to \mathsf{R}$ d'origine 0 qui recouvrent les lacets u_n. Il est clair que $\widetilde{u}_n(1) = n$, d'où l'on tire que les lacets u_n sont deux à deux non homotopes. En outre, quel que soit le lacet $u : I \to S^1$ d'origine ort_1, le chemin $\widetilde{u} : I \to \mathsf{R}$ d'origine 0 qui le recouvre nous amène à un point à coordonnée entière, d'où l'on tire qu'il est homotope à un des chemins $\widetilde{u}_n$, tandis que le lacet u est homotope à un des lacets u_n. Mais cela signifie que les classes des lacets u_n, i. e. les classes $(\mathrm{sph}_1)^n$ pour $n \in \mathsf{Z}$, sont deux à deux distinctes et constituent à elles seules le groupe $\pi_1(S^1, \mathrm{ort}_1)$ tout entier.

Conséquences

4. Le couple (D^2, S^1) *est simple, les groupes d'homotopie* $\pi_r(D^2, S^1)$, $r \neq 2$, *sont triviaux,* $\pi_2(D^2, S^1, \mathrm{ort}_1)$ *est isomorphe au groupe des nombres entiers à générateur* kug_2.

Tout ceci découle du théorème *2* et du fait que le disque D^2 est contractile, d'où l'on tire que l'homomorphisme $\partial : \pi_r(D^2, S^1, \mathrm{ort}_1) \to \pi_{r-1}(S^1, \mathrm{ort}_1)$ est un isomorphisme, quel que soit $r \geqslant 1$ (voir 1.6.5).

5. Il découle de *1* et *2* que toutes les sphères S^n, $n \geqslant 1$, sont des espaces simples. De même, il découle de *1* et *4* que tous les couples (D^n, S^{n-1}), $n \geqslant 2$, sont des couples simples.

En particulier, quel que soit le point $y \in S^n$, $n \geqslant 1$, le groupe $\pi_n(S^n, y)$ peut être identifié à $\pi_n(S^n, \mathrm{ort}_1)$; quel que soit le point $y \in S^{n-1}$, $n \geqslant 2$, le groupe $\pi_n(D^n, S^{n-1}, y)$ peut être identifié à $\pi_n(D^n, S^{n-1}, \mathrm{ort}_1)$. Par conséquent, pour $r \geqslant 1$, une application continue f de la sphère S^r dans un espace topologique X détermine un élément du groupe $\pi_r(X, x)$ (pour chaque point x de $f(S^r)$ et non seulement pour $x = f(\mathrm{ort}_1)$) ; de même, pour $r \geqslant 2$, une application continue f du couple (D^r, S^{r-1}) dans le couple topologique (X, A) définit un élément du groupe $\pi_r(X, A, x)$ pour chaque point $x \in f(S^{r-1})$ et non seulement pour $x = f(\mathrm{ort}_1)$.

Les groupes π_n (S^n)

6. Quels que soient $n \geqslant 1$, *la suspension* su: π_n $(S^n, \mathrm{ort}_1) \to \pi_{n+1}$ $(S^{n+1}, \mathrm{ort}_1)$ *est un isomorphisme qui envoie* sph_n *dans* sph_{n+1}.

Démonstration. Le théorème 1.4 affirme directement que su: π_n $(S^n, \mathrm{ort}_1) \to \pi_{n+1}$ $(S^{n+1}, \mathrm{ort}_1)$ est un isomorphisme pour $n \geqslant 2$ et un épimorphisme pour $n = 1$. Le fait que cet épimorphisme est également un isomorphisme peut être déduit des propriétés homotopiques des fibrés de Hopf (S^3, pr, S^2) (voir 4.6.1.4): la partie de sa suite homotopique

$$\pi_2 (S^3) = 0 \to \pi_2 (S^2) \to \pi_1 (S^1) \to \pi_1 (S^3) = 0$$

(voir *1*) montre que $\pi_2 (S^2) \cong \pi_1 (S^1)$ et ceci signifie que su: $\pi_1 (S^1, \mathrm{ort}_1) \to \pi_2 (S^2, \mathrm{ort}_1)$ ne peut avoir de noyau non trivial puisque $\pi_1 (S^1) = \mathbf{Z}$ (voir *2*). Le fait que su $(\mathrm{sph}_n) = \mathrm{sph}_{n+1}$ est évident.

7. Si $n \geqslant 1$, *alors* π_n (S^n, ort_1) *est un groupe abélien libre à générateur* sph_n. *En particulier*, Stab $(0) = \mathbf{Z}$.

Pour $n = 1$ ce théorème répète une partie du théorème *2*, pour $n > 1$ il découle de *2* et de *6*.

8 (Corollaire). *Si* $n \geqslant 2$, *alors* π_n $(D^n, S^{n-1}, \mathrm{ort}_1)$ *est un groupe abélien libre à générateur* kug_n.

9. Pour $n \geqslant 1$, le théorème *7* établit un isomorphisme canonique $\pi_n (S^n) \to \mathbf{Z}$ et, en particulier, fait correspondre à chaque application continue f: $S^n \to S^n$ un nombre entier. Il est facile de vérifier que ce dernier n'est autre chose que le degré deg f défini au p. 4.6.5. Ceci découle des trois faits évidents: deg (su f) = deg f; la classe k sph_1 est représentée par le sphéroïde hel_k (voir 4.1.2.6); deg $(\mathrm{hel}_k) = k$.

Exactement de même, pour $n \geqslant 2$, le théorème *8* établit un isomorphisme canonique π_n $(D^n, S^{n-1}) \to \mathbf{Z}$ et, en particulier, fait correspondre à chaque application continue f: $(D^n, S^{n-1}) \to (D^n, S^{n-1})$ un nombre entier qui coïncide avec le degré deg f défini au p. 4.6.5.

Information supplémentaire donnée par les fibrés de Hopf

10. Pour $r \geqslant 3$, *l'homomorphisme* pr_*: $\pi_r (S^3) \to \pi_r (S^2)$ *induit par l'application de Hopf* pr: $S^3 \to S^2$ *est un isomorphisme. En particulier, le groupe* $\pi_3 (S^2)$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathbf{Z}$; *il est engendré par la classe* $\mathrm{pr}_* (\mathrm{sph}_3)$, *i. e. par la classe de l'application de Hopf elle-même.*

On s'en convainc en considérant le fragment

$$\pi_r (S^1) = 0 \to \pi_r (S^3) \to \pi_r (S^2) \to \pi_{r-1} (S^1) = 0$$

de la suite homotopique du fibré de Hopf (S^3, pr, S^2).

11. Pour tout $r \geqslant 1$, *l'homomorphisme* $\mathrm{pr}_* : \pi_r(S^7) \to \pi_r(S^4)$ *induit par l'application de Hopf* $\mathrm{pr} : S^7 \to S^4$ *est un isomorphisme du groupe* $\pi_r(S^7)$ *sur un sous-groupe du groupe* $\pi_r(S^4)$ *qui possède un complémentaire direct isomorphe à* $\pi_{r-1}(S^3)$. *En particulier,* $\pi_7(S^4) \cong \cong \mathbf{Z} \oplus \pi_6(S^3)$.

Ceci découle du théorème 1.8.10 appliqué au fibré de Hopf (S^7, pr, S^4).

12. Pour tout $r \geqslant 1$, *l'homomorphisme* $\mathrm{pr}_* : \pi_r(S^{15}) \to \pi_r(S^8)$ *induit par l'application de Hopf* $\mathrm{pr} : S^{15} \to S^8$ *est un isomorphisme du groupe* $\pi_r(S^{15})$ *sur un sous-groupe du groupe* $\pi_r(S^8)$ *possédant un complémentaire direct isomorphe à* $\pi_{r-1}(S^7)$. *En particulier,* $\pi_{15}(S^8) \cong \cong \mathbf{Z} \oplus \pi_{14}(S^7)$.

Ceci découle du théorème 1.8.10 si on l'applique au fibré de Hopf $(S^{15}, \mathrm{pr}, S^8)$.

13. Les applications composées

$$\pi_{r-1}(S^1) \xrightarrow{\mathrm{su}} \pi_r(S^2) \xrightarrow{\Delta} \pi_{r-1}(S^1),$$
$$\pi_{r-1}(S^3) \xrightarrow{\mathrm{su}} \pi_r(S^4) \xrightarrow{\Delta} \pi_{r-1}(S^3),$$
$$\pi_{r-1}(S^7) \xrightarrow{\mathrm{su}} \pi_r(S^8) \xrightarrow{\Delta} \pi_{r-1}(S^7),$$

où les homomorphismes Δ *correspondent aux fibrés de Hopf, coïncident pour chaque* $r \geqslant 1$ *avec* $\mathrm{id}\,\pi_{r-1}(S^1)$, $\mathrm{id}\,\pi_{r-1}(S^3)$, $\mathrm{id}\,\pi_{r-1}(S^7)$ *respectivement.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit q un des nombres 2, 4, 8; envisageons l'application $D^q \to S^{2q-1}$ déterminée par la formule

$$(x_1, \ldots, x_q) \mapsto (x_1, \ldots, x_q, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_q^2}, 0, \ldots, 0).$$

Sa restriction à S^{q-1} est évidemment l'inclusion $S^{q-1} \to S^{2q-1}$, tandis que sa composée avec l'application de Hopf $\mathrm{pr} : S^{2q-1} \to S^q$ est l'application $DS : D^q \to S^q$; par conséquent, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_r(S^{2q-1}, S^{q-1}) \arrow[dl, "\mathrm{rel}\,\mathrm{pr}_*"'] \arrow[dr, "\partial"] & \\
\pi_r(S^q) & & \pi_r(S^{q-1}) \\
 & \pi_r(D^q, S^{q-1}) \arrow[ul, "\mathrm{rel}\,DS_*"] \arrow[ur, "\partial"'] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel l'homomorphisme vertical est induit par la relativisation de l'application $D^q \to S^{2q-1}$ indiquée, est commutatif. En outre, rel pr_* et l'homomorphisme ∂ inférieur sont des isomorphismes (voir 1.8.1 et 1.6.5) et il découle de cette commutativité que l'homomor-

phisme composé

$$\pi_{r-1}(S^{q-1}) \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_r(D^q, S^{q-1}) \xrightarrow{\text{rel } DS_*} \pi_r(S^q) \xrightarrow{(\text{rel pr}_*)^{-1}}$$
$$\xrightarrow{(\text{rel pr}_*)^{-1}} \pi_r(S^{2q-1}, S^{q-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_{r-1}(S^{q-1})$$

coïncide avec id $\pi_r(S^q)$. Il ne reste qu'à remarquer que la composée des deux premiers homomorphismes est su (voir 1.2) et la composée des deux derniers est Δ (voir 1.8.4).

14. Il découle de *13* et 1.8.7 que les homomorphismes su: $\pi_5(S^3) \to \pi_6(S^4)$ et su: $\pi_{13}(S^7) \to \pi_{14}(S^8)$ sont des isomorphismes, i. e. que les séries $\{\pi_{n+2}(S^n)\}$ et $\{\pi_{n+6}(S^n)\}$ (de même que la série $\{\pi_n(S^n)\}$) deviennent stables au moins une étape plus tôt que le garantit le théorème 1.4.

3. Composition

1. Soit X un espace à point de base x_0. Pour des sphéroïdes quelconques

$$\varphi \in \mathrm{Sph}_p^{\bullet}(X, x_0), \quad \psi \in \mathrm{Sph}_q^{\bullet}(S^p, \mathrm{ort}_1)$$

la composée $\varphi \circ \psi$: $(S^q, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$ est un sphéroïde appartenant à $\mathrm{Sph}_q^{\bullet}(X, x_0)$; la classe d'homotopie de ce dernier se détermine par celles des sphéroïdes φ, ψ. Ainsi pour des classes $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$, $\beta \in \pi_q(S^p)$ quelconques on peut définir leur *composition* $\alpha \circ \beta \in \pi_q(X, x_0)$. Définition équivalente: $\alpha \circ \beta$ est $\varphi_*(\beta)$, où φ est un sphéroïde de classe α.

On voit que:

si $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$, alors $\alpha \circ \mathrm{sph}_p = \alpha$;

si $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$, $\beta \in \pi_q(S^p)$, $\gamma \in \pi_r(S^q)$, alors $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$;

si $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$, $\beta \in \pi_q(S^p)$, alors $f_*(\alpha \circ \beta) = (f_*(\alpha)) \circ \beta$ quelle que soit l'application continue f de l'espace X dans un autre espace;

si $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$, $\beta \in \pi_q(S^p)$, alors $\mathrm{su}(\alpha \circ \beta) = \mathrm{su}\,\alpha \circ \mathrm{su}\,\beta$.

Il est clair également que si $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$ et $\beta_1, \beta_2 \in \pi_q(S^p)$, alors $\alpha \circ (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \circ \beta_1 + \alpha \circ \beta_2$ (en particulier, $\alpha \circ k\,\mathrm{sph}_p = k\alpha$ quels que soient $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$, $k \in \mathbf{Z}$). On appelle généralement cette propriété *distributivité à droite*, contrairement à la *distributivité à gauche* qui consiste en ce que $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_p(X, x_0)$ et $\beta \in \pi_q(S^p)$ impliquent $(\alpha_1 + \alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta$. La distributivité à gauche n'a pas toujours lieu; voir *2* et *5*, ainsi que 9.1.

2. Quels que soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_p(X, x_0)$, $\beta \in \pi_{q-1}(S^{p-1})$ *on a*

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \circ \mathrm{su}\,\beta = \alpha_1 \circ \mathrm{su}\,\beta + \alpha_2 \circ \mathrm{su}\,\beta. \tag{1}$$

En particulier, quels que soient $\beta \in \pi_{q-1}(S^{p-1})$ *et un entier* k, *on a*

$$(k\,\mathrm{sph}_p) \circ \mathrm{su}\,\beta = k\,\mathrm{su}\,\beta.$$

Démonstration. Fixons les sphéroïdes $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Sph}_p^\circ(X, x_0)$ et $\psi \in \mathrm{Sph}_{q-1}^\circ(S^{p-1}, \mathrm{ort}_1)$ qui représentent α_1, α_2 et β et désignons les projections $\mathrm{pr}: S^{p-1} \times I \to \mathrm{su}(S^{p-1}, \mathrm{ort}_1) = S^p$, $\mathrm{pr}: S^{q-1} \times I \to \mathrm{su}(S^{q-1}, \mathrm{ort}_1) = S^q$ par p_1, p_2. Conformément à la définition (voir 1.10.2), la classe $\alpha_1 + \alpha_2$ est représentée par le sphéroïde

$$p_1(x, t) \mapsto \begin{cases} \varphi_1 \circ p_1(x, 2t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \varphi_2 \circ p_1(x, 2t-1) & \text{pour} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

et la classe su β par le sphéroïde $p_2(x, t) \mapsto p_1(\psi(x), t)$ (voir 1.1), d'où l'on tire que les deux membres de l'égalité (1) sont représentés par le sphéroïde

$$p_2(x, t) \mapsto \begin{cases} \varphi_1 \circ p_1(\psi(x), 2t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \varphi_2 \circ p_1(\psi(x), 2t-1) & \text{pour} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

L'anneau Stab

3 (Lemme). *Soient k, l des entiers non négatifs et n un entier naturel. Si $\alpha \in \pi_{n+k}(S^n)$, $\beta \in \pi_{n+l}(S^n)$, alors*

$$\mathrm{su}^n\alpha \circ \mathrm{su}^{n+k}\beta = (-1)^{kl}\, \mathrm{su}^n\beta \circ \mathrm{su}^{n+l}\alpha.$$

Démonstration. Fixons deux sphéroïdes $\varphi \in \mathrm{Sph}_{n+k}^\circ(S^n, \mathrm{ort}_1)$, $\psi \in \mathrm{Sph}_{n+l}^\circ(S^n, \mathrm{ort}_1)$ de classes α, β et pour des nombres entiers non négatifs p, q désignons par $\mathrm{perm}(p, q)$ un autohoméomorphisme de la sphère S^{p+q} représentée comme $(S^1, \mathrm{ort}_1) \otimes \ldots \otimes (S^1, \mathrm{ort}_1)$ voir (1.2.8.9), qui change de place les facteurs d'après la règle $(1, \ldots, p+q) \to (p+1, \ldots, p+q, 1, \ldots, p)$. Une vérification immédiate montre que les composées

$$\mathrm{su}^n\varphi \circ \mathrm{perm}(n, n+k) \circ \mathrm{su}^{n+k}\psi \circ \mathrm{perm}(n+k, n+l): S^{2n+k+l} \to S^n,$$

$$\mathrm{perm}(n, n) \circ \mathrm{su}^n\varphi \circ \mathrm{perm}(n, n+l) \circ \mathrm{su}^{n+l}\psi: S^{2n+k+l} \to S^n$$

coïncident ; comme $\deg \mathrm{perm}(p, q) = (-1)^{pq}$, il en découle que

$$\mathrm{su}^n\alpha \circ [(-1)^{n(n+k)}\mathrm{sph}_{2n+k}] \circ \mathrm{su}^{n+k}\beta \circ [(-1)^{(n+k)(n+l)}\mathrm{sph}_{2n+k+l}] =$$
$$= [(-1)^{n^2}\mathrm{sph}_{2n}] \circ \mathrm{su}^n\beta \circ [(-1)^{n(n+l)}\mathrm{sph}_{2n+l}] \circ \mathrm{su}^{n+l}\alpha.$$

En se servant des deux distributivités (à droite et à gauche — voir *1* et *2*), il est facile d'amener cette égalité à la forme

$$(-1)^{n(n+k)+(n+k)(n+l)}\mathrm{su}^n\alpha \circ \mathrm{su}^{n+k}\beta = (-1)^{n^2+n(n+l)}\mathrm{su}^n\beta \circ \mathrm{su}^{n+l}\alpha,$$

et il ne reste qu'à remarquer que

$$[n(n+k) + (n+k)(n+l)] - [n^2 + n(n+l)] \equiv kl \bmod 2.$$

4. Posons $\mathrm{Stab} = \oplus_{k=0}^{\infty}\mathrm{Stab}(k)$ et identifions les groupes $\mathrm{Stab}(k)$ avec leurs images par les plongements naturels $\mathrm{Stab}(k) \to$

$\to$ Stab. L'opération $\circ$ munit Stab d'une structure d'anneau : si $\alpha \in \pi_{n+k}(S^n)$, $\beta \in \pi_{n+k+l}(S^{n+k})$, alors su $(\alpha \circ \beta) = \text{su}\,\alpha \circ \text{su}\,\beta$ (voir *1*) et donc l'opération $\circ$ est bien définie : c'est une multiplication distributive des éléments de Stab (k) par les éléments de Stab (l) à valeurs dans Stab $(k + l)$ (voir *1* et *2*) ; on peut la prolonger bidistributivement en une multiplication des éléments de l'ensemble Stab à valeurs dans Stab. Il découle de *1*, *2* et *3* que l'anneau Stab est associatif, possède l'unité $\text{sph} = \text{sph}_1 = \text{sph}_2 = \ldots$ et est anticommutatif en ce sens que si $\alpha \in \text{Stab}\,(k)$, $\beta \in \text{Stab}\,(l)$, alors $\beta \circ \alpha = (-1)^{kl}\alpha \circ \beta$.

Application

5 (Lemme). *La composée* $(-\text{sph}_2) \circ \text{pr}_*(\text{sph}_3)$, *où* pr *est une application de Hopf de la sphère* S^3 *dans* S^2, *coïncide avec* $\text{pr}_*(\text{sph}_3)$.

Ceci découle de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & S^3 \\ \downarrow{\scriptstyle \text{pr}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{pr}} \\ S^2 & \longrightarrow & S^2 \end{array}$$

dans lequel les applications horizontales sont définies par les formules

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, -x_2, x_3, -x_4),$$
$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, -x_2, x_3)$$

et sont des sphéroïdes de classes sph_3, $-\text{sph}_2$.

6. Le groupe Stab (1) *contient au plus deux éléments.*

Puisque le groupe $\pi_4(S^3)$ est déjà stable tandis que su : $\pi_3(S^2) \to \pi_4(S^3)$ est un épimorphisme (voir 1.4), il suffit de montrer que Ker su contient le double de la génératrice $2\,[\text{pr} : S^3 \to S^2]_*(\text{sph}_3)$ du groupe $\pi_3(S^2)$ (voir 2.10).

D é m o n s t r a t i o n : puisque

$$2\,\text{pr}_*(\text{sph}_3) = \text{pr}_*(\text{sph}_3) + \text{pr}_*(\text{sph}_3) =$$
$$= \text{sph}_2 \circ \text{pr}_*(\text{sph}_3) + (-\text{sph}_2) \circ \text{pr}_*(\text{sph}_3)$$

(voir *5*), on a

$$\text{su}\,(2\text{pr}_*(\text{sph}_3)) = \text{sph}_3 \circ \text{su}\,(\text{pr}_*(\text{sph}_3)) +$$
$$+ (-\text{sph}_3) \circ \text{su}\,(\text{pr}_*(\text{sph}_3))$$

(voir *1*) et il ne reste qu'à remarquer que le deuxième membre de la dernière égalité est nul en vertu de *2*.

4. Information: groupes d'homotopie des sphères

1. Pendant une assez longue période, on portait une attention particulière à l'étude et au calcul des groupes d'homotopie des sphères. On espérait résoudre ce problème et pouvoir y réduire d'autres problèmes plus compliqués de la théorie de l'homotopie. Néanmoins, malgré d'importants résultats qui furent obtenus dans ces deux directions, ces espoirs furent quand même déçus: on apprit progressivement que la sphère n'est pas un objet élémentaire du point de vue homotopique, mais plutôt un objet à constituantes multiples. D'autre part, l'information concernant les groupes d'homotopie des sphères trouva des applications inattendues — surtout en topologie différentielle.

Nous exposons ci-dessous une partie (assez peu importante) de cette information : dans *2* il s'agit de faits de caractère général, dans *3* nous donnons quelques tables. Pour une information plus complète (avec renvois aux travaux contenant les démonstrations) voir [7].

2. Parmi les groupes $\pi_r(S^n)$, $r > n$, seuls les groupes $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ pour $m = 1, 2, \ldots$ sont infinis. Chacun de ces groupes est isomorphe à la somme directe $\mathbb{Z} \oplus$ (groupe fini).

Pour un p premier impair, l'ordre du groupe Stab $(2m(p-1)-1)$, $m = 1, 2, \ldots, p-1$, est divisible par p mais n'est pas divisible par p^2; l'ordre du groupe Stab (k) pour $k < 2p(p-1)-1$ n'est pas divisible par p si $k \not\equiv -1 \bmod 2(p-1)$.

3. Parmi les groupes $\pi_r(S^n)$ qui ont été calculés, il y a tous les groupes $\pi_{n+k}(S^n)$ pour $k \leqslant 23$ et tous les groupes Stab (k) pour $k \leqslant 33$. Les groupes $\pi_{n+k}(S^n)$ pour $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant 7$ sont réunis dans la table suivante:

n \ k	1	2	3	4	5	6	7
2	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$
3	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$
4		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_{15}$
5			$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
6				0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$
7					0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120}$
8						$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{120}$
9							$\mathbb{Z}_{240}$

Dans la table ci-dessous, où pr désigne toujours une des applications de Hopf $S^3 \to S^2$, $S^7 \to S^4$, $S^{15} \to S^8$, nous avons indiqué les génératrices des groupes Stab (k) pour $k = 1, \ldots, 7$:

Groupe	Génératrice
$\mathrm{Stab}\,(1) = \pi_4\,(S^3)\ [\cong \mathbf{Z}_2]$	$\mathrm{su}\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_3))$
$\mathrm{Stab}\,(2) = \pi_6\,(S^4)\ [\cong \mathbf{Z}_2]$	$\mathrm{su}^2\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_3)) \circ \mathrm{su}^3\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_3))$
$\mathrm{Stab}\,(3) = \pi_8\,(S^5)\ [\cong \mathbf{Z}_{24}]$	$\mathrm{su}\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_7))$
$\mathrm{Stab}\,(4) = \pi_{10}\,(S^6)\ [=0]$	néant
$\mathrm{Stab}\,(5) = \pi_{12}\,(S^7)\ [=0]$	néant
$\mathrm{Stab}\,(6) = \pi_{14}\,(S^8)\ [\cong \mathbf{Z}_2]$	$\mathrm{su}^4\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_7)) \circ \mathrm{su}^7\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_7))$
$\mathrm{Stab}\,(7) = \pi_{16}\,(S^9)\ [\cong \mathbf{Z}_{240}]$	$\mathrm{su}\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_{15}))$

Notons encore que

$$\mathrm{su}^3\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_3)) \circ \mathrm{su}^4\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_3)) \circ \mathrm{su}^5\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_3)) = \\ = 12\ \mathrm{su}\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_7)),$$

$$\mathrm{su}^7\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_3)) \circ \mathrm{su}^6\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_7)) \circ \mathrm{su}^9\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_7)) = \\ = 120\ \mathrm{su}\,(\mathrm{pr}_*\,(\mathrm{sph}_{15})).$$

Avec la table précédente, ces relations donnent une description complète de la partie $\oplus_{k=1}^{7}$ Stab (k) de l'anneau Stab.

Les groupes Stab (k) pour $k = 8, \ldots, 15$ sont réunis dans la table suivante:

k	Stab (k)	k	Stab (k)
8	$\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$	12	0
9	$\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$	13	$\mathbf{Z}_3$
10	$\mathbf{Z}_2$	14	$\mathbf{Z}_6 \oplus \mathbf{Z}_2$
11	$\mathbf{Z}_{504}$	15	$\mathbf{Z}_{480} \oplus \mathbf{Z}_2$

5. Groupes d'homotopie des espaces projectifs et des lentilles

1. Pour $2 \leqslant n \leqslant \infty$, *le groupe* $\pi_1\,(\mathbf{R}P^n, (1:0:0:\ldots))$ *se compose de deux éléments; il est engendré par la classe du lacet* $\mathrm{rp}: I \to \mathbf{R}P^n$ *défini par la formule* $\mathrm{rp}\,(t) = (\cos \pi t : \sin \pi t : 0 : 0 : \ldots)$; *le groupe d'homotopie* $\pi_r\,(\mathbf{R}P^n, (1:0:0:\ldots))$, *pour* $r \neq 1$, *est isomorphe à* $\pi_r\,(S^n)$ *(en particulier, il est trivial lorsque* $n = \infty$*), l'isomorphisme étant induit par la projection* $S^n \to \mathbf{R}P^n$.

L'espace $\mathsf{R}P^n$ *est simple pour n impair et n'est pas n-simple pour n pair.*

(Le cas $n = 1$ a été déjà considéré dans 2.2.)

Démonstration. Tout ce qui se rapporte aux groupes $\pi_r(\mathsf{R}P^n, (1:0:0:\ldots))$ eux-mêmes découle du théorème 1.8.12 appliqué au revêtement $(S^n, \mathrm{pr}, \mathsf{R}P^n)$. La 1-simplicité de l'espace $\mathsf{R}P^n$ découle de la commutativité de son groupe fondamental. Considérons l'automorphisme

$$T_{\mathrm{rp}}: \pi_r(\mathsf{R}P^n, (1:0:0:\ldots)) \to \pi_r(\mathsf{R}P^n, (1:0:0:\ldots))$$

pour $r \geqslant 2$. Soit $\widetilde{\mathrm{rp}}$ un chemin d'origine ort_1 qui recouvre rp. Il découle de la commutativité (évidente) du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_r(S^n, \mathrm{ort}_1) \arrow[r, "T_{\widetilde{\mathrm{rp}}}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_*"] & \pi_r(S^n, -\mathrm{ort}_1) \arrow[d, "\mathrm{pr}_*"] & \pi_r(S^n, \mathrm{ort}_1) \arrow[l, "(-\mathrm{id}\, S^n)_*"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_*"] \\
\pi_r(\mathsf{R}P^n, (1:0:0:\ldots)) \arrow[r, "T_{\mathrm{rp}}"] & \pi_r(\mathsf{R}P^n, (1:0:0:\ldots)) &
\end{tikzcd}$$

que la transformation T_{rp} est l'identité ou non en même temps que la composée $(-\mathrm{id}\, S^n)_* \circ T_{\widetilde{\mathrm{rp}}}$, qui se réduit après les identifications $\pi_r(S^n, -\mathrm{ort}_1) = \pi_r(S^n, \mathrm{ort}_1) = \pi_r(S^n)$ (voir 2.5) à $(-\mathrm{id}\, S^n)_*$: $\pi_r(S^n) \to \pi_r(S^n)$. Il reste à remarquer que si n est impair, l'application $-\mathrm{id}\, S^n$ est homotope à $\mathrm{id}\, S^n$ de sorte que l'automorphisme $(-\mathrm{id}\, S^n)_*: \pi_r(S^n) \to \pi_r(S^n)$ est l'identité pour r quelconque; lorsque n est pair, on a

$$[(-\mathrm{id}\, S^n)_*: \pi_n(S^n) \to \pi_n(S^n)] = -\mathrm{id}\, \pi_n(S^n).$$

2. *Pour* $1 \leqslant n \leqslant \infty$, *le groupe* $\pi_2(\mathsf{C}P^n, (1:0:0:\ldots))$ *est isomorphe à* Z; *il est engendré par la classe du sphéroïde* $\mathrm{in}: S^2 = \mathsf{C}P^1 \to \mathsf{C}P^n$ *tandis que le groupe d'homotopie* $\pi_r(\mathsf{C}P^n, (1:0:0:\ldots))$ *pour* $r \neq 2$ *est isomorphe à* $\pi_r(S^{2n+1})$ *(en particulier, il est trivial lorsque* $n = \infty$*), l'isomorphisme étant induit par la projection* $S^{2n+1} \to \mathsf{C}P^n$.

(Pour $n = 1$ ce théorème répète le théorème 2.10.)

Il y a ici deux assertions: d'abord on affirme que

$$\mathrm{in}_*: \pi_2(\mathsf{C}P^1, (1:0:0:\ldots)) \to \pi_2(\mathsf{C}P^n, (1:0:0:\ldots))$$

est un isomorphisme et ensuite que

$$\mathrm{pr}_*: \pi_r(S^{2n+1}, \mathrm{ort}_1) \to \pi_r(\mathsf{C}P^n, (1:0:0:\ldots)),$$

$r \neq 2$, est un isomorphisme. La première découle du fait que le couple $(\mathsf{C}P^n, \mathsf{C}P^1)$ est 3-connexe (voir 2.3.2.2 et 2.1.3.5), la deuxième s'obtient de la suite homotopique du fibré $(S^{2n+1}, \mathrm{pr}, \mathsf{C}P^n)$ et du théorème 2.2.

3. Pour $1 \leqslant n \leqslant \infty$ *et* $r \geqslant 1$ *l'homomorphisme induit par la projection* $S^{4n+3} \to \mathsf{H}P^n$ *est un isomorphisme du groupe* $\pi_r(S^{4n+3})$ *sur un sous-groupe du groupe* $\pi_r(\mathsf{H}P^n, (1:0:0:\ldots))$ *qui possède un complémentaire direct isomorphe à* $\pi_{r-1}(S^3)$. *En particulier, pour* $r \geqslant 1$, *le groupe* $\pi_r(\mathsf{H}P^\infty, (1:0:0:\ \ldots))$ *est isomorphe à* $\pi_{r-1}(S^3)$.

(Pour $r = 1$ ce théorème répète le théorème 2.11.)

La démonstration s'appuie sur le théorème 1.8.10 appliqué au fibré $(S^{4n+3}, \mathrm{pr}, \mathsf{H}P^n)$.

4. Les lentilles $L(m; l_1, \ldots, l_n)$ *et* $L(m; l_1, l_2, \ldots)$ *sont simples. Les groupes* $\pi_1(L(m; l_1, \ldots, l_n))$ *et* $\pi_1(L(m; l_1, l_2, \ldots))$ *sont isomorphes à* Z_m. *Les groupes* $\pi_r(L(m; l_1, \ldots, l_n))$ *pour* $r \geqslant 2$ *sont isomorphes à* $\pi_r(S^{2n-1})$, *l'isomorphisme étant induit par la projection* $S^{2n-1} \to L(m; l_1, \ldots, l_n)$. *Les groupes* $\pi_r(L(m; l_1, l_2, \ldots))$ *pour* $r \geqslant 2$ *sont triviaux.*

La démonstration est une généralisation évidente du début de la démonstration du théorème *1*.

6. Groupes d'homotopie des groupes classiques

1. L'homomorphisme d'inclusion $\pi_r(SO(n)) \to \pi_r(SO(n+1))$ *est un isomorphisme pour* $r \leqslant n-2$ *et un épimorphisme pour* $r = n-1$. *Le groupe* $\pi_1(SO(n))$ *est isomorphe à* Z *pour* $n = 2$ *et à* Z_2 *pour* $n \geqslant 3$; *il est engendré par la classe de l'inclusion* $S^1 = SO(2) \to SO(n)$. *Le groupe* $\pi_2(SO(n))$ *est trivial pour tout* n. *Le groupe* $\pi_3(SO(n))$ *est trivial pour* $n \leqslant 2$, *isomorphe à* Z *pour* $n = 3$, *isomorphe à* $\mathsf{Z} \oplus \mathsf{Z}$ *pour* $n = 4$ *et isomorphe au groupe quotient du groupe* $\mathsf{Z} \oplus \mathsf{Z}$ *par un sous-groupe abélien libre pour* $n \geqslant 5$.

Démonstration. La trivialité des groupes $\pi_2(SO(2))$, $\pi_3(SO(2))$, $\pi_2(SO(3))$, $\pi_2(SO(4))$ et les isomorphismes

$$\pi_1(SO(2)) \cong \mathsf{Z}, \quad \pi_1(SO(3)) \cong \mathsf{Z}_2,$$
$$\pi_3(SO(3)) \cong \mathsf{Z}, \quad \pi_3(SO(4)) \cong \mathsf{Z} \oplus \mathsf{Z}$$

sont des conséquences des égalités

$$SO(2) = S^1, \quad SO(3) = \mathsf{R}P^3, \quad SO(4) = \mathsf{R}P^3 \times S^3$$

(voir 3.2.1.2, 3.2.3.1, 3.2.3.3) et des théorèmes 2.2, 2.7, 5.1. Le reste s'obtient de la suite homotopique du fibré $(SO(n+1), \mathrm{pr}, S^n)$ décrit dans 4.6.1.4 à point de base $\mathrm{id} \in SO(n+1)$.

2. L'homomorphisme d'inclusion $\pi_r(U(n)) \to \pi_r(U(n+1))$ *est un isomorphisme pour* $r \leqslant 2n-1$ *et un épimorphisme pour* $r = 2n$. *Pour* $n \geqslant 1$, *le groupe* $\pi_1(U(n))$ *est isomorphe à* Z; *il est engendré par la classe de l'inclusion* $S^1 = U(1) \to U(n)$. *Le groupe* $\pi_2(U(n))$ *est trivial pour tout* n. *Le groupe* $\pi_3(U(1))$ *est trivial et le groupe* $\pi_3(U(n))$ *isomorphe à* Z *pour* $n \geqslant 2$. *L'homomorphisme d'inclusion* $\pi_1(U(n)) \to \pi_1(SO(2n))$ *est un épimorphisme quel que soit* n.

Ceci s'obtient des égalités

$$[\text{in}: U(1) \to SO(2)] = \text{id}, \quad U(2) = S^1 \times S^3$$

et de la suite homotopique du fibré $(U(n+1), \text{pr}, S^{2n+1})$ décrit dans 4.6.1.4 à point de base id $\in U(n+1)$.

3. L'homomorphisme d'inclusion $\pi_r(Sp(n)) \to \pi_r(Sp(n+1))$ *est un isomorphisme pour* $r \leqslant 4n+1$ *et un épimorphisme pour* $r = 4n+2$. *En particulier, pour* $r \leqslant 5$ *et tout* $n \geqslant 1$, *le groupe* $\pi_r(Sp(n))$ *est isomorphe à* $\pi_r(Sp(1) = S^3)$.

Ceci découle de la suite homotopique du fibré $(Sp(n+1), \text{pr}, S^{4n+3})$ décrit dans 4.6.1.4 à point de base id $\in Sp(n+1)$.

Stabilisation

4. Les théorèmes *1* à *3* montrent que pour tout $r \geqslant 1$ les séries de groupes

$$\pi_r(SO(1)) \to \pi_r(SO(2)) \to \pi_r(SO(3)) \to \ldots,$$
$$\pi_r(U(1)) \to \pi_r(U(2)) \to \pi_r(U(3)) \to \ldots,$$
$$\pi_r(Sp(1)) \to \pi_r(Sp(2)) \to \pi_r(Sp(3)) \to \ldots$$

se stabilisent: la première en commençant par $\pi_r(SO(r+2))$, la deuxième à partir de $\pi_r(U([(r+2)/2]))$ et la troisième à partir de $\pi_r(Sp([(r+2)/4]))$. Les groupes $\pi_r(SO(n))$ pour $n \geqslant r+2$, $\pi_r(U(n))$ pour $n \geqslant [(r+2)/2]$ et $\pi_r(Sp(n))$ pour $n \geqslant [(r+2)/4]$ sont dits *stables*; on les désigne par $\pi_r(SO)$, $\pi_r(U)$ et $\pi_r(Sp)$. Conformément au théorème *1*, $\pi_1(SO) \cong \mathbf{Z}$, $\pi_2(SO) = 0$, $\pi_3(SO) \cong (\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z})/(\text{un sous-groupe cyclique})$. D'après le théorème *2*, $\pi_1(U) \cong \mathbf{Z}$, $\pi_2(U) = 0$, $\pi_3(U) \cong \mathbf{Z}$. D'après le théorème *3*, $\pi_1(Sp) = 0$, $\pi_2(Sp) = 0$, $\pi_3(Sp) \cong \mathbf{Z}$.

Les notations $\pi_r(SO)$, $\pi_r(U)$, $\pi_r(Sp)$ ont également leur signification directe: ce sont les groupes d'homotopie de dimension r usuels des espaces limites $SO = \lim SO(n)$, $U = \lim U(n)$, $Sp = \lim Sp(n)$ (voir 1.11.2).

Information

5. Les groupes $\pi_r(SO)$, $\pi_r(U)$, $\pi_r(Sp)$ ont été entièrement calculés. A savoir, pour $r \geqslant 1$ on a les isomorphismes canoniques

$$\pi_r(SO) \to \pi_{r+8}(SO), \quad \pi_r(Sp) \to \pi_{r+8}(Sp), \quad \pi_r(U) \to \pi_{r+2}(U);$$

les huit premiers groupes d'homotopie des espaces SO et Sp et les deux premiers de l'espace U sont donnés par les tables suivantes:

r	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_r(SO)$	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}$	0	0	0	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$
$\pi_r(Sp)$	0	0	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}$	0

r	1	2
$\pi_r(U)$	$\mathbf{Z}$	0

On trouvera la démonstration dans [17].

De nombreux groupes d'homotopie non stables des variétés $SO(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ sont également connus; par exemple, $\pi_{2n}(U(n)) \cong \mathbf{Z}_{n!}$, $\pi_{4n+2}(Sp(n)) \cong \mathbf{Z}_{(2n+1)!}$ pour n pair, $\pi_{4n+2}(Sp(n)) \cong \mathbf{Z}_{2[(2n+1)!]}$ pour n impair. Pour les détails et les démonstrations voir [7].

7. Groupes d'homotopie des variétés et des espaces de Stiefel

1 (Lemme). *Pour $k < n$, la variété $V(n, k)$ est simple; l'homomorphisme d'inclusion*

$$\pi_r(V(n, k)) \to \pi_r(V(n+1, k+1))$$

est un isomorphisme pour $r < n - 1$ et un épimorphisme pour $r = n - 1$; il est un isomorphisme également pour $r = n - 1$ lorsque n est impair et $k = 1$.

Toutes les variétés $\mathbf{C}V(n, k)$ et $\mathbf{H}V(n, k)$ sont simples. L'homomorphisme d'inclusion

$$\pi_r(\mathbf{C}V(n, k)) \to \pi_r(\mathbf{C}V(n+1, k+1))$$

est un isomorphisme pour $r < 2n$ et un épimorphisme pour $r = 2n$. L'homomorphisme d'inclusion

$$\pi_r(\mathbf{H}V(n, k)) \to \pi_r(\mathbf{H}V(n+1, k+1))$$

est un isomorphisme pour $r < 4n + 2$ et un épimorphisme pour $r = 4n + 2$.

La simplicité découle du fait que

$$V(n, k) = SO(n)/SO(n-k), \quad \mathbf{C}V(n, k) = U(n)/U(n-k),$$
$$\mathbf{H}V(n, k) = Sp(n)/Sp(n-k)$$

(voir 4.2.3.12 et 1.9.7). Le reste s'obtient des suites homotopiques des fibrés

$$(V(n+1, k+1), \text{pr}, S^n), \quad (\mathbf{C}V(n+1, k+1), \text{pr}, S^{2n+1}),$$
$$(\mathbf{H}V(n+1, k+1), \text{pr}, S^{4n+3})$$

décrits dans 4.6.1.4 avec pour points de base les inclusions $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^n$, $\mathbf{H}^k \to \mathbf{H}^n$ respectivement. Dans le cas réel, nous nous servons en plus du fait que pour un n impair le fibré $(V(n+1, 2), \text{pr}, S^n)$ possède une section (voir 3.1.4.7) grâce à quoi, pour n impair et $k = 1$, la première des suites homotopiques indiquées se scinde à droite dans les termes $\pi_r(V(n+1, k+1))$ (voir 1.8.8).

2. Pour $k < n$, la variété $V(n, k)$ est $(n - k - 1)$-connexe. Le groupe $\pi_{n-k}(V(n, k))$ est pour $0 < m < n$ abélien libre et est engendré

par la classe de l'inclusion $S^{n-k} = V(n-k+1, 1) \to V(n, k)$; *il est infini lorsque* $n-k$ *est pair ainsi que dans le cas où* $k = 1$.

Ceci découle du lemme *1* : si $r < n-k$, alors

$$\pi_r(V(n, k)) \cong \pi_r(V(n-1, k-1)) \cong \ldots$$
$$\ldots \cong \pi_r(V(n-k+1, 1)) = \pi_r(S^{n-k}) = 0,$$

tandis que dans la suite

$$\pi_{n-k}(S^{n-k}) = \pi_{n-k}(V(n-k+1, 1)) \to$$
$$\to \pi_{n-k}(V(n-k+2, 2)) \to \ldots \to \pi_{n-k}(V(n, k))$$

toutes les flèches sauf la première figurent des isomorphismes, la première étant un isomorphisme pour $n-k$ pair et un épimorphisme pour $n-k$ impair.

3. La variété $\mathsf{C}V(n, k)$ *est* $2(n-k)$*-connexe. Le groupe* $\pi_{2n-2k+1}(\mathsf{C}V(n, k))$ *est isomorphe à* Z, *il est engendré par la classe de l'inclusion* $S^{2n-2k+1} = \mathsf{C}V(n-k+1, 1) \to \mathsf{C}V(n, k)$.

Ceci découle du lemme *1* : pour $r \leqslant 2n-2k+1$ la suite $\pi_r(S^{2n-2k+1}) = \pi_r(\mathsf{C}V(n-k+1, 1)) \to \pi_r(\mathsf{C}V(n-k+2, 2)) \to \ldots$ $\ldots \to \pi_r(\mathsf{C}V(n, k))$ est constituée d'isomorphismes.

4. La variété $\mathsf{H}V(n, k)$ *est* $(4n-4k+2)$*-connexe. Le groupe* $\pi_{4n-4k+3}(\mathsf{H}V(n, k))$ *est isomorphe à* Z *et engendré par la classe de l'inclusion* $S^{4n-4k+3} = \mathsf{H}V(n-k+1, 1) \to \mathsf{H}V(n, k)$.

Ceci découle du lemme *1* : pour $r \leqslant 4n-4k+3$ (même pour $r \leqslant 4n-4k+5$) la suite

$$\pi_r(S^{4n-4k+3}) = \pi_r(\mathsf{H}V(n-k+1, 1)) \to$$
$$\to \pi_r(\mathsf{H}V(n-k+2, 2)) \to \ldots \to \pi_r(\mathsf{H}V(n, k))$$

est constituée d'isomorphismes.

5. Les espaces $V(\infty, k)$ *et* $\mathsf{C}V(\infty, k)$ (voir 4.5.3.9) *ainsi que l'espace* $\mathsf{H}V(\infty, k) = \lim(\mathsf{H}V(n, k), \text{ in}: \mathsf{H}V(n, k) \to \mathsf{H}V(n+1, k))$ *sont* ∞*-connexes.*

Ceci découle des théorèmes *2*, *3*, *4* et 1.11.2.

8. Groupes d'homotopie des variétés et des espaces de Grassmann

1. Dans ce sous-paragraphe nous réduisons le calcul des groupes d'homotopie les plus importants des variétés de Grassmann $G(n, k)$, $G_+(n, k)$, $\mathsf{C}G(n, k)$, $\mathsf{H}G(n, k)$ et des espaces de Grassmann $G(\infty, k)$, $G_+(\infty, k)$ et $\mathsf{C}G(\infty, k)$ (voir 4.5.3.2) ainsi que des espaces $\mathsf{H}G(\infty, k) = \lim(\mathsf{H}G(n, k), \text{ in}: \mathsf{H}G(n, k) \to \mathsf{H}G(n+1, k))$ au calcul des groupes d'homotopie des groupes classiques correspondants.

Les variétés et les espaces de Grassmann sont considérés ici conjointement, de sorte que n peut prendre la valeur ∞.

2. Pour $k > 0$ et $0 < r < n - k$, le groupe $\pi_r(G_+(n, k))$ est isomorphe à $\pi_{r-1}(SO(k))$ et l'homomorphisme d'inclusion $\pi_r(G_+(n, k)) \to \pi_r(G_+(n', k))$ est un isomorphisme pour tout $n' > n$.

La première assertion s'obtient des théorèmes 7.2, 7.5 et de la suite d'homotopie du fibré $(V(n, k), \mathrm{pr}, G_+(n, k))$ défini dans 4.6.1.4 avec l'inclusion $\mathsf{R}^k \to \mathsf{R}^n$ en guise de point de base. La deuxième découle de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(G_+(n, k)) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{r-1}(SO(k)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{in}_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{in}_*=\mathrm{id}} \\ \pi_r(G_+(n', k)) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{r-1}(SO(k)) \end{array}$$

(voir 1.8.6).

3. Pour $0 < k < n$ et $r \geqslant 2$ le groupe $\pi_r(G(n, k))$ est isomorphe à $\pi_r(G_+(n, k))$. Le groupe $\pi_1(G(n, k))$ est isomorphe à Z si $n = 2$, $k = 1$, et à Z_2 si $0 < k < n$ et $n \geqslant 3$.

L'isomorphisme $\pi_1(G(2, 1)) \cong \mathsf{Z}$ découle du théorème 2.2 puisque la variété $G(2, 1)$ est homéomorphe à S^1. Le reste découle du théorème 1.8.12 appliqué au revêtement canonique à deux feuillets $(G_+(n, k), \mathrm{pr}, G(n, k))$.

4. Pour $0 < r < 2n - 2k + 1$, le groupe $\pi_r(\mathsf{C}G(n, k))$ est isomorphe à $\pi_{r-1}(U(k))$ et l'homomorphisme d'inclusion $\pi_r(\mathsf{C}G(n, k)) \to \pi_r(\mathsf{C}G(n', k))$ est un isomorphisme quel que soit $n' > n$.

La démonstration répète, avec des modifications évidentes, celle du théorème *2*.

5. Pour $0 < r < 4n - 4k + 3$, le groupe $\pi_r(\mathsf{H}G(n, k))$ est isomorphe à $\pi_{r-1}(Sp(k))$ et l'homomorphisme d'inclusion $\pi_r(\mathsf{H}G(n, k)) \to \pi_r(\mathsf{H}G(n', k))$ est un isomorphisme pour tout $n' > n$.

La démonstration, là aussi, répète celle du théorème *2* (avec des modifications évidentes).

9. Exercices

1. Soient $q = 2, 4, 8$ et $\mathrm{pr}: S^{2q-1} \to S^q$ une application de Hopf. Montrer que pour chaque entier k on a

$$(k\,\mathrm{sph}_q) \circ \mathrm{pr}_*(\mathrm{sph}_{2q-1}) = k^2 \mathrm{pr}_*(\mathrm{sph}_{2q-1}).$$

2. Montrer que pour chaque n naturel l'espace $\mathsf{R}P^n$ est $(n+1)$-simple.

3. Montrer que l'espace $G(n, k)$, pour n pair et k impair, est simple.

4. Montrer que l'espace $G(n, 2)$ n'est pas 2-simple lorsque $3 \leqslant n \leqslant \infty$.

5. Montrer que les homomorphismes d'inclusion

$$\pi_r(SO(3)) \to \pi_r(SO(4)), \quad \pi_r(SO(7)) \to \pi_r(SO(8)),$$
$$\pi_r(U(1)) \to \pi_r(U(2)), \quad \pi_r(U(3)) \to \pi_r(U(4)),$$
$$\pi_r(Sp(1)) \to \pi_r(Sp(2))$$

sont des monomorphismes pour chaque entier r.

6. Montrer que l'homomorphisme

$$\pi_{2n-2k+1}(CV(n, k)) \to \pi_{2n-2k+1}(V(2n, 2k-1)),$$

induit par l'application $CV(n, k) \to V(2n, 2k-1)$ qui fait correspondre au repère $(v_1, \ldots, v_k)$ de l'espace C^n le repère $(v_1, iv_1, \ldots, v_{k-1}, iv_{k-1}, v_k)$ de l'espace C^n envisagé comme R^{2n}, envoie le générateur du groupe $\pi_{2n-2k+1}(CV(n, k))$ indiqué dans 7.3 dans le générateur du groupe $\pi_{2n-2k+1}(V(2n, 2k-1))$ de 7.2.

§ 3. GROUPES D'HOMOTOPIE DES ESPACES CELLULAIRES

1. Groupes d'homotopie d'un espace cellulaire unidimensionnel

1. Dans ce sous-paragraphe nous calculons les groupes d'homotopie du bouquet $B = \bigvee_{\mu \in M} (S_\mu = S^1, \mathrm{ort}_1)$ construit à partir d'une famille arbitraire de cercles $\{S_\mu = S^1\}_{\mu \in M}$. Comme toujours, le point de base bp sera le centre du bouquet.

Pour abréger les énoncés, nous désignerons le lacet défini par l'inclusion $\mathrm{imm}_\mu : S^1 \to B$, i. e. le lacet $\mathrm{imm}_\mu \circ IS : I \to B$, par u_μ et sa classe d'homotopie, i. e. la classe $\mathrm{imm}_{\mu *}(\mathrm{sph}_1)$, par α_μ. Les lacets de la forme $(\ldots((v_1 v_2) v_3) \ldots v_{n-1}) v_n$, où chacun des facteurs $v_1, \ldots, v_n$ est un des lacets u_μ ou un des lacets u_μ^{-1} et où les éléments u_μ, u_μ^{-1} ne peuvent pas voisiner pour un même μ, sont appelés *lacets standards*. Le cas $n = 0$ n'est pas exclu : on considère qu'alors le produit est un lacet constant d'origine bp.

2 (Lemme). *Il existe un revêtement* $(\widetilde{B}, p, B)$ *possédant deux propriétés* : (i) *l'espace* $\widetilde{B}$ *est contractile* ; (ii) *les chemins qui recouvrent les lacets standards et prennent leur origine à un point* x_0 *de la fibre* $F_0 = p^{-1}(\mathrm{bp})$ *amènent à des points deux à deux distincts de la fibre* F_0, *et* F_0 *est entièrement contenue dans l'ensemble des extrémités de ces chemins.*

Démonstration. Convenons comme toujours de désigner par $GE(M)$ le groupe libre engendré par l'ensemble M ; munissons $GF(M)$ de la topologie discrète et composons le bouquet $A = \bigvee_{\mu \in M} (D_\mu = D^1, 0)$ et le produit $A \times GF(M)$. Désignons ensuite par $\mathfrak{f}$ la partition de ce produit en couples $(\mathrm{imm}_\mu(1), g)$, $(\mathrm{imm}_\mu(-1), g\mu)$, $\mu \in M$, $g \in GF(M)$, et en points qui ne sont con-

tenus dans aucun de ces couples; notons ρ l'application composée

$$A \times GF(\mathrm{M}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} A \xrightarrow{\vee_\mu (DS_\mu = DS)} B.$$

Une vérification immédiate montre que cette application est constante sur les éléments de la partition $\mathfrak{f}$; nous posons

$$\widetilde{B} = [A \times GF(\mathrm{M})]/\mathfrak{f}, \quad p = [\mathrm{fact}\ \rho : \widetilde{B} \to B], \quad x_0 = \mathrm{pr}\,(a_0, e),$$

où a_0 est le centre du bouquet A, $e = e_{GF(\mathrm{M})}$, tandis que $\mathrm{pr} = [\mathrm{pr} : A \times GF(\mathrm{M}) \to \widetilde{B}]$. Il est clair que $(\widetilde{B}, p, B)$ est un revêtement, $F_0 = \mathrm{pr}\,(a_0 \times GF(\mathrm{M}))$ et $x_0 \in F_0$.

La contractilité de l'espace $\widetilde{B}$ découle du lemme 2.3.3.4: les hypothèses de ce lemme sont vérifiées par les sous-espaces $\mathrm{pr}\,(A \times [GF_n(\mathrm{M}) \setminus GF_{n-1}(\mathrm{M})])$ de l'espace $\widetilde{B}$, où $GF_n(\mathrm{M})$ est la partie du groupe $GF(\mathrm{M})$ constituée des mots de longueur $\leqslant n$. Le chemin qui recouvre le lacet standard $(\ldots (u_{\mu_1}^{\varepsilon_1} u_{\mu_2}^{\varepsilon_2}) \ldots) u_{\mu_n}^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$, et a pour l'origine le point x_0 mène au point $\mathrm{pr}\,(a_0, g)$ avec $g = \mu_1^{\varepsilon_1} \mu_2^{\varepsilon_2} \ldots \mu_n^{\varepsilon_n}$. Le fait que les extrémités de tels chemins sont deux à deux disjointes et remplissent F_0 est évident.

3. Les groupes $\pi_r(B)$, $r > 1$, *sont triviaux*, $\pi_1(B, \mathrm{bp})$ *est un groupe libre à générateurs libres* $\mathrm{imm}_{\mu *}(\mathrm{sph}_1)$.

La démonstration est fondée sur le lemme *2* et emploie les notations correspondantes. Puisque l'espace $\widetilde{B}$ est contractile, tous ses groupes d'homotopie sont triviaux et par conséquent les groupes $\pi_r(B)$ pour $r > 1$ sont triviaux, tandis que l'application $\Delta : \pi_1(B, \mathrm{bp}) \to \pi_0(F_0, x_0)$ est bijective (voir 1.8.12). Comparant cette bijectivité avec la propriété (ii) du revêtement $(\widetilde{B}, p, B)$, nous voyons que les classes d'homotopie des lacets standards sont deux à deux disjointes et comprennent le groupe $\pi_1(B, \mathrm{bp})$ mais ceci signifie justement que $\pi_1(B, \mathrm{bp})$ est un groupe libre à générateurs libres $\mathrm{imm}_{\mu *}(\mathrm{sph}_1)$.

4. Le groupe fondamental d'un espace cellulaire connexe de dimension 1 *est libre, et ses autres groupes d'homotopie sont triviaux.*

Ceci découle du théorème *3*, vu qu'un espace cellulaire connexe de dimension 1 est homotopiquement équivalent à un bouquet de cercles (voir 2.3.3.6).

2. L'effet du recollement de boules

1. Soit $X = A \cup_\varphi [\sqcup_{\mu \in \mathrm{M}} (D_\mu = D^{k+1})]$, où A est un espace topologique connexe; soit φ une application continue de l'espace $\sqcup_{\mu \in \mathrm{M}} (S_\mu = S^k)$ dans A (voir 2.3.2.1). Supposons en outre que x_0

est un point de A. Dans ce sous-paragraphe nous indiquerons un système de générateurs pour le groupe $\pi_{k+1}(X, A, x_0)$, $k \geqslant 1$.

Remarquons que les groupes d'homotopie $\pi_r(X, A)$ sont triviaux pour $r \leqslant k$ (voir 2.3.2.1), tandis que pour $r > k+1$ la situation se complique : dans le cas le plus simple, quand A est un point et la famille $\{D_\mu\}$ se compose d'une boule unique, $\pi_r(X, A)$ est $\pi_r(S^{k+1})$.

Dans le théorème *2* ci-dessous nous désignerons par f_μ l'application composée

$$D^{k+1} \xrightarrow{\mathrm{in}_\mu} \sqcup_\nu D_\nu \xrightarrow{\mathrm{imm}_2} X$$

et par α_μ l'élément du groupe $\pi_{k+1}(X, A, f_\mu(\mathrm{ort}_1))$ défini par le sphéroïde

$$f_\mu : (D^{k+1}, S^k, \mathrm{ort}_1) \to (X, A, f_\mu(\mathrm{ort}_1)).$$

2. Soient $w_\mu : I \to A$ des chemins quelconques qui joignent le point $f_\mu(\mathrm{ort}_1)$ avec x_0. Si $k \geqslant 1$, le groupe $\pi_{k+1}(X, A, x_0)$ est engendré au-dessus de $\pi_1(A, x_0)$ par les classes $\beta_\mu = T_{w_\mu}\alpha_\mu$ (ceci veut dire qu'il est engendré au sens usuel par les classes $T_\omega \beta_\mu$ avec $\omega \in \pi_1(A, x_0)$).

Nous devons montrer que chaque élément β du groupe $\pi_{k+1}(X, A, x_0)$ admet une représentation sous la forme

$$\beta = \prod_{i=1}^{m} [T_{\omega_i}(\beta_{\mu_i})]^{\pm 1}, \quad \mu_i \in \mathrm{M}, \quad \omega_i \in \pi_1(A, x_0). \tag{1}$$

En vertu du lemme 2.3.2.1, il existe un sphéroïde $g \in \mathrm{Sph}^{\circ}_{k+1}(X, A, x_0)$ de classe β et des homothéties $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ de la boule D^{k+1} dans des boules $d_1, \ldots, d_m$ deux à deux disjointes situées dans sa partie intérieure tels que : le point de la boule d_i à la plus grande valeur de la première coordonnée coïncide avec $\sigma_i(\mathrm{ort}_1)$; le segment qui joint ce point à ort_1 est contenu dans $C = D^{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathrm{Int}\, d_i$; l'application composée

$$D^{k+1} \xrightarrow{\sigma_i} d_i \xrightarrow{\mathrm{in}} D^{k+1} \xrightarrow{g} X$$

coïncide avec un certain f_{μ_i} ; $g(C) \subset A$. Il est évident que X, A, x_0, g et $d_1, \ldots, d_m$ vérifient les conditions du théorème 1.11.1 si les boules $d_1, \ldots, d_m$ sont numérotées de manière appropriée, de sorte que l'on a dans les notations de ce théorème $\gamma = \prod_{i=1}^m T_{s_i}(\gamma_i)$.

Dans notre cas, $\gamma = \beta$ et $\gamma_i = \alpha_{\mu_i}^{\pm 1}$; la dernière égalité s'obtient du fait que α_{μ_i} et γ_i sont définis comme des éléments du groupe $\pi_{k+1}(X, A, f_\mu(\mathrm{ort}_1))$ et sont représentés par les sphéroïdes f_{μ_i} et $g \circ \tau_i$ qui sont envoyés l'un dans l'autre par les transformations orthogonales inverses $\sigma_i^{-1} \circ \mathrm{ab}\, \tau_i$, $(\mathrm{ab}\, \tau_i)^{-1} \circ \sigma_i$ de la boule D^{k+1}. Ainsi $\beta = \prod_{i=1}^m T_{s_i}(\alpha_{\mu_i}^{\pm 1})$, et pour représenter le deuxième membre

sous la forme (1) il ne reste qu'à désigner par ω_i la classe du lacet $w_{\mu_i}^{-1} s_i$.

3 (Corollaire). *Dans les hypothèses du théorème* 2, *l'homomorphisme d'inclusion* $\pi_r(A, x_0) \to \pi_r(X, x_0)$ *est un isomorphisme pour* $r \leqslant k - 1$ *et un épimorphisme pour* $r = k$. *Le noyau de cet épimorphisme est engendré au-dessus de* $\pi_1(A, x_0)$ *par les classes* $\partial \beta_\mu = T_{w_\mu}(\partial \alpha_\mu)$ (*i. e. par les classes des sphéroïdes de recollement* ∂f_μ *transférées au point* x_0).

4. Soit (X, A) *un couple cellulaire à point de base* $x_0 \in A$. *Si l'espace* A *est connexe et contient le squelette* $\mathrm{ske}_k X$, $k \geqslant 1$, *alors les groupes d'homotopie* $\pi_r(X, A)$ *pour* $r \leqslant k$ *sont triviaux, tandis que le groupe* $\pi_{k+1}(X, A, x_0)$ *est engendré au-dessus de* $\pi_1(A, x_0)$ *par les classes, transférées d'une manière quelconque au point* x_0, *des applications caractéristiques correspondant aux cellules de dimension* $k + 1$ *de* $X \setminus A$; *l'homomorphisme d'inclusion* $\pi_r(A, x_0) \to \pi_r(X, x_0)$ *est un isomorphisme pour* $r \leqslant k - 1$ *et un épimorphisme pour* $r = k$; *le noyau du dernier épimorphisme est engendré au-dessus de* $\pi_1(A, x_0)$ *par des classes (transférées d'une manière quelconque au point* x_0) *des sphéroïdes de recollement qui correspondent aux cellules de dimension* $k + 1$ *de* $X \setminus A$.

Tout ceci est contenu dans *1*, *2*, *3*, lorsque $X \setminus A \subset \mathrm{ske}_{k+1} X$. Le cas général se réduit à ce cas particulier grâce au théorème 2.3.2.4.

3. Groupe fondamental d'un espace cellulaire

1. Dans ce sous-paragraphe nous indiquons une méthode efficace pour calculer le groupe fondamental d'un espace cellulaire à cellule de dimension nulle unique. Cette dernière condition n'est pas une restriction essentielle, étant donné que dans les cas les plus importants elle est satisfaite et même si elle ne l'est pas, chaque espace cellulaire connexe peut être transformé (par passage à un espace quotient) en un espace homotopiquement équivalent pour lequel cette condition soit vérifiée (voir p. 2.3.3). La généralisation de cette méthode au cas d'un espace cellulaire arbitraire ne présente pas de difficultés de principe, mais complique les énoncés.

2. Soit X un espace cellulaire à cellule de dimension nulle unique x_0. Puisqu'elle est unique tout aussi bien pour le squelette $\mathrm{ske}_1 X$, ce dernier est cellulairement homéomorphe à un bouquet de cercles. Par conséquent, $\pi_1(\mathrm{ske}_1 X, x_0)$ est un groupe libre engendré par les classes d'homotopie des lacets caractéristiques, i. e. des applications caractéristiques qui correspondent aux cellules de dimension 1 (voir 1.3).

D'après 2.4, l'homomorphisme $\mathrm{in}_* : \pi_1(\mathrm{ske}_1 X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est un épimorphisme et son noyau est engendré au-dessus de $\pi_1(\mathrm{ske}_1 X, x_0)$ par les classes d'homotopie (transférées d'une manière

quelconque au point x_0) des applications de recollement qui correspondent aux cellules de dimension 2. Puisque dans notre cas le groupe $\pi_1(\mathrm{ske}_1 X, x_0)$ agit comme un groupe des automorphismes intérieurs, cela signifie que $\mathrm{Ker}\, \mathrm{in}_*$ est le plus petit sous-groupe normal du groupe $\pi_1(X, x_0)$ contenant les classes d'homotopie indiquées, tandis que le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ que nous voulons calculer est canoniquement isomorphe au groupe quotient du groupe $\pi_1(\mathrm{ske}_1 X, x_0)$ par ce sous-groupe normal.

3. Il découle du précédent que pour calculer le groupe $\pi_1(X, x_0)$ il suffit de connaître le squelette de dimension 1 de l'espace X et les applications de recollement qui correspondent aux cellules de dimension 2. A partir de ces données, on établit la liste des générateurs et des relations du groupe $\pi_1(X, x_0)$: à chaque cellule de dimension 1 correspond un générateur, à savoir la classe du lacet caractéristique correspondant, et à chaque cellule de dimension 2, une relation qui égale à l'unité le mot représentant en termes de générateurs la classe, transférée au point x_0, de l'application de recollement correspondante. Simplifiant, on peut dire que les cellules de dimension 1 de l'espace X constituent le système des générateurs du groupe $\pi_1(X, x_0)$ et les cellules de dimension 2, le système des relations.

Remarquons que le système de relations n'est pas tout à fait canonique : il dépend des chemins choisis pour transférer les relations au point x_0, de sorte que les premiers membres des relations sont définis à une conjugaison près.

4 (Corollaire). *Le groupe fondamental d'un espace cellulaire fini connexe peut être donné par un système fini de générateurs et de relations.*

Théorème d'addition

5. Si A, B sont des sous-espaces d'un espace topologique X avec les inclusions

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "i'"] & \\ A \cap B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\ & B \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd}$$

et x_0 est un point situé dans $A \cap B$, alors la formule $\alpha * \beta \to \to i'_*(\alpha)\, j'_*(\beta)$ détermine un homomorphisme

$$\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

($*$ désigne le produit libre) à noyau contenant tous les éléments de la forme $i_*(\delta) * j_*(\delta^{-1})$, $\delta \in \pi_1(A \cap B, x_0)$. Par conséquent, elle définit également un homomorphisme

$$[\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)]/\mathrm{vk}(X, A, B, x_0) \to \pi_1(X, x_0). \quad (2)$$

où $\mathrm{vk}\,(X, A, B, x_0)$ est le sous-groupe normal minimal du groupe $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$ contenant les éléments indiqués (on l'appelle *sous-groupe de van Kampen*). L'homomorphisme (2) est naturel en ce sens que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)]/\mathrm{vk}\,(X, A, B, x_0) & \to & \pi_1(X, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\pi_1(A', x_0') * \pi_1(B', x_0')]/\mathrm{vk}\,(X', A', B', x_0') & \to & \pi_1(X', x_0'), \end{array}$$

engendré par une application continue du quadruplet (X, A, B, x_0) dans un quadruplet analogue (X', A', B', x_0') est toujours commutatif.

6. Soit (X, A, B) une triade cellulaire (i.e. X est un espace cellulaire, A, B ses sous-espaces vérifiant $A \cup B = X$) et soit x_0 un point situé dans $D = A \cap B$. Si A, B et D sont connexes, alors l'homomorphisme (2) *est un isomorphisme.*

(Le théorème sera généralisé dans 4.3.12.)

D é m o n s t r a t i o n. Supposons tout d'abord que x_0 est l'unique cellule de dimension nulle de l'espace X. D'après *3*, le groupe fondamental de chacun des espaces X, A, B, D au point x_0 se donne par un système de générateurs qui correspondent aux cellules de dimension 1, et de relations qui correspondent aux cellules de dimension 2, de sorte que le système de générateurs et de relations du groupe $\pi_1(X, x_0)$ et celui du groupe $\pi_1(D, x_0)$ sont respectivement la réunion et l'intersection de tels systèmes des groupes $\pi_1(A, x_0)$ et $\pi_1(B, x_0)$, tandis que les homomorphismes i_*, j_* et i'_*, j'_* de *5* sont identiques sur les générateurs.

Le système de générateurs et de relations du groupe $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$ peut être également constitué à partir des systèmes de générateurs et de relations des groupes $\pi_1(A, x_0)$, $\pi_1(B, x_0)$, sauf que les générateurs qui correspondent aux cellules de D doivent être comptés deux fois. Pour un tel choix de générateurs et de relations, l'homomorphisme $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ défini par la formule $\alpha * \beta \mapsto i'_*(\alpha)\, j'_*(\beta)$ sera également l'identité sur les générateurs et son noyau sera engendré par les identifications des générateurs qui correspondent aux cellules de D, ce qui termine la démonstration dans le cas considéré.

Le cas général se réduit à ce cas particulier en transférant l'origine du point x_0 en une cellule quelconque e_0 de dimension nulle sans sortir de D et en remplaçant le quadruplet (X, A, B, e_0) par un quadruplet (X', A', B', e_0') homotopiquement équivalent, qui vérifie $A' \cup B' = X'$ et possède une cellule de dimension nulle unique e_0'. On peut le faire par deux passages à l'espace quotient de l'espace X : tout d'abord on passe de X à son espace quotient par un sous-espace contractile de dimension 1 de l'espace D, qui contient toutes les cellules de dimension nulle de l'espace D (voir **2**.3.3.5 et **1**.3.7.7 et comparer à **2**.3.3.6), ensuite on prend l'espace quotient de l'espace

obtenu, cette fois par la réunion (le bouquet) des mêmes sous-espaces de dimension 1 des espaces quotients des espaces A, B.

7 (Corollaire). *Si A, B sont des espaces cellulaires à points de base a, b, alors*

$$\pi_1((A, a) \vee (B, b), \mathrm{bp}) \cong \pi_1(A, a) * \pi_1(B, b).$$

4. Groupes d'homotopie des surfaces compactes

1. Rappelons qu'une sphère à anses ou à bandes qui possède au moins un trou est homotopiquement équivalente à un bouquet de cercles : de $2g + l - 1$ cercles dans le cas de g anses et l trous et de $h + l - 1$ cercles dans le cas de h bandes et l trous (voir 3.5.3.9). Par conséquent, le groupe fondamental d'une telle surface est libre, le nombre des générateurs étant égal respectivement à $2g + l - 1$ et à $h + l - 1$, tandis que les groupes d'homotopie supérieurs sont triviaux ; voir 1.3.

Par la suite, nous nous occuperons des groupes d'homotopie des surfaces fermées, i.e. des sphères à anses ou à bandes sans trous. D'abord, nous calculons les groupes fondamentaux (en nous servant des partitions cellulaires indiquées au p. 3.5.3 et du théorème 3.3) et ensuite nous nous prenons aux groupes d'homotopie supérieurs, en laissant de côté la sphère et le plan projectif. Les groupes d'homotopie des deux dernières surfaces ont été considérés en détail au paragraphe précédent (voir 2.2.7, 2.2.10, 2.4.3, 2.5.1).

Groupes fondamentaux des surfaces fermées

2. La partition cellulaire d'une sphère à g anses construite dans 3.5.3.8 contient une seule cellule de dimension nulle e_0, $2g$ cellules de dimension un, soit $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ et une seule cellule de dimension 2 ; l'application de recollement correspondant à cette dernière cellule envoie justement ort_1 dans e_0. La classe d'homotopie de cette application (envisagée comme un lacet) se représente en termes des générateurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$, correspondant aux cellules $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, du groupe fondamental du squelette de dimension un de la surface, sous la forme :

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \ldots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}.$$

Ainsi le groupe fondamental d'une surface au point e_0 peut être décrit comme le groupe à générateurs $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ et à relation

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1$$

La partition cellulaire de la sphère à h bandes construite dans 3.5.3.8 contient une cellule unique de dimension nulle e_0, h cellules de dimension un $c_1, \ldots, c_h$ et une seule cellule de dimension 2.

En répétant avec des modifications évidentes le raisonnement précédent, nous voyons que le groupe fondamental de la surface au point e_0 peut être décrit comme étant le groupe à générateurs $c_1, \ldots, c_h$ et à relation

$$c_1 c_1 \ldots c_h c_h = 1.$$

3. Il faut remarquer que les groupes calculés dans *2* sont deux à deux non isomorphes. Pour la démonstration, il suffit d'effectuer une commutation : cette transformation fait du groupe fondamental de la sphère à g anses un groupe abélien libre de rang $2g$ et du groupe fondamental de la sphère à h bandes une somme directe d'un groupe abélien libre de rang $h - 1$ et d'un groupe d'ordre 2. En particulier, les surfaces modèles fermées ne sont pas homéomorphes entre elles.

On ne déduit facilement que toutes les surfaces modèles compactes ne sont pas deux à deux homéomorphes : il suffit de recoller les trous par des disques. Que le nombre de trous est un invariant topologique découle du fait qu'il coïncide avec le nombre de composantes du bord (voir 3.1.1.4 et 4.6.5.12).

Groupes d'homotopie supérieurs

4. Soit P une sphère à g anses. Si $g \geqslant 1$ et $r \geqslant 2$, alors $\pi_r(P) = 0$.

D é m o n s t r a t i o n. La surface P se recouvre d'une manière naturelle par une guirlande infinie $\widetilde{P}$, obtenue du produit $S^1 \times \mathbf{R}$

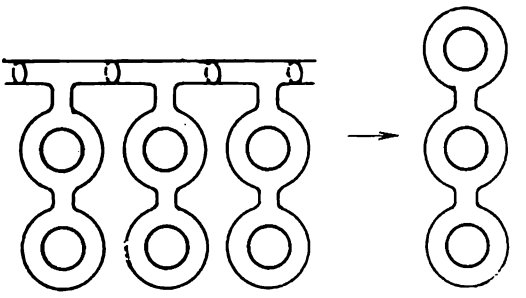


Fig. 15 ($g = 3$)

en en éliminant les disques ouverts de centres $(\mathrm{ort}_1, 2k)$ (où $k = 0, \pm 1, \ldots$) et en recollant à la place de chacun d'eux des sphères à $g - 1$ anses et à un seul trou (fig. 15). Désignons par $\widetilde{P}_n$ la guirlande finie obtenue de la même manière du produit $S^1 \times [-2n - 1, 2n + 1]$. Il est évident que $\widetilde{P}_n$ est une sphère à $(2n + 1)(g - 1)$ anses et à deux trous, de sorte que $\pi_r(\widetilde{P}_n) = 0$ pour $r \geqslant 2$ (voir *1*). Puisque $\widetilde{P} = \lim(\widetilde{P}_n, \text{in} : \widetilde{P}_n \to \widetilde{P}_{n+1})$, on a également $\pi_r(\widetilde{P}) = 0$

pour $r \geqslant 2$ (voir 1.11.2). Par conséquent, on a aussi $\pi_r(P) = 0$ pour $r \geqslant 2$ (voir 1.8.12).

5. Soit P une sphère à h bandes. Si $h \geqslant 2$ et $r \geqslant 2$, alors $\pi_r(P) = 0$.

Ceci découle de *4*, car il existe un revêtement de P par une sphère à $h - 1$ anses (voir 4.1.2.6).

5. Groupes d'homotopie des bouquets

1. Nous supposerons donnée une famille $\{(X_\mu, x_\mu)\}_{\mu \in M}$ de T_1-espaces à point de base. Considérons le bouquet $B = \bigvee_{\mu \in M} (X_\mu, x_\mu)$. Il est clair que la formule

$$\mathrm{Imm}\,(\{\alpha_\mu\}_{\mu \in M}) = \Sigma_{\mu \in M}\, \mathrm{imm}_{\mu *}(\alpha_\mu)$$

détermine pour $r \geqslant 2$ un homomorphisme

$$\mathrm{Imm}: \oplus_{\mu \in M}\, \pi_r(X_\mu, x_\mu) \to \pi_r(B, \mathrm{bp})$$

qui est naturel en ce sens que si $B' = \bigvee_{\mu' \in M'} (X'_{\mu'}, x'_{\mu'})$ est un autre bouquet de T_1-espaces, $\alpha : M' \to M$ une application quelconque et

$$f'_{\mu'} : (X'_{\mu'}, x'_{\mu'}) \to (X_{\alpha(\mu')}, x_{\alpha(\mu')})$$

des applications continues, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{\mu' \in M'} \pi_r(X'_{\mu'}, x'_{\mu'}) & \xrightarrow{\mathrm{Imm}} & \pi_r(B', \mathrm{bp}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \oplus_{\mu \in M} \pi_r(X_\mu, x_\mu) & \xrightarrow{\mathrm{Imm}} & \pi_r(B, \mathrm{bp}), \end{array} \tag{3}$$

est commutatif. Dans ce diagramme la flèche verticale à gauche désigne l'homomorphisme

$$\{\alpha'_{\mu'}\}_{\mu' \in M'} \mapsto \Big\{ \sum_{\mu' \in \alpha^{-1}(\mu)} (f_{\mu'})_* (\alpha'_{\mu'}) \Big\}_{\mu \in M},$$

et la flèche verticale à droite, l'homomorphisme induit par l'application $B' \to B$ définie par la formule

$$\mathrm{imm}_{\mu'}(y'_{\mu'}) \mapsto \mathrm{imm}_{\alpha(\mu')} \circ f_{\mu'}(y'_{\mu'}), \quad y'_{\mu'} \in X_{\mu'}, \quad \mu' \in M'.$$

2 (Lemme). *Quel que soit $\alpha \in \pi_r(B, \mathrm{bp})$, $r \geqslant 1$, il existe un ensemble fini $M' \subset M$ tel que : $\mathrm{pr}_{\mu *}(\alpha) = 0$ si $\mu \in M \setminus M'$; α appartient à l'image de l'homomorphisme $\pi_r(B', \mathrm{bp}) \to \pi_r(B, \mathrm{bp})$ induit par le plongement naturel du bouquet $B' = \bigvee_{\mu \in M'} (X_\mu, x_\mu)$ dans B.*

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que pour chaque sphéroïde $\varphi \in \mathrm{Sph}_r(B, \mathrm{bp})$ l'ensemble $\varphi(I^r)$ se recouvre par un nombre fini d'ensembles $\mathrm{imm}_\mu(X_\mu)$. (Ce dernier fait découle de la compacité de l'ensemble $\varphi(I^r)$ et du fait que les ensembles constitués d'un seul point sont fermés dans les espaces X_μ : si l'on prend dans chaque intersection non vide $\varphi(I^r) \cap \mathrm{imm}_\mu(X_\mu \setminus x_\mu)$ un point

quelconque, on obtient alors un ensemble qui est à la fois discret et compact et donc fini.)

3. Définissons pour $r \geqslant 2$ l'application

$$\mathrm{Pr}: \pi_r(B, \mathrm{bp}) \to \oplus_{\mu \in \mathrm{M}} \pi_r(X_\mu, x_\mu)$$

par la formule $\mathrm{Pr}(\alpha) = \{\mathrm{pr}_{\mu *}(\alpha)\}_{\mu \in \mathrm{M}}$ (cette définition est correcte en vertu de *2*). Il est clair que Pr est un homomorphisme et que le diagramme (3) reste commutatif lorsqu'on remplace les flèches $\xrightarrow{\mathrm{Imm}}$ par les flèches $\xleftarrow{\mathrm{Pr}}$. Si l'ensemble M est fini, alors il est évident que Pr coïncide avec la composée de l'homomorphisme

$$\pi_r(B, \mathrm{bp}) \to \pi_r(\times_{\mu \in \mathrm{M}} X_\mu, \{x_\mu\})$$

induit par l'inclusion $B \to \times_{\mu \in \mathrm{M}} X_\mu$ (voir 1.2.8.3), et de l'isomorphisme canonique

$$\pi_r(\times_{\mu \in \mathrm{M}} X_\mu, \{x_\mu\}) \to \oplus_{\mu \in \mathrm{M}} \pi_r(X_\mu, x_\mu)$$

(voir 1.1.9).

4. La composée $\mathrm{Pr} \circ \mathrm{Imm}$ *coïncide avec l'automorphisme identique du groupe* $\oplus_{\mu \in \mathrm{M}} \pi_r(X_\mu, x_\mu)$. *En particulier,* Pr *est un épimorphisme,* Imm *un monomorphisme et* $\pi_r(B, \mathrm{bp}) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Pr} \oplus \mathrm{Im}\,\mathrm{Imm}$.

Démonstration. Puisque $\mathrm{pr}_\mu \circ \mathrm{imm}_\mu = \mathrm{id}\, X_\mu$ et $\mathrm{pr}_\nu \circ \mathrm{imm}_\mu(X_\mu) = x_\nu$ pour $\nu \neq \mu$, alors quels que soient $\alpha_\mu \in \pi_r(X_\mu, x_\mu)$, on a la relation

$$\mathrm{Pr} \circ \mathrm{Imm}(\{\alpha_\mu\}_{\mu \in \mathrm{M}}) = \mathrm{Pr}\,[\sum_{\mu \in \mathrm{M}} \mathrm{imm}_{\mu *}(\alpha_\mu)] =$$
$$= \{\sum_{\mu \in \mathrm{M}} (\mathrm{pr}_\nu \circ \mathrm{imm}_\mu)_*(\alpha_\mu)\}_{\nu \in \mathrm{M}} = \{\alpha_\nu\}_{\nu \in \mathrm{M}}.$$

5. Soient (X_μ, x_μ) *des couples cellulaires et soient* m *et* k_μ, $\mu \in \mathrm{M}$, *des nombres naturels tels que* $k_\mu + k_\nu \geqslant m$ *pour* $\nu \neq \mu$ *et pour chaque* μ

$$\pi_s(X_\mu, x_\mu) = 0 \quad si \quad 1 \leqslant s \leqslant k_\mu.$$

Si $2 \leqslant r \leqslant m$, *alors les homomorphismes*

$$\mathrm{Imm}: \oplus_{\mu \in \mathrm{M}} \pi_r(X_\mu, x_\mu) \to \pi_r(B, \mathrm{bp}),$$
$$\mathrm{Pr}: \pi_r(B, \mathrm{bp}) \to \oplus_{\mu \in \mathrm{M}} \pi_r(X_\mu, x_\mu)$$

sont des isomorphismes.

(Le théorème sera généralisé dans 4.3.13.)

Démonstration. Considérons d'abord le cas où M est fini. En vertu du théorème 2.3.3.2 et du fait que l'homomorphisme Imm est naturel (voir *1*), on peut supposer que les squelettes $\mathrm{ske}_{k_\mu} X_\mu$ se réduisent aux points x_μ; il est clair que dans ce cas B contient le squelette $\mathrm{ske}_{m+1} X$ du produit cellulaire X des espaces X_μ. D'après le théorème 2.3.2.2, on en tire que $\mathrm{in}_*: \pi_r(B, \mathrm{bp}) \to \pi_r(X, \mathrm{bp})$ est

un isomorphisme pour $r \leqslant m$, et conformément à 1.1.9 la composée

$$\mathrm{in}_* \circ \mathrm{Imm} : \oplus_{\mu \in \mathrm{M}} \pi_r (X_\mu, x_\mu) \to \pi_r (X, \mathrm{bp})$$

est un isomorphisme pour chaque r. Par conséquent, Imm est un isomorphisme lorsque $r \leqslant m$.

Dans le cas général, d'après *2*, pour chaque $\alpha \in \pi_r (B, \mathrm{bp})$ et $r \leqslant m$, il existe un sous-bouquet fini $B' = \bigvee_{\mu \in \mathrm{M}'} (X_\mu, x_\mu)$ du bouquet B tel que α appartient à l'image de l'homomorphisme $\pi_r (B', \mathrm{bp}) \to \pi_r (B, \mathrm{bp})$ induit par le plongement naturel $B' \to B$. D'après *1*, cet homomorphisme peut être inclu dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\mu \in \mathrm{M}'} \pi_r (X_\mu, x_\mu) & \xrightarrow{\mathrm{Imm}} & \pi_r (B', \mathrm{bp}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{\mu \in \mathrm{M}} \pi_r (X_\mu, x_\mu) & \xrightarrow{\mathrm{Imm}} & \pi_r (B, \mathrm{bp}), \end{array}$$

et puisque l'homomorphisme Imm de la ligne supérieure est un isomorphisme (d'après ce que nous avons déjà démontré), il en découle que α appartient à l'image de notre homomorphisme (inférieur) Imm. Ce dernier est donc un épimorphisme, ce qui nous permet de conclure, en nous servant du théorème *4*, que nos applications Imm et Pr sont des isomorphismes.

6 (Corollaire). *Soit B un bouquet de sphères de dimension n construit d'après la famille $\{(S_\mu = S^n, \mathrm{ort}_1)\}_{\mu \in \mathrm{M}}$. Si $n \geqslant 2$, alors les groupes $\pi_r (B)$ pour $r < n$ sont triviaux, tandis que $\pi_n (B, \mathrm{bp})$ est un groupe abélien libre engendré par les générateurs libres* $\mathrm{imm}_{\mu_*} (\mathrm{sph}_n)$.

6. Groupes d'homotopie d'un couple cellulaire k-connexe

1 (Lemme algébrique). *Si, dans le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \square & \xrightarrow{\gamma} & \square \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \square & \xrightarrow{\beta} & \square \end{array}$$

composé de groupes et d'homomorphismes, α, β, γ sont des épimorphismes et $\mathrm{Ker}\, \beta \subset \alpha (\mathrm{Ker}\, \gamma)$, *alors δ est un épimorphisme et* $\mathrm{Ker}\, \beta = \alpha (\mathrm{Ker}\, \gamma)$, $\mathrm{Ker}\, \delta = \gamma (\mathrm{Ker}\, \alpha)$.

Démonstration. δ est un épimorphisme puisque α et β le sont et le diagramme est commutatif; les inclusions

$$\alpha (\mathrm{Ker}\, \gamma) \subset \mathrm{Ker}\, \beta, \quad \gamma (\mathrm{Ker}\, \alpha) \subset \mathrm{Ker}\, \delta$$

découlent également de la commutativité du diagramme. Démontrons l'inclusion $\operatorname{Ker}\delta \subset \gamma(\operatorname{Ker}\alpha)$. Soit $d \in \operatorname{Ker}\delta$. Si $d = \gamma(a)$, alors (toujours en vertu de la commutativité du diagramme) on a $\alpha(a) \in \operatorname{Ker}\beta$ et par conséquent $\alpha(a) \in \alpha(\operatorname{Ker}\gamma)$, de sorte qu'il existe un $c \in \operatorname{Ker}\gamma$ tel que $\alpha(c) = \alpha(a)$. La dernière égalité montre que $ac^{-1} \in \operatorname{Ker}\alpha$; ainsi $d = \gamma(a) = \gamma(ac^{-1}) \in \gamma(\operatorname{Ker}\alpha)$.

2. *Soit (X, A) un couple cellulaire à point de base $x_0 \in A$. Si A est connexe et $\pi_r(X, A) = 0$ pour $r \leqslant k$, alors $\mathrm{pr}_* : \pi_{k+1}(X, A, x_0) \to \pi_{k+1}(X/A, \mathrm{pr}(x_0))$ est un épimorphisme; pour $k \geqslant 1$ le noyau $\operatorname{Ker}\mathrm{pr}_*$ est le plus petit sous-groupe du groupe $\pi_{k+1}(X, A, x_0)$ qui contient toutes les fractions $(T_\sigma\alpha)\,\alpha^{-1}$ vérifiant*

$$\alpha \in \pi_{k+1}(X, A, x_0), \quad \sigma \in \pi_1(A, x_0).$$

Pour $k = 0$ la situation se décrit par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A,x_0) \arrow[r, "\mathrm{in}_*"] & \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\mathrm{rel}_*"] \arrow[dr, "\mathrm{abs}\,\mathrm{pr}_*"'] & \pi_1(X,A,x_0) \arrow[d, "\mathrm{pr}_*"] \\ & & \pi_1(X/A, \mathrm{pr}(x_0)), \end{tikzcd} \tag{4}$$

dans lequel $\mathrm{abs}\,\mathrm{pr}_*$ *et* rel_* *sont également des épimorphismes et* $\operatorname{Ker}(\mathrm{abs}\,\mathrm{pr}_*)$ *est le plus petit sous-groupe normal du groupe* $\pi_1(X, x_0)$ *qui contient* $\operatorname{Ker}\mathrm{rel}_* = \operatorname{Im}\mathrm{in}_*$.

(Ce théorème sera généralisé dans 4.3.14.)

Démonstration dans le cas $k \geqslant 1$. Supposons d'abord que toutes les cellules qui constituent $X \setminus A$ sont de dimension $k + 1$, de sorte que X/A est un bouquet de sphères de dimension $k + 1$. Pour chaque cellule $e \subset X \setminus A$ transférons au point x_0 la classe d'homotopie de l'application caractéristique correspondante, envisagée comme un sphéroïde du couple (X, A); désignons par α_e l'élément obtenu du groupe $\pi_{k+1}(X, A, x_0)$ et posons $\beta_e = \mathrm{pr}_*(\alpha_e)$. D'après le théorème 2.4, les classes $T_\sigma\alpha_e$, $\sigma \in \pi_1(A, x_0)$, constituent le système de générateurs du groupe $\pi_{k+1}(X, A, x_0)$; d'après le théorème 5.6, les classes β_e constituent un système de générateurs indépendants du groupe abélien $\pi_{k+1}(X/A, \mathrm{pr}(x_0))$. En outre, il est évident que $\mathrm{pr}_*(T_\sigma\alpha) = \mathrm{pr}_*(\alpha)$ quels que soient $\alpha \in \pi_{k+1}(X, A, x_0)$, $\sigma \in \pi_1(A, x_0)$ et ces données suffisent pour terminer la démonstration dans la situation envisagée.

La projection pr_* est un épimorphisme parce que les classes $\beta_e = \mathrm{pr}_*(\alpha_e)$ engendrent le groupe $\pi_{k+1}(X/A, \mathrm{pr}(x_0))$. L'inclusion $(T_\sigma\alpha)\,\alpha^{-1} \in \operatorname{Ker}\mathrm{pr}_*$ découle de l'égalité $\mathrm{pr}_*(T_\sigma\alpha) = \mathrm{pr}_*(\alpha)$. Montrons que les quotients $(T_\sigma\alpha)\,\alpha^{-1}$ engendrent $\operatorname{Ker}\mathrm{pr}_*$. Si $k > 1$ et la classe $\xi = \Pi_{(e,\sigma)}(T_\sigma\alpha_e)^{\lambda(e,\sigma)}$ appartient à $\operatorname{Ker}\mathrm{pr}_*$ (les $\lambda(e, \sigma)$ étant des entiers différents de zéro seulement en nombre fini), alors

$\Sigma_\sigma\lambda\,(e,\ \sigma) = 0$ pour chaque cellule e (puisque

$$\Sigma_e\,[\Sigma_\sigma\lambda\,(e,\ \sigma)]\,\beta_e = \mathrm{pr}_*\,(\alpha) = 0)$$

et par conséquent

$$\xi = \Pi_{(e,\sigma)}\,[(T_\sigma\alpha_e)\,\alpha_e^{-1}]^{\lambda(e,\sigma)}.$$

Pour $k = 1$ ce raisonnement reste valable seulement si l'on effectue une commutation dans le groupe $\pi_{k+1}\,(X,\ A,\ x_0)$ et montre simplement que chaque élément du noyau $\mathrm{Ker}\ \mathrm{pr}_*$ s'obtient à partir d'un produit de la forme envisagée précédemment multiplié par quelques commutateurs. Mais puisque le commutateur $\gamma^{-1}\delta\gamma\delta^{-1}$ dans $\pi_2\,(X,\ A,\ x_0)$ se présente comme $(T_{\partial\gamma}\delta)\,\delta^{-1}$ (voir 1.4.7), nous obtenons à nouveau pour ξ la décomposition cherchée par fractions $(T_\sigma\alpha)\,\alpha^{-1}$.

Dans le cas général, nous pouvons rendre le couple $(X,\ A)$ k-connexe, en éliminant les composantes de l'espace X qui ne contiennent pas x_0 (voir 1.4.6), et ensuite le remplacer par un couple homotopiquement équivalent $(X',\ A')$ qui vérifie $\mathrm{ske}_k\,X' \subset A'$ (voir 2.3.3.1); ainsi on peut supposer que $\mathrm{ske}_k\,X \subset A$. Posons $Y = A \cup \mathrm{ske}_{k+1}\,X$ et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\pi_{k+1}\,(Y,\ A,\ x_0) & \xrightarrow{i=\mathrm{in}_*} & \pi_{k+1}\,(X,\ A,\ x_0) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle p'=\mathrm{pr}_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p=\mathrm{pr}_*} \\
\pi_{k+1}\,(Y/A,\ \mathrm{pr}\,(x_0)) & \xrightarrow{i'=\mathrm{in}_*} & \pi_{k+1}\,(X/A,\ \mathrm{pr}\,(x_0)).
\end{array}$$

Il est commutatif et i, i', p' sont des épimorphismes. Le fait que i en est un découle de l'inclusion $\mathrm{ske}_{k+1}\,X \subset Y$; pour i', de l'inclusion $\mathrm{ske}_{k+1}\,(X/A) \subset Y/A$, pour p', de la partie du théorème déjà démontrée. Montrons que ce diagramme vérifie également la dernière condition du lemme *1*: $\mathrm{Ker}\ i' \subset p'\,(\mathrm{Ker}\ i)$.

Chaque cellule de dimension $k+2$ de $(X/A) \setminus (Y/A)$ est l'image d'une certaine cellule e de $X \setminus Y$ par l'application pr, tandis que l'application de recollement correspondante se présente sous la forme $\mathrm{pr} \circ \mathrm{att}_e$. En vertu du théorème 2.4, il en découle que $\mathrm{Ker}\ i' \subset \subset \mathrm{pr}_*\,(\mathrm{Ker}\ \mathrm{in}_*)$, où $\mathrm{in}_* = [\mathrm{in}_*:\ \pi_{k+1}\,(Y,\ x_0) \to \pi_{k+1}\,(X,\ x_0)]$ et $\mathrm{pr}_* = [\mathrm{pr}_*:\ \pi_{k+1}\,(Y,\ x_0) \to \pi_{k+1}\,(Y/A,\ \mathrm{pr}\,(x_0))]$. Puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\pi_{k+1}\,(Y,\ x_0) & \xrightarrow{\mathrm{in}_*} & \pi_{k+1}\,(X,\ x_0) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{rel}_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{rel}_*} \\
\pi_{k+1}\,(Y,\ A,\ x_0) & \xrightarrow{i} & \pi_{k+1}\,(X,\ A,\ x_0)
\end{array}$$

est commutatif et que

$$\mathrm{pr}_* = p' \circ [\mathrm{rel} : \pi_{k+1}(Y, x_0) \to \pi_{k+1}(Y, A, x_0)],$$

on en tire $\mathrm{pr}_*(\mathrm{Ker}\ \mathrm{in}_*) \subset p'(\mathrm{Ker}\ i)$ et donc $\mathrm{Ker}\ i' \subset p'(\mathrm{Ker}\ i)$.

En appliquant le lemme *1*, nous voyons que p est un épimorphisme et que $\mathrm{Ker}\ p = i(\mathrm{Ker}\ p')$; mais d'après la partie du théorème déjà démontrée, $\mathrm{Ker}\ p'$ est engendré par les quotients $(T_\sigma\alpha)\,\alpha^{-1}$ avec $\alpha \in \pi_{k+1}(Y, A, x_0)$, $\sigma \in \pi_1(A, x_0)$. Puisque $i((T_\sigma\alpha)\,\alpha^{-1}) = [T_\sigma(i(\alpha))]\,(i(\alpha))^{-1}$ et i est un épimorphisme, on en tire que $\mathrm{Ker}\ p$ est engendré par les quotients $(T_\sigma\alpha)\,\alpha^{-1}$ avec $\alpha \in \pi_{k+1}(X, A, x_0)$, $\sigma \in \pi_1(A, x_0)$.

Démonstration dans le cas $k = 0$. La commutativité du diagramme (4) est évidente, rel_* est un épimorphisme puisque A est connexe et il ne reste qu'à établir que $\mathrm{abs}\ \mathrm{pr}_*$ est un épimorphisme à noyau indiqué. Si x_0 est la cellule de dimension nulle unique de l'espace X, l'assertion découle de 3.3, vu que le système de générateurs et de relations qui y était indiqué pour le groupe $\pi_1(X/A, \mathrm{pr}(x_0))$ peut être obtenu à partir du système de générateurs et de relations du groupe $\pi_1(X, x_0)$ en éliminant les cellules de dimension 1 et 2 de l'espace A. Le cas général se réduit à ce cas particulier par transfert de l'origine (à l'intérieur de A) en une cellule de dimension nulle quelconque e_0 et remplacement du triplet (X, A, e_0) par le triplet (X', A', e'_0) homotopiquement équivalent où e'_0 est la seule cellule de dimension nulle. Ce remplacement peut être effectué en passant deux fois à l'espace quotient à partir de l'espace X : d'abord on prend l'espace quotient de X par le sous-espace contractile de dimension 1 de l'espace A qui contient toutes les cellules de dimension nulle de A, et ensuite en prenant l'espace quotient de l'espace obtenu par son sous-espace contractile de dimension 1 qui contient toutes les cellules de dimension nulle (comparer à la démonstration du théorème 3.6).

3. L'espace quotient d'un espace cellulaire X par son sous-espace simplement connexe A est k-connexe $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ *si, et seulement si, le couple (X, A) est k-connexe. Si cette condition est satisfaite pour un certain $k < \infty$, alors l'homomorphisme*

$$\mathrm{pr}_* : \pi_{k+1}(X, A, x_0) \to \pi_{k+1}(X/A, \mathrm{pr}(x_0))$$

est un isomorphisme.

La deuxième assertion du théorème est une conséquence immédiate des théorèmes *2* et 1.4.6. La première se déduit de la deuxième par récurrence sur k. Remarquons que pour déduire la k-connexité de l'espace X/A de la k-connexité du couple (X, A), il suffit déjà d'employer les théorèmes 2.3.3.1 et 2.3.2.2.

4. Si un espace cellulaire X à cellule de dimension nulle distinguée x_0 est k-connexe, alors l'homomorphisme

$$\mathrm{su}: \pi_{k+1}(X, x_0) \to \pi_{k+2}(\mathrm{su}(X, x_0), \mathrm{bp})$$

est un isomorphisme.

Ceci découle de *3* (voir 2.1.2).

7. Espace à groupes d'homotopie donnés

1 (Lemme). *Soient π un groupe et n un nombre naturel. Si le groupe π est abélien ou que $n = 1$, alors il existe un espace cellulaire connexe X pour lequel les groupes $\pi_r(X)$ pour $r \neq n$ sont triviaux, tandis que $\pi_n(X) \cong \pi$.*

Démonstration. Nous construirons par récurrence des espaces cellulaires connexes $X_0, X_1, \ldots$ à points de base $x_0, x_1, \ldots$ et des plongements cellulaires $\varphi_0: X_0 \to X_1$, $\varphi_1: X_1 \to X_2, \ldots$, tels que les points de base sont envoyés dans les points de base et : (i) les groupes $\pi_r(X_k, x_k)$ avec $r < n$ et $n < r \leqslant n + k$ sont triviaux ; (ii) le groupe $\pi_n(X_k, x_k)$ est isomorphe à π ; (iii) φ_{k*} : $\pi_n(X_k, x_k) \to \pi_n(X_{k+1}, x_{k+1})$ est un isomorphisme. L'espace $X = \lim(X_k, \varphi_k)$ sera alors l'espace cherché (voir 2.1.5.6 et 1.11.2).

Pour construire X_0 et x_0, représentons π comme F/F', où F est un groupe libre si $n = 1$ et un groupe abélien libre si $n > 1$. Soient B, B' des bouquets de sphères de dimension n vérifiant $\pi_n(B, \mathrm{bp}) = F$, $\pi_n(B', \mathrm{bp}) = F'$ (voir 1.3 et 5.6) ; soit $f: (B', \mathrm{bp}) \to (B, \mathrm{bp})$ une application continue telle que $f_*: \pi_n(B', \mathrm{bp}) \to \pi_n(B, \mathrm{bp})$ coïncide avec l'inclusion $F' \to F$ (une telle application peut être construite à l'aide de sphéroïdes qui représentent des générateurs libres du groupe F' dans $\pi_n(B, \mathrm{bp}) = F$). Remplaçons dans B' chaque sphère par la boule qu'elle limite et prenons en guise de X_0 le résultat du recollement à B par f du bouquet de boules obtenu. Il découle des théorèmes 1.3, 5.6 et 2.3 que X_0 et $x_0 = \mathrm{imm}_1(\mathrm{bp})$ [$= \mathrm{imm}_2(\mathrm{bp})$] vérifient les conditions (i), (ii) avec $k = 0$.

Supposons que pour un certain $i \geqslant 1$ nous avons déjà construit X_k et x_k pour $k < i$ et φ_k pour $k < i - 1$, de sorte que X_k et x_k vérifient les conditions (i), (ii) et φ_k vérifie la condition (iii). Représentons $\pi_{n+i}(X_{i-1}, x_{i-1})$ comme groupe quotient du groupe abélien libre, mettons G, et construisons un bouquet de sphères de dimension $n + i$, mettons C, et une application continue $g: (C, \mathrm{bp}) \to (X_{i-1}, x_{i-1})$ telle que l'homomorphisme

$$g_*: \pi_{n+i}(C, \mathrm{bp}) \to \pi_{n+i}(X_{i-1}, x_{i-1})$$

coïncide avec la projection $G \to \pi_{n+i}(X_{i-1}, x_{i-1})$ (l'existence de tels C et g s'établit de même que nous venons d'établir l'existence de B' et f, sauf qu'il n'est pas nécessaire de se servir du théorème 1.3). Remplaçons ensuite dans C chaque sphère par la boule qu'elle limite

et définissons X_i comme le résultat du recollement du bouquet de boules obtenu à C par g. Posons enfin $x_i = \mathrm{imm}_2(x_{i-1})$ et $\varphi_{i-1} = \mathrm{imm}_2$. Le fait que X_i et x_i vérifient les conditions (i), (ii) avec $k = i$, tandis que φ_{i-1} vérifie la condition (iii) pour $k = i - 1$, découle de 2.3.

2. Quels que soient le groupe π_1 et les groupes abéliens $\pi_2, \pi_3, \ldots$, il existe un espace cellulaire connexe X tel que $\pi_r(X) \cong \pi_r$, $r = 1, 2, \ldots$

Démonstration. Soient X_1, X_2 des espaces cellulaires à cellules distinguées de dimension nulle $x_1, x_2, \ldots$, tels que les groupes $\pi_r(X_k)$ avec $r \neq k$ sont triviaux et $\pi_k(X_k) \cong \pi_k$ (voir *1*). Définissons par récurrence les espaces cellulaires $Y_0, Y_1, \ldots$ par les formules $Y_0 = D^0$, $Y_{k+1} = Y_k \times {}_cX_{k+1}$ et les plongements cellulaires $\psi_k : Y_k \to Y_{k+1}$ par la formule $\psi_k(y) = (y, x_{k+1})$. Il découle des théorèmes 1.1.9 et 1.11.2 que l'espace $X = \lim(Y_k, \psi_k)$ possède les propriétés désirées.

8. Huit exemples édifiants

1. Pour $r > 1$, le groupe d'homotopie de dimension r d'un espace cellulaire fini connexe peut ne pas posséder de système fini de générateurs (voir 3.4). Un exemple simple est celui du bouquet $(S^r, \mathrm{ort}_1) \vee (S^1, \mathrm{ort}_1)$ dont le groupe d'homotopie de dimension r pour $r > 1$ est le groupe abélien libre de rang infini. Ceci découle du fait que $(S^r, \mathrm{ort}_1) \vee (S^1, \mathrm{ort}_1)$ possède un revêtement par un espace homotopiquement équivalent à un bouquet infini de sphères de dimension r, à savoir par la droite à laquelle on a recollé un exemplaire de la sphère S^r en chaque point à coordonnée entière.

Information. Les groupes d'homotopie d'un espace cellulaire fini à groupe fondamental fini possèdent un système fini de générateurs. On trouvera la démonstration dans [19].

2. Dans les hypothèses du théorème 1.6.6, le sous-groupe $\mathrm{Ker}\,\mathrm{rel}_* = \mathrm{Im}\,\mathrm{in}_*$ du groupe $\pi_1(X, x_0)$ peut ne pas être normal (comparer à 1.5.14). Exemple : X est le bouquet de deux cercles, A est le premier cercle, x_0 est le centre du bouquet, ρ applique le deuxième cercle dans x_0.

3. Dans les hypothèses du théorème 1.6.7 la scission à droite de la suite homotopique du couple (X, A) au terme $\pi_1(X, x_0)$ peut ne pas être normale (voir 1.5.17). Exemple : $X = (D^2, \mathrm{ort}_1) \vee (S^1, \mathrm{ort}_1)$, $A = (S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^1, \mathrm{ort}_1)$, x_0 est le centre des deux bouquets, $h = [\mathrm{imm}_2 : S^1 \to X] \circ [\mathrm{pr}_2 : X \to S^1]$.

4. Pour tout $k \geqslant 0$, il existe des couples (X, A) k-connexes avec A connexe qui ne sont pas $(k+1)$-simples ; qui plus est, dans les conditions du théorème 6.2, pour tout $k \geqslant 0$, l'épimorphisme

$$\mathrm{pr}_* : \pi_{k+1}(X, A, x_0) \to \pi_{k+1}(X/A, \mathrm{pr}(x_0))$$

n'est pas nécessairement un isomorphisme. Exemple : $X = (S^{k+1}, \mathrm{ort}_1) \vee (S^1, \mathrm{ort}_1)$, $A = \mathrm{imm}_2 (S^1)$ (comparer à *1* et *3*).

5. Le groupe d'homotopie de dimension deux du couple (X, A), avec A connexe, peut ne pas être commutatif même dans le cas où le groupe $\pi_1 (A)$ l'est et l'espace X est simplement connexe. L'exemple le plus simple est $A = S^1 \times S^1$, $x_0 = (\mathrm{ort}_1, \mathrm{ort}_1)$, X s'obtenant de A par recollement de deux copies du disque D^2 par les applications $S^1 \to A$ définies par les formules $y \mapsto (y, \mathrm{ort}_1)$, $y \mapsto (\mathrm{ort}_1, y)$. Ici

$$\pi_1 (A) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \quad \pi_2 (A) = 0, \quad \pi_1 (X) = 0, \quad \pi_2 (X) \cong \mathbf{Z}$$

(X est homotopiquement équivalent à la sphère S^2), de sorte qu'on obtient une suite exacte

$$0 \xrightarrow{\mathrm{in}_*} \mathbf{Z} \xrightarrow{\mathrm{rel}_*} \pi_2 (X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\mathrm{in}_*} 0, \tag{5}$$

qui montre, en particulier, que ∂ est un épimorphisme. Si le groupe $\pi_2 (X, A, x_0)$ était commutatif, alors, en vertu de 1.4.7, l'action du groupe $\pi_1 (A, x_0)$ y serait une action identique, et le théorème 2.2 impliquerait l'inégalité $\mathrm{rank}\ \pi_2 (X, A, x_0) \leqslant 2$ qui est en contradiction avec l'exactitude de la suite (5).

6. L'homomorphisme $\mathrm{pr}_* : \pi_3 (X, A, x_0) \to \pi_3 (X/A, \mathrm{pr}\ (x_0))$ peut ne pas être un épimorphisme même pour un couple (X, A) 1-connexe simple. Exemple : $X = D^2$, $A = S^1$, $x_0 = \mathrm{ort}_1$. Ici $\pi_r (X, A) = 0$ pour $r \neq 2$ et $\pi_3 (X/A) \cong \mathbf{Z}$ (l'espace X/A est homéomorphe à S^2).

7. Pour tout $k \geqslant 2$, il existe des couples cellulaires (X, A) $(k-1)$-connexes mais non k-connexes tels que X, A sont connexes et l'espace quotient X/A est contractile. Pour indiquer un exemple, désignons par σ et α les éléments des groupes $\pi_1 ((S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^k, \mathrm{ort}_1), \mathrm{bp})$, $\pi_k ((S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^k, \mathrm{ort}_1), \mathrm{bp})$ définis par les sphéroïdes

$$\mathrm{imm}_1 : S^1 \to (S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^k, \mathrm{ort}_1),$$
$$\mathrm{imm}_2 : S^k \to (S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^k, \mathrm{ort}_1)$$

et recollons à $(S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^k, \mathrm{ort}_1)$ la boule D^{k+1} en nous servant d'un sphéroïde quelconque $S^k \to (S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^k, \mathrm{ort}_1)$ de classe $2\alpha - T_\sigma \alpha$. L'espace cellulaire obtenu est justement X, tandis que A se définit comme le cercle $\mathrm{ske}_1 X$. L'espace quotient X/A peut être décrit comme le résultat du recollement de la boule D^{k+1} à S^k par l'application $S^k \to S^k$, homotope à l'identité, d'où l'on tire que cet espace est contractile (voir 1.3.7.8). La connexité des espaces X, A et la $(k-1)$-connexité du couple (X, A) étant évidentes, il suffit d'établir la non-trivialité du groupe $\pi_k (X)$. D'après *1*, $\pi_k ((S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^k, \mathrm{ort}_1), \mathrm{bp})$ est un groupe abélien libre à générateurs libres $\alpha_n = T_\sigma^n \alpha$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, tandis que $\pi_k (X)$ s'obtient de $\pi_k ((S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^k, \mathrm{ort}_1), \mathrm{bp})$ en passant au groupe quotient par le sous-groupe engendré par les éléments $2\alpha_n - \alpha_{n+1}$ (voir 6.2).

Par conséquent, le groupe $\pi_k(X)$ est isomorphe au groupe additif des nombres binaires.

8. L'homomorphisme $f_*: \pi_1(X, A, x_0) \to \pi_1(X', A', x_0')$ induit par l'application $f: (X, A, x_0) \to (X', A', x_0')$ n'est pas nécessairement un isomorphisme même dans le cas où tous les homomorphismes $f_*: \pi_r(X, x_0) \to \pi_r(X', x_0')$ et tous les homomorphismes $(\mathrm{ab}\, f)_*: \pi_r(A, x_0) \to \pi_r(A', x_0')$ sont des isomorphismes. Exemple: $X = X' = (S', \mathrm{ort}_1) \vee (I, 0)$, $A = \mathrm{imm}_1(\mathrm{ort}_2) \cup \mathrm{imm}_2(1)$, $A' = \mathrm{imm}_1(S^1) \cup \mathrm{imm}_2(1)$, $x_0 = x_0' = \mathrm{imm}_2(1)$, $f = \mathrm{rel\ id}\ X$.

9. Exercices

1. Considérons la partie de l'espace $\mathbf{C}^2$ définie par l'équation $x_1^p = x_2^q$, où p, q sont des nombres entiers premiers entre eux; prenons son intersection avec la sphère S^3. Démontrer que le groupe fondamental du complémentaire de cette intersection dans S^3 est isomorphe au groupe à générateurs α_1, α_2 liés par la relation $\alpha_1^p = \alpha_2^q$.

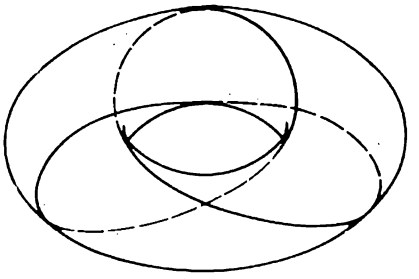


Fig. 16 ($p = 2$, $q = 3$)

(Les intersections décrites sont difféomorphes à un cercle. Elles sont situées sur le tore $|x_1| = \sqrt{2}/2$, $|x_2| = \sqrt{2}/2$ contenu dans S^3 et sont appelées *nœuds toriques*. Sur la figure 16 nous avons représenté le nœud torique et le tore correspondant situés dans $\mathbf{R}^3 = S^3 \setminus \mathrm{bp}$.)

2. Considérons la sous-variété de la variété $\mathbf{C}P^2$ définie par l'équation $x_1^m + x_2^m + x_3^m = 0$, où m est un nombre naturel (comparer à 3.5.4.2). Montrer que le groupe fondamental du complémentaire de cette sous-variété est isomorphe à $\mathbf{Z}_m$.

3. Considérons la sous-variété de la variété des vecteurs tangents à une sphère à g anses constituée des vecteurs non nuls. Montrer que le groupe fondamental de cette sous-variété est isomorphe au groupe à générateurs $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, d$ liés par les relations

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = d^{2-2g},$$

$$a_1 d = d a_1, \ldots, a_g d = d a_g, \quad b_1 d = d b_1, \ldots, b_g d = d b_g.$$

4. Considérons la sous-variété de la variété des vecteurs tangents à une sphère à h bandes constituée des vecteurs non nuls. Montrer que le groupe fondamental de cette sous-variété est isomorphe au

groupe à générateurs $c_1, \ldots, c_h$, d liés par les relations

$$c_1c_1 \ldots c_hc_h = d^{2-h},$$

$$c_1d = d^{-1}c_1, \ldots, c_hd = d^{-1}c_h.$$

5. Montrer que pour chaque groupe π qui peut être donné par un nombre fini de générateurs et de relations, il existe une variété différentiable fermée de dimension 4 dont le groupe fondamental est isomorphe à π.

6. Montrer que toute variété différentiable fermée orientable de dimension différente de 0 et de 3 est cobordante avec orientation à une variété simplement connexe.

Information. Dans le cas tridimensionnel ceci est également vrai.

7. Montrer que le groupe $\pi_2(X, A, x_0)$ envisagé dans l'exemple 8.5 est isomorphe au groupe à générateurs a, b, c liés par les relations $ac = ca$, $bc = cb$, $aba^{-1}b^{-1} = c$.

§ 4. ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE FAIBLE

1. Notions fondamentales

1. Une application continue f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est appelée *équivalence d'homotopie faible* si l'homomorphisme $f_*: \pi_r(X, x) \to \pi_r(Y, f(x))$ est un isomorphisme quels que soient $r \geqslant 0$ et $x \in X$. Cette terminologie est justifiée par les considérations suivantes: une équivalence d'homotopie est toujours une équivalence d'homotopie faible; la réciproque est fausse. Le premier fait a été établi dans 1.3.7, pour le deuxième, voir 3.5.

Il est évident que la composée de deux équivalences d'homotopie faibles est une équivalence d'homotopie faible.

2. Si $f: X \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible, alors pour tout couple cellulaire (K, L) et des applications continues $\varphi: K \to Y$, $\psi: L \to X$ quelconques vérifiant $f \circ \psi = \varphi|_L$, il existe une application continue $\chi: K \to X$ telle que $\chi|_L = \psi$ et la composée $f \circ \chi$ est L-homotope à φ. La réciproque est également vraie; qui plus est, si $f: X \to Y$ est une application continue et pour des applications quelconques $\varphi: D^r \to Y$, $\psi: S^{r-1} \to X$ $(r \geqslant 0)$ vérifiant $f \circ \psi = \varphi|_{S^{r-1}}$, il existe une application continue $\chi: D^r \to X$ telle que $\chi|_{S^{r-1}} = \psi$ et la composée $f \circ \chi$ est S^{r-1}-homotope à φ, alors f est une équivalence d'homotopie faible.

Pour démontrer la première partie, envisageons le cylindre Cyl f (voir 1.2.6.10). En vertu du théorème 2.3.1.3, il existe une homotopie $\Phi: K \times I \to \mathrm{Cyl}\, f$ de la composée des applications $K \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\mathrm{in}} \mathrm{Cyl}\, f$ telle que $\Phi(z, t) = \mathrm{imm}_1(\psi(z), 1 - t)$ pour $z \in L$ quel

que soit $t \in I$. Puisque $\mathrm{rt}\, f \circ [\mathrm{in}: X \to \mathrm{Cyl}\, f] = f$ et f est une équivalence d'homotopie faible, tandis que $\mathrm{rt}\, f$ est une équivalence d'homotopie, on voit que in est une équivalence d'homotopie faible, et par conséquent $\mathrm{in}_*: \pi_r(X, x) \to \pi_r(\mathrm{Cyl}\, f, x)$ est un isomorphisme, quels que soient $r \geqslant 0$ et $x \in X$. Ainsi le couple $(\mathrm{Cyl}\, X, X)$ est ∞-connexe (voir 1.6.5) et puisque $\Phi(L \times 1) \subset X$, il existe une L-homotopie $\Psi: K \times I \to \mathrm{Cyl}\, f$ telle que $\Psi(x, 0) = \Phi(x, 1)$, quel que soit $x \in K$, et $\Psi(K \times 1) \subset X$ (voir 2.3.1.6). Définissons l'application $\chi: K \to X$ en posant $\chi(x) = \Psi(x, 1)$. On voit que $\chi|_L = \psi$ et que le produit des homotopies $\mathrm{rt}\, f \circ \Phi$ et $\mathrm{rt}\, f \circ \Psi$ est une L-homotopie liant $f \circ \chi$ à φ.

Pour démontrer la deuxième partie il faut prouver que l'application $f_*: \pi_r(X, x) \to \pi_r(Y, f(x))$ est épimorphe et monomorphe quels que soient $x \in X$ et $r \geqslant 0$.

Démonstration de la surjectivité. Posons $\psi(S^{r-1}) = x$ et prenons en guise de φ un des sphéroïdes $(D^r, S^{r-1}) \to (Y, f(x))$ d'une classe arbitraire β de $\pi_r(Y, f(x))$; le sphéroïde que l'on obtient $\chi: (D^r, S^{r-1}) \to (X, x)$ définit une certaine classe $\alpha \in \pi_r(X, x)$ et on a $f_*(\alpha) = \beta$.

Démonstration de l'injectivité: soit $\alpha \in \pi_r(X, x)$ et $f_*(\alpha) = 0$; choisissons en guise de ψ un sphéroïde quelconque de classe α et en guise de φ une application de la boule D^{r+1} dans Y vérifiant $\varphi|_{S^r} = f \circ \psi$; l'application $\chi: D^{r+1} \to X$ qui apparaît alors prolonge ψ et donc $\alpha = 0$.

3. Si $f: X \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible, alors, pour tout espace cellulaire M, l'application $\pi(\mathrm{id}, f): \pi(M, X) \to \pi(M, Y)$ est bijective.

Démonstration. L'existence d'un élément $\alpha \in \pi(M, X)$ vérifiant $[\pi(\mathrm{id}, f)](\alpha) = \beta$ pour chaque $\beta \in \pi(M, Y)$ découle de la première partie du théorème *2* : il suffit de poser $K = M$, $L \neq \varnothing$ et prendre pour φ une application quelconque de classe β. Il en découle aussi que, pour des applications continues quelconques $\varphi_0, \varphi_1: M \to X$, l'homotopie des composées $f \circ \varphi_0$, $f \circ \varphi_1$ implique celle des applications φ_0, φ_1 elles-mêmes : en guise de K et L il faut prendre $M \times I$ et $(M \times 0) \cup (M \times 1)$, en guise de φ l'application $(M \times 0) \cup (M \times 1) \to X$ définie par les formules $(x, 0) \mapsto \varphi_0(x)$, $(x, 1) \mapsto \varphi_1(x)$ et, enfin, en guise de ψ, l'homotopie $M \times I \to Y$ qui joint $f \circ \varphi_0$ à $f \circ \varphi_1$.

Le cas des espaces cellulaires

4. Si X, Y sont des espaces cellulaires, alors toute équivalence d'homotopie faible $X \to Y$ est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Soit $f: X \to Y$ une équivalence d'homotopie faible. Conformément à *3*, l'application $\pi(\mathrm{id}, f): \pi(Y, X) \to \pi(Y, Y)$ est bijective ; il existe donc une application continue $g: Y \to X$ dont la classe est envoyée par l'application $\pi(\mathrm{id}, f)$ dans

la classe de l'application id. Cette dernière condition signifie que la composée $f \circ g$ est homotope à id Y, et il ne reste qu'à montrer que la composée $g \circ f$ est homotope à id X. Or ceci découle du fait que l'application π (id, f) : $\pi(X, X) \to \pi(X, Y)$ est bijective, vu qu'elle envoie les classes des applications $g \circ f$ et id X dans une même classe (ceci grâce au fait que les applications $f \circ g \circ f$ et f sont homotopes).

5. Le théorème *4* dit que des espaces cellulaires connexes X, Y sont homotopiquement équivalents lorsqu'il existe une application continue $X \to Y$ qui induit des isomorphismes des groupes d'homotopie, mais ne dit pas qu'ils le sont lorsque leurs groupes d'homotopie sont simplement isomorphes. C'est d'ailleurs faux comme le montrent des exemples simples. Posons $X = S^p \times \mathbf{R}P^q$, $Y = S^q \times \mathbf{R}P^p$ et supposons que $1 < p < q$. D'après 2.5.1 et 1.1.9, $\pi_r(X) \cong \pi_r(Y)$ quel que soit r ; montrons que X et Y ne sont pas homotopiquement équivalents. Il est évident que l'application $\mathrm{pr}_1 : S^p \times \mathbf{R}P^q \to S^p$ induit un isomorphisme du groupe $\pi_p(S^p \times \mathbf{R}P^q)$ sur $\pi_p(S^p)$; nous montrerons qu'il n'existe pas d'application continue $f : S^q \times \mathbf{R}P^p \to S^p$ qui induise un isomorphisme du groupe $\pi_p(S^q \times \mathbf{R}P^p)$ sur $\pi_p(S^p)$. Si une telle application f existait, l'application composée

$$S^p \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbf{R}P^p \xrightarrow{x \mapsto (\mathrm{ort}_1,\, x)} S^q \times \mathbf{R}P^p \xrightarrow{f} S^p \tag{1}$$

induirait un automorphisme du groupe $\pi_p(S^p)$; or, d'après 2.3.2.4, toute application continue $\mathbf{R}P^p \to S^p$ est homotope à une application qui envoie $\mathbf{R}P^{p-1}$ dans ort_1, et par conséquent l'application (1) est homotope à la composée des projections

$$S^p \to \mathbf{R}P^p \to \mathbf{R}P^p/\mathbf{R}P^{p-1} = S^p$$

avec une certaine application continue $S^p \to S^p$ et ne peut donc être de degré ± 1, puisque la projection composée indiquée est de degré 0 pour p pair et de degré 2 pour p impair.

L'exemple suivant montre le même phénomène dans le cas simplement connexe. Posons $X = S^3 \times \mathbf{C}P^\infty$, $Y = S^2$. D'après 2.2.10, 2.5.2 et 1.1.9, $\pi_r(X) \cong \pi_r(Y)$ quel que soit r ; néanmoins ces espaces ne sont pas homotopiquement équivalents puisque l'application $\mathrm{pr}_1 : S^3 \times \mathbf{C}P^\infty \to S^3$ n'est pas homotope à l'application constante (car elle induit un isomorphisme du groupe $\pi_3(S^3 \times \mathbf{C}P^\infty) = \mathbf{Z}$ sur $\pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$), tandis que toute application continue $S^2 \to S^3$ est homotope à l'application constante.

6. Un espace topologique est appelé *homotopiquement cellulaire* s'il est homotopiquement équivalent à un espace cellulaire. Il découle du théorème *4* que si les espaces X, Y sont homotopiquement cellulaires, alors chaque équivalence d'homotopie faible $X \to Y$ est une équivalence d'homotopie.

Il découle du théorème 3.5.2.13 que toutes les variétés différentiables compactes sont homotopiquement cellulaires.

Un exemple d'un espace qui n'est pas homotopiquement cellulaire a déjà été donné dans 2.3.5.4; cet espace n'est pas connexe. Un exemple d'un espace connexe (même ∞-connexe) qui n'est pas homotopiquement cellulaire figure dans 4.1.

Information. Tous les SCNR sont des espaces homotopiquement cellulaires. Toutes les variétés topologiques (compactes aussi bien que non compactes) sont des espaces homotopiquement cellulaires. Le produit de deux espaces homotopiquement cellulaires est un espace du même type. Si Y est un espace homotopiquement cellulaire, il en est de même pour l'espace $\mathscr{C}(X, Y)$ quel que soit l'espace compact X. Si Y est homotopiquement équivalent à un espace cellulaire dénombrable, alors $\mathscr{C}(X, Y)$ est homotopiquement équivalent à un espace cellulaire dénombrable pour tout espace X à base dénombrable. On trouvera les démonstrations dans [16].

k-équivalence

7. Une application continue f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est appelée *k-équivalence* si $\forall\, x \in X$ l'homomorphisme $f_*: \pi_r(X, x) \to \pi_r(Y, f(x))$ est un isomorphisme lorsque $r < k$ et un épimorphisme lorsque $r = k$. Ici k est un entier non négatif; l'équivalence d'homotopie faible est parfois appelée ∞-équivalence.

Il est évident que la composée de deux k-équivalences est une k-équivalence.

8. *Si $f: X \to Y$ est une k-équivalence, alors pour un couple cellulaire quelconque (K, L) vérifiant $K \setminus L \subset \operatorname{ske}_k K$ et des applications continues $\varphi: K \to Y$, $\psi: L \to X$ telles que $f \circ \psi = \varphi|_L$, il existe une application continue $\chi: K \to X$ telle que $\chi|_L = \psi$ et la composée $f \circ \chi$ est L-homotope à φ. La réciproque est également vraie; qui plus est, si $f: X \to Y$ est une application continue et pour des applications continues quelconques $\varphi: D^r \to Y$, $\psi: S^{r-1} \to X$, $0 \leqslant r \leqslant k$, vérifiant $f \circ \psi = \varphi|_{S^{r-1}}$, il existe une application continue $\chi: D^r \to X$ telle que $\chi|_{S^{r-1}} = \psi$ et la composée $f \circ \chi$ est S^{r-1}-homotope à φ, alors f est une k-équivalence.*

La démonstration répète celle du théorème 2 avec des modifications évidentes: le couple $(\operatorname{Cyl} f, X)$ est maintenant k-connexe, tandis que pour la démonstration de la surjectivité il faut supposer que $r \leqslant k$ et pour la démonstration de l'injectivité, que $r < k$.

9. *Si $f: X \to Y$ est une k-équivalence, alors l'application $\pi(\mathrm{id}, f)$: $\pi(M, X) \to \pi(M, Y)$ est bijective pour tout espace cellulaire M vérifiant $\dim M < k$ et a pour image l'ensemble $\pi(M, Y)$ tout entier pour tout espace cellulaire M vérifiant $\dim M = k$.*

La démonstration répète celle du théorème *3* à condition de remplacer les renvois au théorème *2* par des renvois au théorème *8*.

10. Si X est un espace cellulaire tel que $\dim X < k$ *et Y un espace cellulaire tel que* $\dim Y \leqslant k$, *alors chaque k-équivalence $X \to Y$ est une équivalence d'homotopie.*

La démonstration répète celle du théorème *4*, sauf que le renvoi au théorème *3* doit être remplacé par un renvoi au théorème *9*.

Le cas relati

11. Une application f d'un couple topologique (X, A) dans un couple topologique (Y, B) est appelée *équivalence d'homotopie faible* si les applications $\operatorname{abs} f: X \to Y$ et $\operatorname{ab} f\ (= \operatorname{ab} \operatorname{abs} f): A \to B$ sont des équivalences d'homotopie faibles.

Remarquons que si $f: (X, A) \to (Y, B)$ est une équivalence d'homotopie faible, alors l'homomorphisme $f_*: \pi_r(X, A, x) \to \pi_r(Y, B, f(x))$ est un isomorphisme quels que soient $r \geqslant 1$ et $x \in A$; pour la démonstration il suffit d'appliquer le lemme des cinq (voir 1.5.19) à l'homomorphisme de la suite d'homotopie du couple (X, A) dans la suite d'homotopie du couple (Y, B) induit par l'application f. Autre conséquence du même lemme des cinq : si $f: (X, A \neq \varnothing) \to (Y, B)$ est une application continue telle qu'une des applications $\operatorname{abs} f: X \to Y$, $\operatorname{ab} f: A \to B$ est une équivalence d'homotopie faible et tous les homomorphismes $f_*: \pi_r(X, A, x) \to \pi_r(Y, B, f(x))$,

$$f_*: \pi_0(X, x) \to \pi_0(Y, f(x)), \quad (\operatorname{ab} f)_*: \pi_0(A, x) \to \pi_0(B, f(x))$$

pour $r \geqslant 1$ et $x \in A$ sont des isomorphismes, alors f est une équivalence d'homotopie faible.

12. Si $f: (X, A) \to (Y, B)$ est une équivalence d'homotopie faible, alors pour tout couple cellulaire (M, N) l'application $\pi(\mathrm{id}, f)$: $\pi(M, N; X, A) \to \pi(M, N; Y, B)$ *est bijective.*

D é m o n s t r a t i o n. Montrons d'abord que chaque application continue $\varphi: (M, N) \to (Y, B)$ est homotope à la composée d'une application continue $(M, N) \to (X, A)$ avec f. D'après *2*, il existe une application continue $\psi: N \to A$ dont la composée avec $\operatorname{ab} f: A \to B$ est homotope à $\operatorname{ab} \varphi: N \to B$. D'après 2.3.1.3, l'homotopie qui joint $\operatorname{ab} \varphi$ à $\operatorname{ab} f \circ \psi$ se prolonge en une homotopie de l'application φ, de sorte qu'il existe une application $\varphi': (M, N) \to (Y, B)$, $\operatorname{ab} \varphi' = \operatorname{ab} f \circ \psi$, homotope à φ. Enfin, toujours en vertu de *2*, il existe une application continue $\chi: M \to X$ qui prolonge ψ et telle que la composée $f \circ \chi$ est N-homotope à φ'. Il est clair que $\chi(N) \subset B$ et que les applications $f \circ \chi$, $\varphi: (M, N) \to (Y, B)$ sont homotopes.

Il reste à démontrer que pour des applications continues $\varphi_0, \varphi_1: (M, N) \to (X, A)$ le fait que les composées $f \circ \varphi_0$, $f \circ \varphi_1$ sont homo-

topes implique que les applications φ_0, φ_1 le sont aussi. Supposons que Φ: $(M \times I, N \times I) \to (Y, B)$ est une homotopie qui joint $f \circ \varphi_0$ à $f \circ \varphi_1$. D'après *2*, il existe une homotopie Ψ: $N \times I \to A$ qui joint ab φ_0: $N \to A$ à ab φ_1: $N \to A$, telle que la composée ab $f \circ \Psi$ est $[(N \times 0) \cup (N \times 1)]$-homotope à l'application ab Φ: $N \times I \to B$. D'après 2.3.1.3, la $[(N \times 0) \cup (N \times 1)]$-homotopie qui joint ab Φ à ab $f \circ \Psi$ se prolonge en une $[(M \times 0) \cup (M \times 1)]$-homotopie de l'application Φ ; par conséquent, il existe une homotopie Φ': $(M \times I, N \times I) \to (Y, B)$ qui joint $f \circ \varphi_0$ à $f \circ \varphi_1$ telle que $[\text{ab } \Phi'$: $N \times I \to B] = \text{ab } f \circ \Psi$. Enfin, en appliquant toujours *2*, nous voyons qu'il existe une application continue X: $M \times I \to X$ qui prolonge Ψ telle que $X(x, 0) = \varphi_0(x)$, $X(x, 1) = \varphi_1(x)$ quel que soit $x \in M$; ce sera l'homotopie cherchée qui joint φ_0 à φ_1.

13. Si les couples (X, A), (Y, B) *sont cellulaires, alors toute équivalence d'homotopie faible* $(X, A) \to (Y, B)$ *est une équivalence d'homotopie.*

La démonstration répète celle du théorème *4*, sauf qu'il faut remplacer les renvois au théorème *3* par des renvois au théorème *12*.

2. Autres constructions

1. Nous avons vu que beaucoup d'opérations décrites au § 1.2 transforment les équivalences d'homotopie faibles en des équivalences d'homotopie faibles. Il est clair, par exemple, que pour toute famille d'équivalences d'homotopie faibles $\{f_\mu: X_\mu \to X'_\mu\}_{\mu \in M}$ l'application $\sqcup_\mu f_\mu$: $\sqcup_\mu X_\mu \to \sqcup_\mu X'_\mu$ est une équivalence d'homotopie faible et que pour des équivalences d'homotopie faibles quelconques f_1: $X_1 \to X'_1$, ..., f_n: $X_n \to X'_n$ l'application

$$f_1 \times \ldots \times f_n: X_1 \times \ldots \times X_n \to X'_1 \times \ldots \times X'_n$$

est une équivalence d'homotopie faible. On voit également que la limite d'une suite d'équivalences d'homotopie faibles est une équivalence d'homotopie faible.

Des théorèmes analogues qui se rapportent à d'autres constructions nécessitent des hypothèses supplémentaires. Nous les exposons dans ce qui suit.

2. Soit f une application d'une triade (X, A, B) *dans une triade* (X', A', B') *telle que* ab f: $A \to A'$, ab f: $B \to B'$, ab f: $A \cap B \to A' \cap B'$ *sont des équivalences d'homotopie faibles. Si* $\text{Int } A \cup \text{Int } B = X$ *et* $\text{Int } A' \cup \text{Int } B' = X'$, *alors* abs f: $X \to X'$ *est également une équivalence d'homotopie faible.*

Démonstration. D'après le théorème 1.2, il suffit de construire, pour des applications continues données φ: $D^r \to X'$, ψ: $S^{r-1} \to X$ vérifiant $f \circ \psi = \varphi|_{S^{r-1}}$, une application continue χ: $D^r \to X$ telle que $\chi|_{S^{r-1}} = \psi$ et la composée $f \circ \chi$ est S^{r-1}-homotope

à φ. Il est évident que les ensembles

$$U = [\varphi^{-1}(\operatorname{Int} A') \cap \operatorname{Int} D^r] \cup \psi^{-1}(\operatorname{Int} A),$$

$$V = [\varphi^{-1}(\operatorname{Int} B') \cap \operatorname{Int} D^r] \cup \psi^{-1}(\operatorname{Int} B)$$

sont ouverts et recouvrent D^r. Par conséquent, il existe un ε positif tel que chaque sous-ensemble de D^r de diamètre inférieur à ε est contenu dans U ou dans V. Prenons une triangulation de S^{r-1} telle que les diamètres de tous ses simplexes soient inférieurs à ε et prolongeons-la, en conservant cette propriété, à D^r. Soient K la réunion des simplexes situés dans U, et L la réunion des simplexes situés dans V. Il est clair que K et L sont des sous-espaces de la boule D^r au sens simplicial et que $\psi(K \cap S^{r-1}) \subset \operatorname{Int} A$, $\psi(L \cap S^{r-1}) \subset \subset \operatorname{Int} B$, $\varphi(K) \subset \operatorname{Int} A'$, $\varphi(L) \subset \operatorname{Int} B'$.

En vertu du théorème 1.2, il existe une application continue χ_0: $K \cap L \to A \cap B$ telle que $\chi_0 \mid_{K \cap L \cap S^{r-1}} = \operatorname{ab} \psi$ et la composée des applications χ_0 et $\operatorname{ab} f$: $A \cap B \to A' \cap B'$ est $(K \cap L \cap S^{r-1})$-homotope à l'application $\operatorname{ab} \varphi$: $K \cap L \to A' \cap B'$. D'après 2.3.1.3, la $(K \cap L \cap S^{r-1})$-homotopie qui joint $\operatorname{ab} \varphi$: $K \cap L \to A' \cap B'$ à $\operatorname{ab} f \circ \chi_0$ peut être prolongée en une $(K \cap S^{r-1})$-homotopie de l'application $\operatorname{ab} \varphi$: $K \to A'$ et en une $(L \cap S^{r-1})$-homotopie de l'application $\operatorname{ab} \varphi$: $L \to B'$; les deux dernières homotopies définissent une S^{r-1}-homotopie qui joint φ à une application φ': $D^r \to X'$ telle que $\varphi' \mid_{K \cap L} = (f \mid_{A \cap B}) \circ \chi_0$ et $\varphi'(K) \subset A'$, $\varphi'(L) \subset B'$. Enfin, toujours en vertu du théorème 1.2, il existe des applications continues χ_1: $K \to A$, χ_2: $L \to B$ telles que $\chi_0 = \operatorname{ab} \chi_1$, $\chi_0 = = \operatorname{ab} \chi_2$ et la composée de l'application χ_1 avec $\operatorname{ab} f$: $A \to A'$ est $(K \cap L)$-homotope à $\operatorname{ab} \varphi'$: $K \to A'$, tandis que la composée de l'application χ_2 avec $\operatorname{ab} f$: $B \to B'$ est $(K \cap L)$-homotope à $\operatorname{ab} \varphi'$: $L \to B'$. Ensemble, χ_1 et χ_2 définissent l'application cherchée χ: $D^r \to X$.

3. Soient (X, C), (X', C') des couples de Borsuk, Y, Y' des espaces topologiques, φ: $C \to Y$, φ': $C' \to Y'$ des applications continues et f: $(X, C) \to (X', C')$, g: $Y \to Y'$ des applications continues telles que $g \circ \varphi = \varphi' \circ \operatorname{ab} f$. Si f, g sont des équivalences d'homotopie faibles, alors l'application F: $Y \cup_\varphi X \to Y' \cup_{\varphi'} X'$ définie par les formules

$$F \circ [\operatorname{imm}_1 : X \to Y \cup_\varphi X] = [\operatorname{imm}_1 : X' \to Y' \cup_{\varphi'} X'] \circ f,$$

$$F \circ [\operatorname{imm}_2 : Y \to Y \cup_\varphi X] = [\operatorname{imm}_2 : Y' \to Y' \cup_{\varphi'} X'] \circ g$$

est également une équivalence d'homotopie faible.

Démonstration. Recollons X, Y et $C \times I$ en identifiant chaque point $(c, 0)$ de $C \times I$ avec le point c de X et chaque point $(c, 1)$ de $C \times I$ avec le point $\varphi(c)$ de Y. Désignons l'espace ainsi obtenu par Z et les immersions imm_1: $X \to Z$, imm_2: $Y \to Z$, imm_3: $C \times I \to Z$, par α, β, γ. Nous montrerons tout d'abord que l'appli-

cation $h: Z \to Y \cup_\varphi X$ définie par les formules

$$h \circ \alpha = [\mathrm{imm}_1: X \to Y \cup_\varphi X],\ h \circ \beta = [\mathrm{imm}_2: Y \to Y \cup_\varphi X],$$
$$h \circ \gamma = [\mathrm{imm}_2: Y \to Y \cup_\varphi X] \circ \varphi \circ [\mathrm{pr}_1: C \times I \to C]$$

est une équivalence d'homotopie. Pour cela prolongeons l'homotopie $\gamma: C \times I \to Z$ en une homotopie $\Gamma: X \times I \to Z$ de l'application α et définissons l'application $k: Y \cup_\varphi X \to Z$ par les formules $k(\mathrm{imm}_1(x)) = \Gamma(x, 1)$, $x \in X$, $k \circ \mathrm{imm}_2 = \beta$. Les formules

$$\begin{cases} H(\mathrm{imm}_1(x), t) = h(\Gamma(x, t)) & \text{pour } x \in X, \quad t \in I, \\ H(\mathrm{imm}_2(y), t) = \mathrm{imm}_2(y) & \text{pour } y \in Y, \quad t \in I, \end{cases}$$

$$\begin{cases} K(\alpha(x), t) = \Gamma(x, t) & \text{pour } x \in X, \quad t \in I, \\ K(\beta(y), t) = \beta(y) & \text{pour } y \in Y, \quad t \in I, \\ K(\gamma(c, t), u) = \gamma(c, tu - u + 1) & \text{pour } c \in C, \quad t \in I, \quad u \in I \end{cases}$$

définissent les homotopies

$$H: (Y \cup_\varphi X) \times I \to Y \cup_\varphi X, \quad K: Z \times I \to Z$$

qui joignent $h \circ k$ avec id $(Y \cup_\varphi X)$ et $k \circ h$ avec id Z, de sorte que l'application k est homotopiquement inverse de h.

Répétons toutes ces constructions en remplaçant les objets $X, C, Y, \varphi, \ldots$ sans primes par les mêmes objets avec des primes. Nous obtenons l'espace Z', les applications $\alpha': X' \to Z'$, $\beta': Y' \to Z'$, $\gamma': C' \times I \to Z'$ et l'équivalence d'homotopie $h': Y' \cup_{\varphi'} X' \to Z'$. Soit $G: Z \to Z'$ l'application définie par les formules $G \circ \alpha = \alpha' \circ f$, $G \circ \beta = \beta' \circ g$, $G \circ \gamma = \gamma' \circ (\mathrm{ab}\, f \times \mathrm{id}\, I)$. Il est clair qu'elle applique la triade

$$(Z, \alpha(X) \cup \gamma(C \times [0, 1/2]), \quad \beta(Y) \cup \gamma(C \times I))$$

dans la triade

$$(Z', \alpha'(X') \cup \gamma'(C' \times [0, 1/2]), \quad \beta'(Y') \cup \gamma'(C' \times I))$$

les hypothèses du théorème *2* étant conservées. En appliquant ce dernier théorème, nous voyons que G est une équivalence d'homotopie faible, d'où l'on obtient, en se servant de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y \cup_\varphi X & \xrightarrow{F} & Y' \cup_{\varphi'} X' \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ Z & \xrightarrow{G} & Z', \end{array}$$

que F est une équivalence d'homotopie faible.

4. Soit f une application de la triade (X, A, B) dans la triade (X', A', B') telle que ab $f: A \to A'$, ab $f: B \to B'$ *et* ab $f: A \cap B \to A' \cap B'$ *sont des équivalences d'homotopie faibles. Si $(A, A \cap B)$,*

$(A', A' \cap B')$ *sont des couples de Borsuk, alors* abs $f: X \to X'$ *est également une équivalence d'homotopie faible.*

Ceci découle du théorème *3*, puisque $X = B \cup_{\mathrm{in}} A$, $X' = B' \cup_{\mathrm{in}} A'$, où dans la première égalité $\mathrm{in} = [\mathrm{in}: A \cap B \to B]$ et dans la deuxième, $\mathrm{in} = [\mathrm{in}: A' \cap B' \to B']$.

5. Si (X, A), (X', A') *sont des couples de Borsuk et* $f: (X, A) \to (X', A')$ *est une équivalence d'homotopie faible, alors* fact f: $X/A \to X'/A'$ *est également une équivalence d'homotopie faible.*

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème *3* au cas $Y = D^0$, $Y' = D^0$.

6. Si $f: X \to X'$ *est une équivalence d'homotopie faible, alors il en est de même pour* su f: su $X \to$ su X'.

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème *5* à l'application rel cône f: (cône X, X) $\to$ (cône X', X').

7. Si $f: X \to X'$, $g: Y \to Y'$ *sont des équivalences d'homotopie faibles, alors il en est de même pour* $f * g: X * Y \to X' * Y'$.

Démonstration. Désignons par A, B les images des ensembles $X \times Y \times [0, 2/3]$, $X \times Y \times [1/3, 1]$ par la projection $X \times Y \times I \to X * Y$ et par A', B' les images des ensembles $X' \times Y' \times [0, 2/3]$, $X' \times Y' \times [1/3, 1]$ par la projection $X' \times Y' \times I \to X' * Y'$. Il est clair que $f * g$ applique A dans A' et B dans B' et l'application

$$\mathrm{rel}\,(f * g): (X * Y, A, B) \to (X' * Y', A', B')$$

vérifie les hypothèses du théorème *2*. Celui-ci implique que $f * g$ est une équivalence d'homotopie faible.

8. Si $f: X \to Y$ *est une équivalence d'homotopie faible et* K *un espace cellulaire localement fini, alors* $\mathscr{C}(\mathrm{id}, f): \mathscr{C}(K, X) \to \mathscr{C}(K, Y)$ *est une équivalence d'homotopie faible.*

Il suffit de démontrer que, pour des applications continues quelconques

$$\varphi: D^r \to \mathscr{C}(K, Y), \quad \psi: S^{r-1} \to \mathscr{C}(K, X)$$

qui vérifient $\mathscr{C}(\mathrm{id}, f) \circ \psi = \varphi|_{S^{r-1}}$, il existe une application continue $\chi: D^r \to \mathscr{C}(K, X)$ telle que $\chi|_{S^{r-1}} = \psi$ et la composée $\mathscr{C}(\mathrm{id}, f) \circ \chi$ est S^{r-1}-homotope à φ (voir 1.2). Considérons les applications $\hat{\varphi}: D^r \times K \to Y$ et $\hat{\psi}: S^{r-1} \times K \to X$ (voir 1.2.7.6 et 2.1.4.3). Elles sont continues et $f \circ \hat{\psi} = \hat{\varphi}|_{S^{r-1} \times K}$, ce qui permet d'appliquer la première partie du théorème 1.2. D'après celui-ci, il existe une application continue $\alpha: D^r \times K \to X$ et une $(S^{r-1} \times K)$-homotopie $h: (D^r \times K) \times I \to Y$ telles que $\alpha|_{S^{r-1} \times K} = \hat{\psi}$ et h joint $\hat{\varphi}$ à $f \circ \alpha$. Désignons par H la composée de l'homéomorphisme canonique $(D^r \times I) \times K \to (D^r \times K) \times I$ avec h. Posons $\chi = \check{\alpha}$

(voir toujours 1.2.7.6). Il est clair que $\chi|_{S^{r-1}} = \psi$ et que $\check{H}$ est une S^{r-1}-homotopie qui joint φ à $\mathscr{C}(\mathrm{id}, f) \circ \chi$.

9. Supposons que les espaces X_μ et X'_μ constituent avec leurs points de base x_μ et x'_μ des couples de Borsuk. Si $f_\mu : (X_\mu, x_\mu) \to (X'_\mu, x'_\mu)$ sont des équivalences d'homotopie faibles, alors il en est de même pour $\bigvee_\mu f_\mu : \bigvee_\mu (X_\mu, x_\mu) \to \bigvee_\mu (X'_\mu, x'_\mu)$.

L'assertion découle de *5*.

3. Approximation cellulaire d'un espace topologique

1. On appelle *approximation cellulaire d'un espace topologique X* tout couple (K, φ) constitué d'un espace cellulaire K et d'une équivalence d'homotopie faible $\varphi : K \to X$.

Exemple : si X est un espace de Hausdorff muni d'une partition cellulaire telle que chaque sous-ensemble compact de l'espace X coupe un nombre fini de cellules, alors l'espace cellulaire obtenu de X par affaiblissement cellulaire de la topologie constitue avec id X une approximation cellulaire de l'espace X. En particulier, si $X_1, \ldots, X_n$ sont les espaces cellulaires, alors $(X_1 \times_c \ldots \times_c X_n, \mathrm{id})$ est une approximation cellulaire de l'espace $X_1 \times \ldots \times X_n$, tandis que $(X_1 *_c \ldots *_c X_n, \mathrm{id})$ est une approximation cellulaire de l'espace $X_1 * \ldots * X_n$.

2. Tout espace topologique admet une approximation cellulaire.

Démonstration. Vu que les approximations cellulaires des composantes d'un espace topologique constituent d'une manière évidente l'approximation cellulaire de l'espace tout entier, tandis que le cas de l'espace vide est trivial, nous pouvons nous limiter au cas où l'espace X est connexe et non vide. Soit x_0 un de ses points. Nous construirons des espaces cellulaires connexes $K_0, K_1, \ldots$ à cellules de dimension nulle distinguées $y_0, y_1, \ldots$, des applications continues

$$\varphi_i : (K_i, y_i) \to (X, x_0), \quad i = 0, 1, \ldots,$$

et des plongements cellulaires

$$\eta_i : (K_{i-1}, y_{i-1}) \to (K_i, y_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

tels que φ_i est une i-équivalence et $\varphi_i \circ \eta_i = \varphi_{i-1}$. Le couple $(\lim K_i, \lim \varphi_i)$ sera alors une approximation cellulaire de l'espace X (voir 1.11.2).

La construction s'effectue par récurrence. Posons $K_0 = D^0$, $y_0 = D^0$, $\varphi_0(K_0) = x_0$ et supposons que $K_i, y_i, \eta_i, \varphi_i$ pour $i < r$ ont déjà été construits et possèdent toutes les propriétés requises. Fixons pour chaque élément α du groupe $\pi_r(X, x_0)$ un sphéroïde $f_\alpha : S^r \to X$ de classe α et pour chaque élément β du noyau N de l'homomorphisme

$$(\varphi_{r-1})_* : \pi_{r-1}(K_{r-1}, y_{r-1}) \to \pi_{r-1}(X, x_0)$$

un sphéroïde $g_\beta : S^{r-1} \to K_{r-1}$ de classe β et une application continue $h_\beta : D^r \to X$ vérifiant $h_\beta |_{S^{r-1}} = \varphi_{r-1} \circ g_\beta$. Les applications f_α, g_β, h_β définissent les applications continues

$$f : \bigvee_{\alpha \in \pi_r(X, x_0)} (S_\alpha = S^r, \operatorname{ort}_1) \to X,$$

$$g : \bigsqcup_{\beta \in N} (S_\beta = S^{r-1}) \to K_{r-1}, \quad h : \bigsqcup_{\beta \in N} (D_\beta = D^r) \to X.$$

Posons

$$K_r = [(K_{r-1} \cup_g (\bigsqcup_{\beta \in N} D_\beta)), \operatorname{imm}_2(y_{r-1})] \vee [(\bigvee_{\alpha \in \pi_r(X, x_0)} (S_\alpha, \operatorname{bp})), \operatorname{bp}]$$

et définissons η_r comme la composée des applications

$$K_{r-1} \xrightarrow{\operatorname{imm}_2} K_{r-1} \cup_g (\bigsqcup_{\beta \in N} D_\beta) \xrightarrow{\operatorname{imm}_1} K_r,$$

$\varphi_r : K_r \to X$ comme une application définie par φ_{r-1}, h et f, et y comme $\eta_r(y_{r-1})$. En appliquant les théorèmes 3.2.3 et 3.5.5, nous voyons que φ_r est une r-équivalence, $\varphi_r \circ \eta_r = \varphi_{r-1}$ et η_r est un plongement cellulaire.

3. Si (K, φ), (K', φ') sont des approximations cellulaires des espaces topologiques X, X', alors il existe, pour chaque application continue $f : X \to X'$, une application continue $g : K \to K'$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & K' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

est homotopiquement commutatif (i.e. les applications $f \circ \varphi$, $\varphi' \circ g$ sont homotopes). La classe d'homotopie de l'application g est uniquement déterminée par ces conditions.

Démonstration. L'application $\pi(\mathrm{id}, \varphi') : \pi(K, K') \to \pi(K, X')$ est bijective (voir 1.3) et donc $\pi(K, K')$ possède un élément et un seul envoyé par l'application $\pi(\mathrm{id}, \varphi')$ dans la classe de l'application $f \circ \varphi$.

4. Pour des approximations cellulaires quelconques (K, φ), (K', φ') d'un même espace topologique, il existe une équivalence d'homotopie $g : K \to K'$ telle que la composée $\varphi' \circ g$ est homotope à φ.

Pour obtenir l'application cherchée g, appliquons le théorème *3* au cas où $X' = X$ et $f = \mathrm{id}\, X$. L'application g' homotopiquement inverse s'obtient de la même manière si l'on change les rôles de (K', φ') et (K, φ) ; le fait que les composées $g \circ g'$, $g' \circ g$ sont homotopes à des identités découle à nouveau du théorème *3*.

Equivalence d'homotopie faible considérée comme relation

5. Deux espaces topologiques sont *faiblement homotopiquement équivalents* s'ils possèdent des approximations cellulaires (K, φ), (L, ψ) telles que $K = L$. Il est évident que cette relation est une équivalence dans le sens usuel.

Si, pour des espaces X, Y, il existe une équivalence d'homotopie faible $f: X \to Y$, alors X et Y sont faiblement homotopiquement équivalents; en effet, si (K, φ) est une approximation cellulaire de l'espace X, alors $(K, f \circ \varphi)$ est une approximation cellulaire de l'espace Y. La réciproque est fausse: on peut indiquer des espaces X, Y, qui sont faiblement homotopiquement équivalents, pour lesquels n'existent ni équivalence d'homotopie faible $X \to Y$, ni équivalence d'homotopie faible $Y \to X$. Un exemple est donné plus loin dans 4.2.

Si deux espaces sont homotopiquement équivalents, ils sont évidemment faiblement homotopiquement équivalents. La réciproque est fausse; par exemple, chaque espace topologique est faiblement homotopiquement équivalent à un espace cellulaire (voir *2*), mais il est faux que chaque espace topologique est homotopiquement équivalent à un espace cellulaire (voir 1.6). D'autre part, il découle du théorème 1.4 que, dans le cas cellulaire, des espaces faiblement homotopiquement équivalents sont homotopiquement équivalents.

Equivalence d'homotopie faible des fibres d'un fibré de Serre

6. Deux fibres quelconques d'un fibré de Serre à base connexe sont faiblement homotopiquement équivalents.

Démonstration. Soit ξ un fibré de Serre à base connexe et b_0, b_1 des points de la base. Fixons un chemin $s: I \to \mathrm{bs}\,\xi$ qui joint b_0 à b_1 et une approximation cellulaire (K, φ) de la fibre $\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b_0)$. L'application $\tilde{f} = [\mathrm{in}: \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b_0) \to \mathrm{tl}\,\xi] \circ \varphi$ et l'homotopie $F: K \times I \to \mathrm{bs}\,\xi$ définie par la formule $F(x, t) = s(t)$ vérifient la relation $F(x, 0) = \mathrm{pr}\,\xi \circ \tilde{f}(x)$, $x \in K$, de sorte qu'il existe une homotopie $\tilde{F}: K \times I \to \mathrm{tl}\,\xi$ de l'application $\tilde{f}$ qui recouvre F (voir 4.1.3.6). Définissons l'application $\psi: K \to \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b_1)$ par la formule $x \mapsto \tilde{F}(x, 1)$ et montrons que ψ est une équivalence d'homotopie faible.

Notons pour cela que, quels que soient le point $x \in K$ et le sphéroïde $g \in \mathrm{Sph}_r(K, x)$, la formule $(y, t) \mapsto \tilde{F}(g(y), t)$ détermine une homotopie par fibres (voir 1.7.1) entre les sphéroïdes $\varphi_\#(g)$, $\psi_\#(g)$ le long du chemin $s: I \to \mathrm{tl}\,\xi$ donné par la formule $t \mapsto \tilde{F}(g(\mathrm{ort}_1), t)$. Par conséquent, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_r(K, x) \arrow[dl, "\varphi_*"'] \arrow[dr, "\psi_*"] & \\
\pi_r(\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b_0), \varphi(x)) \arrow[rr, "T_s"] & & \pi_r(\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(b_1), \psi(x))
\end{tikzcd}$$

est commutatif (la translation T_s a été définie dans 1.7.3). Puisque T_s est un isomorphisme, la bijectivité de φ_* implique celle de ψ_*.

Approximation cellulaire d'un couple topologique

7. On appelle *approximation cellulaire d'un couple topologique* (X, A) tout couple $[(K, L), \varphi]$ constitué d'un couple cellulaire (K, L) et d'une équivalence d'homotopie faible $\varphi : (K, L) \to (X, A)$.

Dans le cas où A et L sont des points, l'approximation cellulaire $[(K, L), \varphi]$ du couple (X, A) est appelée *approximation cellulaire de l'espace X à point de base.*

8. Tout couple topologique (X, A) possède une approximation cellulaire. Qui plus est, pour chaque approximation cellulaire (L, ψ) du sous-espace A, il existe une approximation cellulaire $[(K, L), \varphi]$ du couple (X, A) telle que $\psi = \mathrm{ab}\,\varphi$.

Démonstration. Soient (M, χ) une approximation cellulaire de l'espace X (voir *2*) et $g : L \to M$ une approximation cellulaire telle que la composée $\chi \circ g$ est homotope à $[\mathrm{in} : A \to X] \circ \psi$ (voir *3* et 2.3.2.4). Posons $K = \mathrm{Cyl}\, f$ et définissons φ comme la relativisation de l'application $K \to X$ formée de χ et d'une homotopie quelconque $L \times I \to X$ qui joint $[\mathrm{in} : A \to X] \circ \psi$ à $\chi \circ g$. Il est clair que φ est une équivalence d'homotopie faible et que $\mathrm{ab}\,\varphi = \psi$.

9. Si $[(K, L), \varphi]$, $[(K', L'), \varphi']$ sont des approximations cellulaires des couples topologiques (X, A), (X', A'), alors pour chaque application continue $f : (X, A) \to (X', A')$ il existe une application continue $g : (K, L) \to (K', L')$, unique à une homotopie près, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (K, L) & \xrightarrow{g} & (K', L') \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ (X, A) & \xrightarrow{f} & (X', A') \end{array}$$

est homotopiquement commutatif. Pour deux approximations cellulaires quelconques $[(K, L), \varphi]$, $[(K', L'), \varphi']$ d'un même couple topologique, il existe une équivalence d'homotopie $g : (K, L) \to (K', L')$ telle que la composée $\varphi' \circ g$ est homotope à φ.

La démonstration répète celle des théorèmes *3* et *4* sauf qu'il faut remplacer le renvoi à 1.3 par un renvoi à 1.12.

Approximation cellulaire et construction

10. Il est clair que si (K_μ, φ_μ) est une approximation cellulaire des espaces X_μ, $\mu \in \mathrm{M}$, alors $(\bigsqcup_{\mu \in \mathrm{M}} K_\mu, \bigsqcup_{\mu \in \mathrm{M}} \varphi_\mu)$ est une approximation cellulaire de l'espace $\bigsqcup_{\mu \in \mathrm{M}} X_\mu$. Il découle du théorème 2.9 que si les espaces X_μ forment avec leurs points de base x_μ des couples

de Borsuk et $[(K_\mu, y_\mu), \varphi_\mu]$ sont leurs applications cellulaires, alors $[\bigvee_\mu (K_\mu, y_\mu), \bigvee_\mu \varphi_\mu]$ est une approximation cellulaire du bouquet $\bigvee_\mu (X_\mu, x_\mu)$.

Si $(K_1, \varphi_1), \ldots, (K_n, \varphi_n)$ sont des approximations cellulaires des espaces $X_1, \ldots, X_n$, alors, comme on peut déduire de 2.1 et *1*, $(K_1 \times_c \ldots \times_c K_n, \varphi_1 \times \ldots \times \varphi_n)$ est une approximation cellulaire du produit $X_1 \times \ldots \times X_n$. Sous les mêmes conditions, on déduit de 2.7 et de *1* que $(K_1 *_c \ldots *_c K_n, \varphi_1 * \ldots * \varphi_n)$ est une approximation cellulaire de l'espace $X_1 * \ldots * X_n$; en particulier, si (K, φ) est une approximation cellulaire de l'espace X, alors (su K, su φ) est une approximation cellulaire de l'espace su X.

Si $[(K, L), \varphi]$ est une approximation cellulaire du couple de Borsuk (X, A), alors $(K/L$, fact $\varphi: K/L \to X/A)$ est une approximation cellulaire de l'espace X/A ; ceci découle de 2.5.

Application : généralisation des théorèmes 3.3.6, 3.5.5 et 3.6.2

11 (Lemme). *Si* (X, A, B) *est une triade telle que* Int A *et* Int B *recouvrent* X *ou bien* $(A, A \cap B)$ *est un couple de Borsuk, alors il existe une triade cellulaire* (K, L, M) *et une application* $f: (K, L, M) \to (X, A, B)$ *telles que les applications* abs $f: K \to X$, ab $f: L \to A$, ab $f: M \to B$, ab $f: L \cap M \to A \cap B$ *sont des équivalences d'homotopie faibles.*

Démonstration. D'après *2*, l'espace $A \cap B$ possède une approximation cellulaire, mettons (N, χ), tandis que d'après *8*, cette dernière se prolonge en des approximations cellulaires $[(L', N), \varphi]$, $[(M', N), \psi]$ des couples $(A, A \cap B)$, $(B, A \cap B)$. Recollons à $L' \sqcup M'$ le cylindre $N \times I$ en nous servant de l'application $(N \times 0) \cup (N \times 1) \to L \sqcup M$ formée des applications $(x, 0) \mapsto \mathrm{in}_1(x)$, $(x, 1) \mapsto \mathrm{in}_2(x)$ et désignons l'espace cellulaire obtenu par K. Identifions ensuite $N \times I$, L', M' avec leurs images dans K, posons $L = (N \times I) \cup L'$, $M = (N \times I) \cup M'$ et constituons l'application $f: (K, L, M) \to (X, A, B)$ à l'aide des applications composées

$$N \times I \xrightarrow{pr_1} N \xrightarrow{\chi} A \cap B \xrightarrow{\mathrm{in}} X,$$

$$L' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\mathrm{in}} X, \quad M' \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\mathrm{in}} X.$$

Il est clair que Int $L \cup$ Int $M = K$ et que

$$\mathrm{ab}\, f: L \to A, \quad \mathrm{ab}\, f: M \to B \text{ et } \mathrm{ab}\, f: L \cap M \to A \cap B$$

sont des équivalences d'homotopie faibles. Par conséquent, abs f: $K \to X$ est également une équivalence d'homotopie faible (voir 2.2 et 2.4).

12. L'homomorphisme

$$[\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)]/\mathrm{vk}(X, A, B, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \quad (2)$$

défini dans 3.3.5 est un isomorphisme non seulement pour une triade cellulaire (X, A, B) avec A, B et $A \cap B$ connexes (comme l'affirme le théorème 3.3.6), mais également pour toute triade (X, A, B), avec A, B et $A \cap B$ connexes, pour laquelle Int A et Int B recouvrent X ou $(A, A \cap B)$ est un couple de Borsuk. Ceci découle de 3.3.6 et du lemme *11*, puisque l'homomorphisme (2) est naturel.

En particulier, le groupe fondamental d'un bouquet de deux espaces est canoniquement isomorphe au produit libre des groupes fondamentaux de ces espaces sous la condition unique que l'un d'eux constitue avec son point de base un couple de Borsuk (cf. 3.3.7).

13. Dans le théorème 3.5.5 au lieu d'exiger que le couple (X_μ, x_μ) soit cellulaire, il suffit de supposer qu'il soit un couple de Borsuk. Ceci est autorisé par le théorème *8*, par ce qui a été dit sur les bouquets dans *10* et par la commutativité du diagramme (3) dans 3.5.1.

14. Le théorème 3.6.2 et son corollaire 3.6.3 restent valables non seulement pour les couples cellulaires, mais également pour des couples de Borsuk quelconques. Ceci découle du théorème *8* et de ce qui a été dit sur les espaces quotients dans *10*.

4. Exercices

1. Considérons la réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ sur l'intervalle $0 < x \leqslant 1/\pi$ et de la ligne brisée qui joint les points successifs $(1/\pi, 0)$, $(1/\pi, 2)$, $(-1, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$. Montrer que cette réunion est ∞-connexe mais n'est pas homotopiquement cellulaire (cf. 1.6).

2. Désignons par A le sous-ensemble de la droite $\mathbf{R}$ constitué du point 0 et des points 2^n avec $n \in \mathbf{Z}$ (cf. 4.2.4.2). Montrer que les espaces

$$X = \mathbf{Z} \sqcup (A \times S^1), \quad Y = A \sqcup (\mathbf{Z} \times S^1)$$

sont faiblement homotopiquement équivalents, mais il n'existe aucune équivalence d'homotopie faible $X \to Y$ et aucune équivalence d'homotopie faible $Y \to X$ (cf. 3.5).

3. Prenons en guise de X la partie de l'espace $\mathbf{R}^3$ constituée du segment I et d'une suite de segments à extrémités $n\,\mathrm{ort}_2$, $\mathrm{ort}_1 + \mathrm{ort}_3/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Montrer que $(X, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1, I)$ est un fibré de Serre et que les fibres de ce fibré ne sont pas homotopiquement équivalentes entre elles.

4. Soient X, Y des espaces topologiques à points de base x_0, y_0 et Z un espace cellulaire localement fini à cellule de dimension nulle distinguée z_0. Montrer que si $f: X \to Y$ est une équivalence d'homo-

topie faible et $f(x_0) = y_0$, alors

$$\mathrm{ab}\,\mathscr{C}(\mathrm{id}, f): \mathscr{C}(Z, z_0; X, x_0) \to \mathscr{C}(Z, z_0; Y, y_0)$$

est une équivalence d'homotopie faible (cf. 2.8).

§ 5. MULTIPLICATION DE WHITEHEAD

1. La classe wd (m, n)

1. Dans ce paragraphe nous définissons et étudions en partie une opération sur les éléments des groupes d'homotopie qui généralise, dans un certain sens, l'action du groupe fondamental dans les groupes d'homotopie. La définition suppose donné un couple de nombres naturels m, n.

Nous commençons par une construction préliminaire très concrète. Rappelons (voir 2.1.3.2 et 2.1.5.2) que la partition cellulaire du produit $S^m \times S^n$ définie par les partitions à deux cellules standards des sphères S^m, S^n se compose de quatre cellules, la cellule de plus grande dimension ayant la dimension $m + n$ et les trois autres constituant le bouquet $(S^m, \mathrm{ort}_1) \vee (S^n, \mathrm{ort}_1)$. Ce bouquet sera désigné par $B(m, n)$ ou plus brièvement par B. L'application caractéristique standard qui correspond à la cellule de dimension $m + n$ est la composée de l'homéomorphisme canonique $D^{m+n} \to D^m \times D^n$ (voir 1.2.6.9) et de l'application $DS \times DS$. Elle applique la sphère S^{m+n-1} dans B et le point $(\mathrm{ort}_1 + \mathrm{ort}_{m+1})/\sqrt{2}$ dans $\mathrm{bp} = (\mathrm{ort}_1, \mathrm{ort}_1)$, définissant ainsi un élément du groupe $\pi_{m+n}(S^m \times S^n, B, \mathrm{bp})$ (voir 2.2.5). Nous désignerons cet élément par $\mathrm{Wd}(m, n)$ ou plus brièvement par Wd, tandis que l'élément $\partial(\mathrm{Wd})$ du groupe $\pi_{m+n-1}(B, \mathrm{bp})$, i.e. la classe du sphéroïde de recollement $S^{m+n-1} \to B$, sera désigné par $\mathrm{wd}(m, n)$ ou plus brièvement par wd.

Nous aurons également besoin de deux notations: l'homéomorphisme $B(m, n) \to B(n, m)$ qui change de place S^m et S^n sera désigné par π, le produit des sphéroïdes imm_1, imm_2: $(S^n, \mathrm{ort}_1) \to (B(m, n), \mathrm{bp})$ pour $m = n$ par μ.

2. L'ordre de la classe wd *est égal à* ∞.

Il suffit d'établir que l'ordre de la classe Wd est infini et que

$$\partial: \pi_{m+n}(S^m \times S^n, B, \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}(B, \mathrm{bp}) =$$

est un monomorphisme. La première assertion découle du fait que l'homomorphisme

$$\mathrm{pr}_*: \pi_{m+n}(S^m \times S^n, B, \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n}((S^m \times S^n)/B = S^{m+n}, \mathrm{pr}(\mathrm{bp})) = Z$$

applique Wd dans le générateur du groupe indiqué à droite. La deuxième découle de l'exactitude de la suite homotopique du couple

$(S^m \times S^n, B)$ à point de base bp puisque $\mathrm{in}_*: \pi_{m+n}(B, \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n}(S^m \times S^n, \mathrm{bp})$ est un épimorphisme (voir 3.5.4).

3. L'isomorphisme $\pi_*: \pi_{m+n-1}(B(m, n), \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}(B(n, m)\ \mathrm{bp})$ *envoie* wd (m, n) *dans* $(-1)^{mn}$ wd (n, m).

Ceci découle de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^{m+n-1} & \longrightarrow & S^{m+n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(m, n) & \xrightarrow{\pi} & B(n, m) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales désignent les sphéroïdes (indiqués dans *1*) qui représentent wd (m, n) et wd (n, m), tandis que l'application horizontale supérieure se définit par la formule

$$(x_1, \ldots, x_{m+n}) \mapsto (x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}, x_1, \ldots, x_m).$$

(Le degré de la dernière application est égal à $(-1)^{mn}$.)

4. Si $m = 1$, *alors*

$$\mathrm{wd}\,(m, n) = \mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n)\,[T_{\mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_1)}\,\mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n)]^{-1}.$$

En particulier, wd $(1, 1) = \alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}$ *où* α_1, α_2 *désignent* (*comme au p.* 3.1) *les éléments* $\mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_1)$, $\mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_1)$ *du groupe* $\pi_1(B(1, 1), \mathrm{bp})$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après *1*, wd $(1, n)$ peut être représenté par le sphéroïde $S^n \to B(1, n)$ défini par la formule

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto$$
$$\mapsto \begin{cases} \mathrm{imm}_1 \circ DS(\sqrt{2}\,x_1) & \text{pour } |x_1| \leqslant 1/\sqrt{2}, \\ \mathrm{imm}_2 \circ DS(\sqrt{2}\,(x_2, \ldots, x_{n+1})) & \text{pour } |x_1| \geqslant 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ce sphéroïde est évidemment homotope au produit du sphéroïde

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto$$
$$\mapsto \begin{cases} \mathrm{bp} & \text{pour } x_1 \leqslant 1/\sqrt{2}, \\ \mathrm{imm}_2 \circ DS(\sqrt{2}\,(x_2, \ldots, x_{n+1})) & \text{pour } x_1 \geqslant 1/\sqrt{2} \end{cases} \tag{1}$$

par le sphéroïde que l'on obtient du sphéroïde

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto$$
$$\mapsto \begin{cases} \mathrm{imm}_2 \circ DS(\sqrt{2}\,(x_2, \ldots, x_{n+1})) & \text{pour } x_1 \leqslant -1/\sqrt{2}, \\ \mathrm{bp} & \text{pour } x_1 \geqslant -1/\sqrt{2} \end{cases} \tag{2}$$

par translation le long du chemin $t \mapsto \mathrm{imm}_1 \circ DS(1 - 2t)$. Il ne reste qu'à remarquer que le sphéroïde (1) appartient à la classe $\mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n)$, le sphéroïde (2), à la classe $[\mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n)]^{-1}$ et le chemin, à la classe $\mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_1)$.

5. La classe wd (m, n) *appartient au noyau de chacun des trois homomorphismes suivants*

$$\mathrm{pr}_{1*}: \pi_{m+n-1}(B, \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}(S^m, \mathrm{ort}_1),$$
$$\mathrm{pr}_{2*}: \pi_{m+n-1}(B, \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}(S^n, \mathrm{ort}_1),$$
$$\mathrm{in}_*: \pi_{m+n-1}(B, \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}(S^m \times S^n, \mathrm{bp}).$$

Pour le troisième homomorphisme ceci découle de l'exactitude de la suite homotopique du couple $(S^m \times S^n, B)$ à point de base bp, pour le deuxième et le premier — des égalités $[\mathrm{pr}_1: B \to S^m] = [\mathrm{pr}_1: S^m \times S^n \to S^m] \circ \mathrm{in}$, $[\mathrm{pr}_2: B \to S^n] = [\mathrm{pr}_2: S^m \times S^n \to S^n] \circ \mathrm{in}$.

6. L'homomorphisme $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mu)_*: \pi_{m+n-1}(B(m, n), \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}((S^n, \mathrm{ort}_1) \vee (B(n, n), \mathrm{bp}), \mathrm{bp})$ *applique* wd (m, n) *dans*

$$[(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_1)_* (\mathrm{wd}(m, n))]\, [(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_2)_* (\mathrm{wd}(m, n))].$$

Démonstration. Pour $m = 1$ ainsi que pour $n = 1$ ceci découle de *4* et *3*; supposons que $m > 1$ et $n > 1$. Le bouquet $(S^m, \mathrm{ort}_1) \vee (B(n, n), \mathrm{bp})$ étant simplement connexe, tandis que le produit $S^m \times B(n, n)$ s'en obtient par adjonction des cellules de dimension $m + n$ aux sphéroïdes de recollement $S^{m+n-1} \to (S^m, \mathrm{ort}_1) \vee (B(n, n), \mathrm{bp})$ des classes $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_1)_* \times (\mathrm{wd}(m, n))$, $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_2)_* (\mathrm{wd}(m, n))$, le noyau de l'homomorphisme

$$\mathrm{in}_*: \pi_{m+n-1}((S^m, \mathrm{ort}_1) \vee (B(n, n), \mathrm{bp}), \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}(S^m \times B(n, n), \mathrm{bp})$$

est engendré par les classes indiquées. Ce noyau contient également la classe $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mu)_* (\mathrm{wd}(m, n))$, puisque wd (m, n) appartient au noyau de l'homomorphisme induit par l'inclusion $B(m, n) \to S^m \times S^n$ (voir *5*), tandis que $\mathrm{id}\, S^m \vee \mu$ est l'abréviation de l'application $\mathrm{id}\, S^m \times \mu: S^m \times S^n \to S^m \times B(n, n)$. Par conséquent

$$(\mathrm{id}\, S^m \vee \mu)_* (\mathrm{wd}(m, n)) = [(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_1)_* (\mathrm{wd}(m, n))]^{k_1}\, [(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_2)_* \times (\mathrm{wd}(m, n))]^{k_2} \qquad (3)$$

lorsque $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ et il ne reste qu'à démontrer les égalités $k_1 = k_2 = 1$.

Il est évident que les composées $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{pr}_1) \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mu)$ et $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{pr}_2) \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mu)$, où pr_1, pr_2 sont les projections du bouquet $B(n, n)$ sur S^n, sont homotopes à $\mathrm{id}\, B(m, n)$, les composées $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{pr}_1) \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_1)$ et $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{pr}_2) \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_2)$ coïncident avec $\mathrm{id}\, B(m, n)$, tandis que les composées $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{pr}_1) \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_2)$ et $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{pr}_2) \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_1)$ coïncident.

avec l'application composée $B(m, n) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} S^m \xrightarrow{\mathrm{imm}_1} B(m, n)$. En appliquant aux deux membres de l'égalité (3) les homomorphismes $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{pr}_1)_*$, $(\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{pr}_2)_*$ et en nous servant de la proposition *5*, nous obtenons les égalités

$$\mathrm{wd}\,(m, n) = \mathrm{wd}\,(m, n)^{k_1}, \quad \mathrm{wd}\,(m, n) = \mathrm{wd}\,(m, n)^{k_2}$$

qui impliquent, en vertu de *2*, que $k_1 = 1$, $k_2 = 1$.

7. La classe wd (m, n) *appartient au noyau de l'homomorphisme* su : $\pi_{m+n-1}(B(m, n), \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n}(\mathrm{su}\,(B(m, n), \mathrm{bp}) = B(m+1, n+1), \mathrm{bp})$.

Démonstration. D'après 2.1.1, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{m+n-1}(S^m, \mathrm{ort}_1) & \xleftarrow{\mathrm{pr}_{1*}} & \pi_{m+n-1}(B(m, n), \mathrm{bp}) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{2*}} & \pi_{m+n-1}(S^n, \mathrm{ort}_1) \\
\downarrow \mathrm{su} & & \downarrow \mathrm{su} & & \downarrow \mathrm{su} \\
\pi_{m+n}(S^{m+1}, \mathrm{ort}_1) & \xleftarrow{\mathrm{pr}_{1*}} & \pi_{m+n}(B, (m+1, n+1), \mathrm{bp}) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{2*}} & \pi_{m+n}(S^{n+1}, \mathrm{ort}_1)
\end{array}$$

est commutatif. Il découle de cette commutativité et de la proposition *5* que su (wd (m, n)) appartient au noyau de chacun des homomorphismes pr_{1*}, pr_{2*}, i.e. au noyau de l'homomorphisme somme

$$\pi_{m+n}(B(m+1, n+1), \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n}(S^{m+1}, \mathrm{ort}_1) \oplus \\ \oplus\, \pi_{m+n}(S^{n+1}, \mathrm{ort}_1);$$

il reste à se rappeler que ce dernier homomorphisme est un isomorphisme (voir 3.5.5).

2. Définition et principales propriétés du produit de Whitehead

1. Soient X un espace à point de base x_0 et α, β des éléments des groupes $\pi_m(X, x_0)$, $\pi_n(X, x_0)$. Il est évident que la classe d'homotopie de l'application $h: (B, \mathrm{bp}) \to (X, x_0)$ formée par les sphéroïdes $(S^m, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$, $(S^n, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$ des classes α, β ne dépend pas du choix de ces sphéroïdes. Par conséquent, l'élément $h_*(\mathrm{wd}\,(m, n))$ du groupe $\pi_{m+n-1}(X, x_0)$ est défini par les classes α, β. On l'appelle *produit de Whitehead* de ces classes et on le note $[\alpha, \beta]$.

Remarquons qu'en vertu de cette définition la classe wd (m, n) elle-même sera le produit de Whitehead des classes des sphéroïdes $\mathrm{imm}_1: (S^m, \mathrm{ort}_1) \to (B, \mathrm{bp})$, $\mathrm{imm}_2: (S^n, \mathrm{ort}_1) \to (B, \mathrm{bp})$, i.e. on a $\mathrm{wd}\,(m, n) = [\mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_m), \mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n)]$.

Il est clair que $f_*([\alpha, \beta]) = [f_*(\alpha), f_*(\beta)]$ quels que soient $\alpha \in \pi_m(X, x_0)$, $\beta \in \pi_n(X, x_0)$ et l'application continue $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Il est clair également que $T_s([\alpha, \beta]) = [T_s\alpha, T_s\beta]$ quels

que soient $\alpha \in \pi_m(X, x_0)$, $\beta \in \pi_n(X, x_0)$ et le chemin $s: I \to X$ d'origine x_0.

2. Si $\alpha \in \pi_m(X, x_0)$, $\beta \in \pi_n(X, x_0)$, *alors* $[\beta, \alpha] = (-1)^{mn}[\alpha, \beta]$.

En effet, si l'application $h: (B, \mathrm{bp}) \to (X, x_0)$ est formée des sphéroïdes $(S^m, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$, $(S^n, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$ appartenant aux classes α, β, on a

$$[\beta, \alpha] = (h \circ \pi)_* (\mathrm{wd}(n, m)) = h_* (\pi_* (\mathrm{wd}(n, m))) =$$
$$= h_* ((-1)^{mn} \mathrm{wd}(m, n)) = (-1)^{mn} [\alpha, \beta]$$

(voir (1.3).

3. Si $\alpha \in \pi_m(X, x_0)$ *et* $\beta_1, \beta_2 \in \pi_n(X, x_0)$, $n > 1$, *alors* $[\alpha, \beta_1 + \beta_2] = [\alpha, \beta_1] + [\alpha, \beta_2]$. *Si* $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_m(X, x_0)$, $m > 1$, *et* $\beta \in \pi_n(X, x_0)$, *alors* $[\alpha_1 + \alpha_2, \beta] = [\alpha_1, \beta] + [\alpha_2, \beta]$.

D'après *2*, il suffit de démontrer la première égalité. Envisageons l'application

$$h: ((S^m, \mathrm{ort}_1) \vee (B(n, n), \mathrm{bp}), \mathrm{bp}) \to (X, x_0)$$

formée de sphéroïdes quelconques $f: (S^m, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$ et $g_1, g_2: (S^n, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$ appartenant aux classes α et β_1, β_2. L'application $(B(m, n), \mathrm{bp}) \to (X, x_0)$ formée des sphéroïdes f, g_1 coïncide évidemment avec la composée $h \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_1)$, l'application constituée par f, g_2, avec $h \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_2)$, enfin l'application constituée par f et par le produit des sphéroïdes g_1, g_2, avec $h \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mu)$. Par conséquent

$$[\alpha, \beta_1 + \beta_2] = h_* \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mu)_* (\mathrm{wd}(m, n)) =$$
$$= h_* ((\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_1)_* (\mathrm{wd}(m, n)) + (\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_2)_* (\mathrm{wd}(m, n))) =$$
$$= (h \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_1))_* (\mathrm{wd}(m, n)) +$$
$$+ (h \circ (\mathrm{id}\, S^m \vee \mathrm{imm}_2))_* (\mathrm{wd}(m, n)) = [\alpha, \beta_1] + [\alpha, \beta_2].$$

4. Si $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ *et* $\beta \in \pi_n(X, x_0)$ *pour* $n \geqslant 1$ *quelconque, alors* $[\alpha, \beta] = \beta (T_\alpha \beta)^{-1}$. *En particulier, si* $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$, *alors* $[\alpha, \beta] = \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}$.

Ceci découle de 1.4.

5. Le produit $[\alpha, \beta]$ *des classes* $\alpha \in \pi_m(X, x_0)$, $\beta \in \pi_n(X, x_0)$ *appartient toujours au noyau de l'homomorphisme*

$$\mathrm{su}: \pi_{m+n-1}(X, x_0) \to \pi_{m+n}(\mathrm{su}(X, x_0), \mathrm{bp}).$$

Ceci découle de 1.7.

6. Quels que soient $\alpha \in \pi_m(X, x_0)$, $\beta \in \pi_n(Y, y_0)$, *le produit* $[\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)]$ *appartient au noyau de chacun des trois homomorphismes*

$$\mathrm{pr}_{1*}: \pi_{m+n-1}((X, x_0) \vee (Y, y_0), \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}(X, x_0),$$
$$\mathrm{pr}_{2*}: \pi_{m+n-1}((X, x_0) \vee (Y, y_0), \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}(Y, y_0),$$
$$\mathrm{in}_*: \pi_{m+n-1}((X, x_0) \vee (Y, y_0), \mathrm{bp}) \to \pi_{m+n-1}(X \times Y, \mathrm{bp}).$$

Ceci découle de 1.5.

7. La multiplication de Whitehead n'est pas, en général, associative. Ceci découle déjà de *4*: si l'on désigne (comme au p. 3.1) par α_1, α_2, α_3 les éléments $\mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_1)$, $\mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_1)$, $\mathrm{imm}_{3*}(\mathrm{sph}_1)$ du groupe $\pi_1((S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^1, \mathrm{ort}_1) \vee (S^1, \mathrm{ort}_1), \mathrm{bp})$, il s'avère que $[[\alpha_1, \alpha_2], \alpha_3] = \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1}\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}$ et $[\alpha_1, [\alpha_2, \alpha_3]] = \alpha_3\alpha_2\alpha_3^{-1}\alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}\alpha_1^{-1}$. Un autre exemple est envisagé plus loin dans 4.2.

Le cas d'un H-espace

8. Si X est un H-espace, alors $[\alpha, \beta] = 0$ quels que soient $x_0 \in X$ et $\alpha \in \pi_m(X, x_0)$, $\beta \in \pi_n(X, x_0)$.

(Ceci généralise le théorème 1.9.11.)

Il suffit de considérer le cas où x_0 est l'unité. Soient

$$f: (S^m, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0), \quad g: (S^n, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$$

des sphéroïdes appartenant aux classes α, β. Définissons l'application $h: (S^m \times S^n, \mathrm{bp}) \to (X, x_0)$ par la formule $h(x, y) = f(x)\, g(y)$ et les sphéroïdes

$$f_1: (S^m, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0), \quad g_1: (S^n, \mathrm{ort}_1) \to (X, x_0)$$

par les formules $f_1(y) = f(y)\, x_0$, $g_1(y) = g(y)\, x_0$. Il est clair que les sphéroïdes f_1, g_1 sont homotopes aux sphéroïdes f, g et que l'application $(B, \mathrm{bp}) \to (X, x_0)$ définie par f_1 et g_1 coïncide avec $h\,|_B = h \circ [\mathrm{in}: B \to S^m \times S^n]$; par conséquent, $[\alpha, \beta] = (h \circ \mathrm{in})_* \times (\mathrm{wd}\,(m, n)) = h_* \circ \mathrm{in}_*(\mathrm{wd}\,(m, n))$ et, puisque $\mathrm{in}_*(\mathrm{wd}\,(m, n)) = 0$, on a $[\alpha, \beta] = 0$.

3. Applications

1. Soient X; Y des espaces à points de base x_0, y_0 et k, l des entiers non négatifs. Si X est k-connexe, Y est l-connexe et (X, x_0), (Y, y_0) sont des couples de Borsuk, alors le noyau de l'homomorphisme

$$\mathrm{in}_*: \pi_{k+l+1}((X, x_0) \vee (Y, y_0), \mathrm{bp}) \to \pi_{k+l+1}(X \times Y, \mathrm{bp})$$

est engendré (comme sous-groupe du groupe appliqué) par les produits $[\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)]$, où $\alpha \in \pi_{k+1}(X, x_0)$, $\beta \in \pi_{l+1}(Y, y_0)$ (cf. 3.5.5 et 4.3.13).

Démonstration. Le fait que tous les produits sont contenus dans $\mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$ découle de 2.6; montrons qu'ils engendrent $\mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$. En vertu de 4.2.1, 4.2.9 et 2.3.3.2 on peut se limiter au cas où (X, x_0), (Y, y_0) sont des couples cellulaires et $\mathrm{ske}_k X = x_0$, $\mathrm{ske}_l Y = y_0$. Dans ce cas $\mathrm{ske}_{k+l+1}(X \times Y) \subset (X, x_0) \vee (Y, y_0)$ et les classes des applications de recollement des cellules de dimension $(k + l + 2)$ appartenant à $(X \times Y) \setminus [(X, x_0) \vee (Y, y_0)]$ sont, comme on voit immédiatement d'après la définition 2.1, les produits de Whitehead des classes des applications caractéristiques qui corres-

pondent aux cellules de dimension $k+1$ appartenant à $\mathrm{imm}_1(X)$ par les classes des applications caractéristiques qui correspondent aux cellules de dimension $l+1$ appartenant à $\mathrm{imm}_2(Y)$. Par conséquent, pour $k>0$ et $l>0$, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$ est engendré par les classes $[\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)]$, où $\alpha \in \pi_{k+1}(X, x_0)$ et $\beta \in \pi_{l+1}(Y, y_0)$ (voir 3.2.4); si $k>0$ et $l=0$, alors $\mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$ est engendré par les classes

$$T_{\mathrm{imm}_{2*}(\sigma)}[\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)],$$

où $\alpha \in \pi_{k+1}(X, x_0)$ et $\beta, \sigma \in \pi_1(Y, y_0)$ (voir 3.2.4); si $k=0$ et $l>0$, alors $\mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$ est engendré par les classes

$$T_{\mathrm{imm}_{1*}(\sigma)}[\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)],$$

où $\alpha, \sigma \in \pi_1(X, x_0)$ et $\beta \in \pi_{l+1}(Y, y_0)$ (voir 3.2.4); pour $k=l=0$, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{in}_*$ est engendré par les classes

$$T_{\mathrm{imm}_{1*}(\sigma_1)\mathrm{imm}_{2*}(\omega_1)\ldots\mathrm{imm}_{1*}(\sigma_q)\mathrm{imm}_{2*}(\omega_q)}[\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)],$$

où $\alpha, \sigma_1, \ldots, \sigma_q \in \pi_1(X, x_0)$ et $\beta, \omega_1, \ldots, \omega_q \in \pi_1(Y, y_0)$ (voir p. 3.3). Il reste à remarquer que quels que soient $\alpha, \sigma \in \pi_1(X, x_0)$, $\beta \in \pi_{l+1}(Y, y_0)$ avec $l>0$, on a

$$T_{\mathrm{imm}_{1*}(\sigma)}[\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)] = \\ = -[\mathrm{imm}_{1*}(\sigma), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)] + [\mathrm{imm}_{1*}(\alpha\sigma), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)];$$

quels que soient $\alpha \in \pi_{k+1}(X, x_0)$, $\beta, \sigma \in \pi_1(Y, y_0)$ avec $k>0$

$$T_{\mathrm{imm}_{2*}(\sigma)}[\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\beta)] = \\ = -[\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\sigma)] + [\mathrm{imm}_{1*}(\alpha), \mathrm{imm}_{2*}(\beta\sigma)];$$

quels que soient $\alpha, \sigma \in \pi_1(X, x_0)$ et $\beta, \omega = \pi_1(Y, y_0)$

$$T_{(\mathrm{imm}_{1*}\sigma)(\mathrm{imm}_{2*}\omega)}[\mathrm{imm}_{1*}\alpha, \mathrm{imm}_{2*}\beta] = [\mathrm{imm}_{1*}\sigma, \mathrm{imm}_{2*}\omega\beta]^{-1}[\mathrm{imm}_{1*}\sigma\alpha, \\ \mathrm{imm}_{2*}\omega\beta][\mathrm{imm}_{1*}\sigma\alpha, \mathrm{imm}_{2*}\omega]^{-1}[\mathrm{imm}_{1*}\sigma, \mathrm{imm}_{2*}\omega]$$

(voir 2.4).

2. *Pour n entier pair et positif quelconque, la classe* $[\mathrm{sph}_n, \mathrm{sph}_n]$ *est d'ordre infini dans* $\pi_{2n-1}(S^n)$. *En particulier, les groupes* $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ *sont infinis lorsque* $k \geqslant 1$.

(Cf. pp. 2.2 et 2.4.)

Démonstration. Puisque

$$\mu_*[\mathrm{sph}_n, \mathrm{sph}_n] = [\mu_*(\mathrm{sph}_n), \mu_*(\mathrm{sph}_n)] = \\ = [\mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_n) + \mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n), \mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_n) + \mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n)] = \\ = [\mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_n), \mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_n)] + [\mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n), \mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n)] + \\ + 2[\mathrm{imm}_{1*}(\mathrm{sph}_n), \mathrm{imm}_{2*}(\mathrm{sph}_n)] = \\ = \mathrm{imm}_{1*}[\mathrm{sph}_n, \mathrm{sph}_n] + \mathrm{imm}_{2*}[\mathrm{sph}_n, \mathrm{sph}_n] + 2\mathrm{wd}(n, n),$$

on a

$$2\,\mathrm{wd}\,(n, n) = \mu_*\,[\mathrm{sph}_n, \mathrm{sph}_n] - \mathrm{imm}_{1*}\,[\mathrm{sph}_n, \mathrm{sph}_n] - \\ - \mathrm{imm}_{2*}\,[\mathrm{sph}_n, \mathrm{sph}_n].$$

Si la classe $[\mathrm{sph}_n, \mathrm{sph}_n]$ avait un ordre fini, alors la classe $\mathrm{wd}\,(n, n)$, contrairement à 1.2, aurait également un ordre fini.

3. Pour chaque n pair positif, le noyau de l'homomorphisme su: $\pi_{2n-1}(S^n) \to \pi_{2n}(S^{n+1})$ *est infini.*

Ceci découle de *2* et de 2.5.

4. Exercices

1. Calculer le groupe d'homotopie de dimension 3 d'un bouquet de sphères de dimension 2.

2. Montrer que

$$[[\alpha, \beta], \gamma] \neq [\alpha, [\beta, \gamma]]$$

si

$$\alpha = \mathrm{imm}_{1*}\,(\mathrm{sph}_1)\ [\in \pi_1\,(B\,(1, 2), \mathrm{bp})],$$

$$\beta = \gamma = \mathrm{imm}_{2*}\,(\mathrm{sph}_2)\ [\in \pi_2\,(B\,(1, 2), \mathrm{bp})].$$

3. Montrer que pour des $\alpha \in \pi_m(X, x_0)$, $\beta \in \pi_n(X, x_0)$, $\gamma \in \pi_p(X, x_0)$ quelconques, $m > 1$, $n > 1$, $p > 1$, on a

$$(-1)^{pm}\,[[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{mn}\,[[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{np}\,[[\gamma, \alpha], \beta] = 0.$$

§ 6. SUITE DE LA THÉORIE DES FIBRÉS

1. Equivalence d'homotopie faible et fibré de Steenrod

1. Deux fibrés de Steenrod ξ_1, ξ_2 de même fibre standard F sont appelés *k-équivalents* s'il existe un espace cellulaire B et des k-équivalences $\varphi_1: B \to \mathrm{bs}\,\xi_1$, $\varphi_2: B \to \mathrm{bs}\,\xi_2$ tels que les fibrés $\varphi_1^!\xi_1$, $\varphi_2^!\xi_2$ soient F-équivalents. Dans cette définition $0 \leqslant k \leqslant \infty$. Le cas $k = \infty$ est le plus important. Les fibrés de Steenrod ∞-équivalents sont également appelés *fibrés faiblement homotopiquement équivalents.*

Il est clair qu'un fibré induit par un fibré de Steenrod au moyen d'une k-équivalence est k-équivalent à ce fibré. On voit également que les bases de deux fibrés de Steenrod faiblement homotopiquement équivalents le sont aussi, et l'application du lemme 1.5.19 nous montre qu'il en est de même pour leurs espaces totaux (il faut appliquer le lemme 1.5.19 aux homomorphismes des suites homotopiques des fibrés $\varphi_1^!\xi_1$, $\varphi_2^!\xi_2$ dans les suites homotopiques des fibrés ξ_1, ξ_2 induits par les applications $\mathrm{ad}\,\varphi_1: \varphi_1^!\xi_1 \to \xi_1$, $\mathrm{ad}\,\varphi_2: \varphi_2^!\xi_2 \to \xi_2$).

2. Soient ζ_1 et ζ_2 des fibrés de Steenrod de même fibre standard F. Si le fibré ζ_1 est universel, alors le fibré ζ_2 est également universel si, et seulement si, il est faiblement homotopiquement équivalent à ζ_1.

Démontrons d'abord la suffisance de cette condition, i.e. démontrons que pour chaque fibré de Steenrod ξ à fibre standard F et à base cellulaire, pour tout sous-espace (au sens cellulaire) B de l'espace bs ξ et pour toute application continue $\varphi: B \to \mathrm{bs}\ \zeta_2$ qui induit le fibré $\varphi^! \zeta_2$ F-équivalent à $\xi\,|_B$, il existe une application continue ψ: bs $\xi \to$ bs ζ_2 telle que $\psi\,|_B = \varphi$ et le fibré $\psi^! \zeta_2$ est F-équivalent à ξ (voir 4.4.2.2). D'après *1*, il existe un espace cellulaire K et des équivalences d'homotopie faibles $f_1: K \to \mathrm{bs}\ \zeta_1$ et $f_2: K \to \mathrm{bs}\ \zeta_2$ tels que les fibrés $f_1^! \zeta_1$ et $f_2^! \zeta_2$ sont F-équivalents; d'après 4.1.2, il existe une application continue $g: B \to K$ telle que la composée $f_2 \circ g$ est homotope à φ.

Dans la chaîne de F-fibrés

$$(f_1 \circ g)^! \zeta_1 = g^! (f_1^! \zeta_1),\ g^! (f_2^! \zeta_2) = (f_2 \circ g)^! \zeta_2,\ \varphi^! \zeta_2,\ \zeta|_B$$

qui apparaît alors, les fibrés voisins sont F-équivalents et par conséquent le fibré $(f_1 \circ g)^! \zeta_1$ est F-équivalent à $\xi\,|_B$. Le fibré ζ_1 étant universel, il existe une application continue h: bs $\xi \to$ bs ζ_1 telle que $h\,|_B = f_1 \circ g$, le fibré $h^! \zeta_2$ étant F-équivalent à ξ (voir à nouveau 4.4.2.2). Puisque f est une équivalence d'homotopie faible, il existe une application continue k: bs $\xi \to K$ telle que $k\,|_B = g$, la composée $f_1 \circ k$ étant homotope à h (voir 4.1.2). La restriction de l'application $f_1 \circ k$: bs $\xi \to$ bs ζ_2 à B coïncide avec $f_2 \circ g$; elle est donc homotope à φ; par conséquent, il existe une application ψ: bs $\xi \to$ bs ζ_2 homotope à $f_2 \circ k$ qui coïncide avec φ sur B. Comme dans la chaîne

$$\psi^! \zeta_2,\ (f_2 \circ k)^! \zeta_2 = k^! (f_2^! \zeta_2),\ k^! (f_1^! \zeta_1) = (f_1 \circ k)^! \zeta_1,\ h^! \zeta_1,\ \xi$$

les fibrés voisins sont F-équivalents, le fibré $\psi^! \zeta_2$ est F-équivalent à ξ.

La déduction de l'équivalence d'homotopie faible des fibrés ζ_1 et ζ_2 de leur universalité est basée sur la partie du théorème déjà démontrée. Soient (K, φ_1), (K, φ_2) des approximations cellulaires des bases des fibrés ζ_1, ζ_2. Puisque les fibrés $\varphi_1^! \zeta_1$, $\varphi_2^! \zeta_2$ sont faiblement homotopiquement équivalents, ils sont universels, et par conséquent les espaces K_1, K_2 sont homotopiquement équivalents (voir 4.4.2.4).

3 (Corollaire). *Si deux espaces sont des espaces classifiants pour un même groupe topologique, alors ils sont faiblement homotopiquement équivalents.*

4. Pour tout groupe topologique G il existe un G-fibré universel à base cellulaire.

Ceci découle de 4.4.3.4, 4.3.2 et *2*.

5. Un fibré principal est universel si, et seulement si, son espace total est ∞-connexe.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d'abord que ξ est un G-fibré universel. En vertu de *2*, ξ est faiblement homotopiquement équiva-

lent à Mi G, mais l'espace tl Mi G est ∞-connexe (voir 2.3.3.10, 4.2.7 et 1.11.2), donc l'espace tl ξ est également ∞-connexe (voir *1*).

Supposons maintenant que ξ est un G-fibré de Steenrod tel que l'espace tl ξ est ∞-connexe. Fixons une approximation cellulaire quelconque (K, φ) de l'espace bs ξ et envisageons le G-fibré $\varphi^!\xi$. Puisque le fibré Mi G est universel, $\varphi^!\xi$ est G-équivalent au fibré induit du fibré Mi G par une certaine application continue $\psi: K \to$ $\to$ bs Mi G. Les espaces tl Mi G et tl $(\varphi^!\xi)$ étant ∞-connexes et la ∞-connexité de tl $(\varphi^!\xi)$ impliquant celle de l'espace tl $(\psi^!$ Mi $G)$, l'application du lemme 1.5.19 montre que ψ est une équivalence d'homotopie faible (il faut appliquer le lemme 1.5.19 à l'homomorphisme de la suite homotopique du fibré $\psi^!$ Mi G dans la suite homotopique du fibré Mi G induit par l'application ad ψ: $\psi^!$ Mi $G \to$ $\to$ Mi G). Ainsi le fibré ξ est faiblement homotopiquement équivalent à Mi G; il est donc universel (voir *2*).

6. Si X est un espace classifiant d'un groupe topologique G, alors pour tout $r \geqslant 1$ le groupe $\pi_r(X)$ est isomorphe à $\pi_{r-1}(G)$.

En effet, d'après le théorème *5*, les homomorphismes Δ de la suite homotopique du G-fibré universel de base X sont des isomorphismes (voir 1.8.7).

7. Si X_1, X_2 sont des espaces classifiants des groupes topologiques G_1, G_2, alors $X_1 \times X_2$ est un espace classifiant du groupe topologique $G_1 \times G_2$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que si ξ_1 est un G_1-fibré universel et ξ_2 un G_2-fibré universel, alors $\xi_1 \times \xi_2$ est un $(G_1 \times G_2)$-fibré universel. Or ceci découle de *5* et 1.1.9.

8. Les théorèmes *2* et *5* restent valables pour les fibrés k-universels: si un des deux fibrés de Steenrod à même fibre standard est k-universel, alors l'autre est k-universel si, et seulement si, il est k-équivalent au premier; un fibré principal est k-universel si et seulement si son espace total est k-connexe. La démonstration est une modification évidente de celles des théorèmes *2* et *5*.

Application: fibrés universels principaux pour les groupes abéliens à système de générateurs finis

9. Quels que soient n et $m_1, \ldots, m_l$, le fibré

$$(\underbrace{\mathsf{R} \times \ldots \times \mathsf{R}}_{n} \times \underbrace{S^\infty \times \ldots \times S^\infty}_{l}, \underbrace{\mathrm{hel} \times \ldots \times \mathrm{hel}}_{n} \times \underbrace{\mathrm{pr} \times \ldots \times \mathrm{pr}}_{l}, \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n} \times L(m_1) \times \ldots \times L(m_l))$$

est un $(\mathsf{Z}^n \oplus \mathsf{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathsf{Z}_{m_l})$-fibré universel. En particulier, S^1 est un espace classifiant pour le groupe Z et $L(m)$ l'est pour le groupe Z_m.

Les espaces R et S^∞ étant ∞-connexes, ceci découle de *5* et 1.1.9.

2. Théorie des revêtements

1. Dans ce sous-paragraphe nous passons en revue les principaux revêtements d'un espace connexe non pathologique et donnons une condition d'équivalence de deux revêtements donnés. L'exposé, axé sur le groupe fondamental, est très élémentaire et s'appuie seulement sur deux théorèmes de la théorie des fibrés qui supposent donné un revêtement ξ à point de base $x \in \mathrm{tl}\,\xi$:

(i) chaque chemin dans $\mathrm{bs}\,\xi$ d'origine $\mathrm{pr}\,\xi\,(x)$ admet pour recouvrement un chemin et un seul (dans $\mathrm{tl}\,\xi$) d'origine x;

(ii) si deux chemins dans $\mathrm{bs}\,\xi$ d'origine $\mathrm{pr}\,\xi\,(x)$ sont homotopes, alors les chemins qui les recouvrent (dans $\mathrm{tl}\,\xi$) sont également homotopes et, en particulier, ont la même extrémité. (Ces théorèmes sont des conséquences immédiates des théorèmes 4.1.3.6 et 4.1.3.8.) Il est vrai qu'en réalité nous nous servons parfois d'autres faits qui se rapportent à la théorie des fibrés (par exemple, du théorème 1.8.12), néanmoins ils se déduisent tous très facilement de (i) et (ii).

Un des objets principaux de la théorie des revêtements est le *groupe du revêtement*. Rappelons que d'après 1.8.12, l'homomorphisme $\mathrm{pr}_*: \pi_1(\mathrm{tl}\,\xi, x) \to \pi_1(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{pr}\,\xi\,(x))$ est un monomorphisme pour chaque revêtement ξ à point de base $x \in \mathrm{tl}\,\xi$. L'image de ce monomorphisme est appelée *groupe du revêtement* ξ *à point de base* x; on le notera $\mathrm{gr}\,\xi\,(x)$.

2. Si $\mathrm{pr}\,\xi\,(x_1) = \mathrm{pr}\,\xi\,(x_0)$ *et* s *est un chemin dans* $\mathrm{tl}\,\xi$ *qui joint* x_0 *à* x_1, *on a* $\mathrm{gr}\,\xi\,(x_1) = \sigma\,[\mathrm{gr}\,\xi\,(x_0)]\,\sigma^{-1}$, *où* σ *est la classe du lacet* $\mathrm{pr}\,\xi \circ s$. *En particulier, si* $\mathrm{pr}\,\xi\,(x_1) = \mathrm{pr}\,\xi\,(x_0)$, *alors* $\mathrm{gr}\,\xi\,(x_0)$ *et* $\mathrm{gr}\,\xi\,(x_1)$ *sont conjugués dans* $\pi_1(\mathrm{bs}\,\xi, x_0)$. *La réciproque est également vraie: seuls les groupes* $\mathrm{gr}\,\xi\,(x)$ *pour* $x \in \mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{pr}\,\xi\,(x_0))$ *sont des sous-groupes du groupe* $\pi_1(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{pr}\,\xi\,(x_0))$ *conjugués avec* $\mathrm{gr}\,\xi\,(x_0)$.

En effet,

$$\mathrm{gr}\,\xi\,(x_1) = \mathrm{pr}\,\xi_*(\pi_1(\mathrm{tl}\,\xi, x_1)) =$$
$$= \mathrm{pr}\,\xi_* \circ T_s(\pi_1(\mathrm{tl}\,\xi, x_0)) = T_{\mathrm{pr}\,\xi \circ s} \circ \mathrm{pr}\,\xi_*(\pi_1(\mathrm{tl}\,\xi, x_0)) =$$
$$= T_{\mathrm{pr}\,\xi \circ s}(\mathrm{gr}\,\xi\,(x_0)) = \sigma\,[\mathrm{gr}\,\xi\,(x_0)]\,\sigma^{-1}$$

et ces mêmes égalités montrent que pour un élément quelconque σ du groupe $\pi_1(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{pr}\,\xi\,(x_0))$ le groupe $\sigma\,[\mathrm{gr}\,\xi\,(x_0)]\,\sigma^{-1}$ coïncide avec $\mathrm{gr}\,\xi\,(s\,(1))$, où s est un chemin dans $\mathrm{tl}\,\xi$ d'origine x_0 qui recouvre un lacet quelconque appartenant à la classe σ.

Hiérarchie des revêtements

3. Un revêtement ξ à point de base $x_0 \in \mathrm{tl}\,\xi$ est dit *subordonné* à un revêtement ξ' à point de base $x'_0 \in \mathrm{tl}\,\xi'$ lorsque $\mathrm{bs}\,\xi' = \mathrm{bs}\,\xi$ et il existe une application $\varphi: \xi' \to \xi$ telle que $\mathrm{bs}\,\varphi = \mathrm{id}\,\mathrm{bs}\,\xi$ et

tl $\varphi(x'_0) = x_0$. L'application φ est alors appelée *application de subordination* ou *subordination* tout court.

Il est clair que si $\varphi : \xi' \to \xi$ est une application de subordination, alors (tl ξ', tl φ, tl ξ) est un revêtement.

4. Si une application de subordination existe, elle est unique.

Démonstration. Soient φ, ψ des subordinations du revêtement ξ à point de base x_0 relativement au revêtement ξ' à point de base x'_0; soit x' un point de l'espace tl ξ'. Si le chemin s: $I \to$ tl ξ' joint x'_0 à x', alors les chemins tl $\varphi \circ s$, tl $\psi \circ s$ dans l'espace tl ξ recouvrent le même chemin pr $\xi' \circ s$ de la base bs ξ et ont même origine. Par conséquent, tl $\psi \circ s =$ tl $\varphi \circ s$ et tl $\psi(x') = $ $=$ tl $\psi \circ s(1) =$ tl $\varphi \circ s(1) =$ tl $\varphi(x')$.

5. Si deux revêtements à point de base sont subordonnés l'un à l'autre, alors les subordinations sont des équivalences inverses l'une de l'autre.

Démonstration. Soient φ: $\xi' \to \xi$, φ': $\xi \to \xi'$ des subordinations. Alors $\varphi' \circ \varphi : \xi' \to \xi'$, $\varphi \circ \varphi' : \xi \to \xi$ sont également des subordinations, d'où l'on déduit, en vertu de *4*, que $\varphi' \circ \varphi =$ $=$ id ξ', $\varphi \circ \varphi' =$ id ξ.

6 (Lemme). *Soient ξ, ξ' des revêtements à base commune et à points de base $x_0 \in$ tl ξ, $x'_0 \in$ tl ξ' tels que* pr $\xi'(x'_0) =$ pr $\xi(x_0)$ *et* gr $\xi'(x'_0) \subset$ $\subset$ gr $\xi(x_0)$. *Si les chemins s'_1, s'_2 : $I \to$ tl ξ' ont pour origine le point x'_0 et possèdent la même extrémité, alors les chemins situés dans* tl ξ *qui recouvrent* pr $\xi' \circ s'_1$, pr $\xi' \circ s'_2$ *et ont pour origine le point x_0 ont également la même extrémité.*

Démonstration. Soient s_1, s_2 des chemins dans tl ξ d'origine x_0 qui recouvrent pr $\xi' \circ s'_1$, pr $\xi' \circ s'_2$. La classe du lacet (pr $\xi' \circ s'_1$) (pr $\xi' \circ s'_2)^{-1}$ appartient à gr $\xi'(x'_0)$ et, par conséquent, à gr $\xi(x_0)$, de sorte que le chemin dans tl ξ d'origine x_0 qui recouvre le lacet indiqué est fermé. Ce chemin fermé se représente comme le produit d'un chemin qui recouvre pr $\xi' \circ s'_1$ par un chemin qui recouvre (pr $\xi' \circ s'_2)^{-1}$, le premier facteur a pour origine le point x_0 et coïncide donc avec s_1, tandis que le second a pour extrémité le point x_0 et coïncide donc avec s_2^{-1}. Ainsi s_1, s_2 ont même extrémité.

7. Soient ξ, ξ' des revêtements à base commune et à points de base $x_0 \in$ tl ξ, $x'_0 \in$ tl ξ' tels que pr $\xi'(x'_0) =$ pr $\xi(x_0)$. *Dans ce cas, si ξ est subordonné à ξ', alors* gr $\xi'(x'_0) \subset$ gr $\xi(x_0)$; *si* gr $\xi'(x'_0) \subset$ $\subset$ gr $\xi(x_0)$ *et la base* bs ξ *est localement connexe, alors ξ est subordonné à ξ'.*

La première assertion est évidente; démontrons la deuxième. Faisons correspondre au point $x' \in$ tl ξ' l'extrémité commune des chemins dans tl ξ d'origine x_0 qui recouvrent les chemins de la forme pr $\xi' \circ u'$, où u' est un chemin de tl ξ' qui joint x'_0 à x' (voir *6*). Ceci détermine une application F : tl $\xi' \to$ tl ξ qui vérifie la relation pr $\xi \circ F =$ pr ξ' et il ne reste qu'à démontrer que cette application est continue. Soit x' un point de tl ξ' et U un voisinage du point

$F(x')$; nous indiquerons un voisinage U' du point x' tel que $F(U') \subset \subset U$.

Pour cela, choisissons dans bs ξ un voisinage W du point pr $\xi'(x')$ tel que certains voisinages V', V des points x', $F(x')$ sont projetés bijectivement sur W par pr ξ', pr ξ. Puisque l'espace bs ξ est localement connexe, on peut prendre, à la place de W, un voisinage W_1 du point pr $\xi'(x')$ plus petit que W et tel que pr $\xi'(x')$ peut être relié à un point quelconque de W_1 par un chemin qui passe par W. Posons $V_1' = V' \cap (\text{pr } \xi')^{-1}(W_1)$, $V_1 = V \cap \text{pr } \xi^{-1}(W_1)$ et prenons en guise de U' l'intersection $V_1' \cap (\text{pr } \xi')^{-1}(\text{pr } \xi(U))$. Il est évident que $x' \in U'$; montrons que $F(U') \subset U$.

Soit $y' \in U'$. Puisque ab pr $\xi' : V' \to W$ est un homéomorphisme, on peut joindre x' à y' par un chemin $v' : I \to \text{tl } \xi'$ contenu dans V'. Définissons le chemin $v : I \to \text{tl } \xi$ par la formule

$$v(t) = (\text{pr } \xi \mid_V)^{-1} (\text{pr } \xi' \circ v'(t)),$$

fixons un chemin $u' : I \to \text{tl } \xi'$ qui joint x_0' à x' et envisageons un chemin $u : I \to \text{tl } \xi$ qui joint x_0 à $F(x)$ et qui recouvre le chemin pr $\xi' \circ u'$. Il est clair que le chemin $u'v'$ joint x_0' à y', tandis que le chemin uv recouvre le chemin pr $\xi' \circ (u'v')$ et a pour origine le point x_0. Par conséquent, $uv(1) = F(y')$ et donc $F(y') = v(1) = (\text{pr } \xi \mid_V)^{-1} (\text{pr } \xi'(y)) \in V \cap \text{pr } \xi^{-1} (\text{pr } \xi'(U')) \subset U$.

8 (Corollaire). *Les revêtements* ξ, ξ' *à base commune localement connexe sont équivalents si, et seulement si, pour des points* $x_0 \in \text{tl } \xi$, $x_0' \in \text{tl } \xi'$ *vérifiant* pr $\xi'(x_0') = \text{pr } \xi(x_0)$, *les groupes* gr $\xi(x_0)$, gr $\xi'(x_0')$ *sont conjugués dans* π_1 (bs ξ, pr $\xi(x_0)$).

Le groupe des automorphismes d'un revêtement

9. De même que les automorphismes (les auto-équivalences) d'un fibré quelconque ξ, les automorphismes d'un revêtement ξ forment un groupe Aut ξ. Sa structure est décrite par le théorème *10* ci-dessous, dans lequel x_0 désigne, comme toujours, un point de base situé dans tl ξ. En outre, nous employons dans *10* deux nouvelles notations: ev et Reg. La première désigne l'application du groupe Aut ξ dans la fibre pr ξ^{-1} (pr $\xi(x_0)$) définie par la formule ev $(\varphi) = \text{tl } \varphi(x_0)$, la deuxième, l'ensemble de tous les points x appartenant à pr $\xi^{-1}(\xi(x_0))$ tels que gr $\xi(x) =$ gr $\xi(x_0)$. Il découle de *2* que l'image inverse de l'ensemble Reg par l'application Δ: π_1 (bs ξ, pr $\xi(x_0)) \to \pi_0$ (pr ξ^{-1} (pr $\xi(x_0)$), $x_0) =$ pr ξ^{-1} (pr $\xi(x_0)$) coïncide avec le normalisateur Nr (gr $\xi(x_0)$) du groupe gr $\xi(x_0)$ dans π_1 (bs ξ, pr $\xi(x_0)$). (Rappelons que l'on appelle normalisateur Nr (H) d'un sous-groupe H du groupe donné G, la partie du groupe G formée de tous les g tels que $gHg^{-1} = H$; c'est un sous-groupe du groupe G dont H est un sous-groupe normal.) Ainsi Δ induit une

bijection

$$\text{fact ab } \Delta : \text{Nr (gr } \xi\ (x_0))/\text{gr } \xi\ (x_0) \to \text{Reg}.$$

10. L'application ev *est injective, son image* ev (Aut ξ) *est contenue dans* Reg *et l'application composée*

$$\text{Aut } \xi \xrightarrow{\text{ab ev}} \text{Red} \xrightarrow{(\text{fact ab } \Delta)^{-1}} \text{Nr (gr } \xi\ (x_0))/\text{gr } \xi\ (x_0)$$

est un anti-homomorphisme. Si la base bs ξ *est localement connexe, alors* ev (Aut ξ) = Reg, *de sorte que le groupe* Aut ξ *est antiisomorphe au groupe* Nr (gr ξ (x_0))/gr ξ (x_0). *Si en outre le revêtement* ξ *est régulier, alors* Nr (gr ξ (x_0)) *coïncide avec* π_1 (*bs* ξ, pr ξ (x_0)), *de sorte que le groupe* Aut ξ *est antiisomorphe et* π_1 (bs ξ, pr ξ (x_0))/gr ξ (x_0).

Démonstration. Puisque tout automorphisme $\varphi \in$ Aut ξ peut être envisagé comme une subordination du revêtement ξ à point de base tl φ (x_0) relativement au revêtement ξ à point de base x_0, l'injectivité de l'application ev découle directement de *5*. D'une manière analogue, l'inclusion ev (Aut ξ) $\subset$ Reg découle de la première partie du théorème *7*, tandis que l'égalité ev (Aut ξ) = Reg (dans le cas d'une base localement connexe), de la deuxième partie de ce théorème. Enfin, le fait que l'application $(\text{fact ab } \Delta)^{-1} \circ \text{ab ev}$ est un antihomomorphisme est évident.

Revêtements réguliers

11. Un revêtement ξ est dit *régulier* si pour un point $x_0 \in$ tl ξ le sous-groupe gr ξ (x_0) du groupe π_1 (bs ξ, pr ξ (x_0)) est normal. Il découle de *2* que dans ce cas gr ξ (x) sera un sous-groupe normal du groupe π_1 (bs ξ, pr ξ (x)) pour tout point $x \in$ tl ξ.

Si le revêtement ξ est régulier, alors en vertu de *2*, pour tout point $b \in$ bs ξ les groupes gr ξ (x) coïncident lorsque $x \in$ pr ξ^{-1} (b).

Remarquons que tous les revêtements à deux feuillets sont réguliers (un sous-groupe d'indice 2 est toujours normal).

D'autres exemples de revêtements réguliers sont donnés par les revêtements ($\mathbf{R}$, hel, S^1) et (S^1, hel$_m$, S^1) (voir 4.1.2.6), ainsi que par les revêtements (S^{2n-1}, pr, L (m; l_1, . . ., l_n)) (voir 4.2.3.15) et (S^3, pr, $S^3/\widetilde{G}P$), où P est un tétraèdre, un cube ou un dodécaèdre (voir 4.2.3.17). Un exemple d'un revêtement non régulier est montré sur la figure 17 (les deux points A sont identifiés ainsi que les deux points B); le fait que ce revêtement n'est pas régulier découle du théorème *12* ci-dessous.

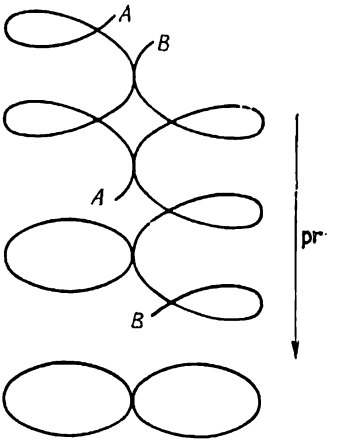


Fig. 17

12. Un revêtement ξ *est régulier si et seulement si, pour un point* $x_0 \in \mathrm{tl}\ \xi$ *et un lacet quelconque* $s : I \to \mathrm{tl}\ \xi$ *d'origine* x_0 *et un point quelconque* $x \in \mathrm{pr}\ \xi^{-1}(\mathrm{pr}\ \xi(x_0))$ *le chemin qui recouvre le lacet* $\mathrm{pr}\ \xi \circ s$ *et a pour origine le point* x *est fermé.*

En effet, la dernière condition signifie que chaque élément du groupe $\mathrm{gr}\ \xi(x_0)$ appartient également à tout groupe $\mathrm{gr}\ \xi(x)$ pour $x \in \mathrm{pr}\ \xi^{-1}(\mathrm{pr}\ \xi(x_0))$, d'où l'on déduit que chaque sous-groupe du groupe $\pi_1(\mathrm{bs}\ \xi, \mathrm{pr}\ \xi(x_0))$ conjugué avec $\mathrm{gr}\ \xi(x_0)$ coïncide avec $\mathrm{gr}\ \xi(x_0)$ (voir *2*).

13. Un revêtement ξ *est régulier si, et seulement si, il est équivalent à un fibré principal. Le groupe structural d'un tel fibré est discret et isomorphe à* $G = \pi_1(\mathrm{bs}\ \xi, \mathrm{pr}\ \xi(x_0))/\mathrm{gr}\ \xi(x_0)$; *deux G-fibrés de Steenrod, tous les deux équivalents à* ξ, *sont G-équivalents entre eux.*

Démonstration. En vertu de 4.3.2.10 et 4.3.2.11, ξ est équivalent à un G-fibré de Steenrod si, et seulement si, il existe une action à droite continue et libre du groupe G dans $\mathrm{tl}\ \xi$ dont les trajectoires coïncident avec les fibres, d'où l'on tire en particulier que le groupe G doit être discret. Les transformations de l'espace $\mathrm{tl}\ \xi$ définies par cette action déterminent des automorphismes du revêtement ξ ; d'après *9* une telle action est possible seulement dans le cas où ξ est régulier et le groupe G est antiisomorphe à $\mathrm{Aut}\ \xi$, i.e. isomorphe à $\pi_1(\mathrm{bs}\ \xi, \mathrm{pr}\ \xi(x_0))/\mathrm{gr}\ \xi(x_0)$.

Existence des revêtements

14. Un espace topologique X est dit *micro-simplement connexe* si chaque point $x \in X$ possède un voisinage U tel que l'homomorphisme $\mathrm{in}_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ est trivial.

La classe des espaces micro-simplement connexes contient évidemment tous les espaces simplement connexes et tous les espaces localement contractiles (parmi ces derniers citons tous les espaces localement euclidiens et tous les SCNR (voir 1.3.6.8), en particulier, tous les espaces cellulaires (voir 2.1.4.5)).

15. Tout espace possédant un revêtement simplement connexe est micro-simplement connexe.

En effet, si ξ est un revêtement avec $\mathrm{tl}\ \xi$ simplement connexe, et b un point de la base $\mathrm{bs}\ \xi$, alors l'homomorphisme $\mathrm{in}_* : \pi_1(U, b) \to \pi_1(\mathrm{bs}\ \xi, b)$ est trivial pour chaque voisinage U du point b à restriction $\xi|_U$ triviale.

16. Si un espace B est connexe, localement connexe et micro-simplement connexe, alors pour chacun de ses points b_0 *et chaque sous-groupe* π *de* $\pi_1(B, b_0)$ *il existe un revêtement* ξ *à point de base* $x_0 \in \mathrm{tl}\ \xi$ *tel que* $\mathrm{bs}\ \xi = B$, $\mathrm{pr}\ \xi(x_0) = b_0$ *et* $\mathrm{gr}\ \xi(x_0) = \pi$.

Démonstration. Prenons l'espace quotient de $\mathscr{C}(I, 0; B, b_0)$ en identifiant tous les deux chemins s_1, s_2 à extrémité commune tels que la classe du lacet $s_1 s_2^{-1}$ est contenue dans π, et désignons l'ensemble quotient par E. Désignons ensuite par $\mathrm{Nb}(U, V; s)$, où

U est un ouvert de B, V un ouvert de U et s un chemin de B vérifiant $s(0) = b_0$, $s(1) \in V$, le sous-ensemble de l'ensemble E formé des points représentés par des chemins de la forme sw avec $w(I) \subset U$, $w(1) \in V$. Les ensembles Nb $(U, V; s)$ vérifient les conditions de la proposition 1.1.1.9 et par conséquent constituent la base d'une topologie. (Information: cette topologie coïncide avec la topologie quotient définie dans E par la topologie de l'espace $\mathscr{C}(I, 0; B, b_0)$.) Il est clair que l'application $p : E \to B$ qui fait correspondre à chaque point de E l'extrémité commune des chemins qui le représentent est continue et même ouverte. Posons $\xi = (E, p, B)$ et définissons x_0 comme un point de l'espace E représenté par un chemin constant. Il est évident que $p(x_0) = b_0$; montrons que ξ est un revêtement et que gr $\xi(x_0) = \pi$.

Démontrons tout d'abord que ξ est un revêtement au sens large. Soit b un point quelconque de l'espace B. Choisissons un voisinage U du point b tel que l'homomorphisme d'inclusion $\pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ est trivial et, à l'intérieur de ce voisinage, un voisinage V du point b tel que b peut être joint à un point quelconque de V par un chemin contenu dans U. Nous montrerons que $\xi|_V$ est un fibré trivial à fibre discrète.

Pour cela, joignons b_0 à b par un chemin $s : I \to B$ et fixons pour chaque classe d'équivalence $\alpha \in \pi_1(B, b_0)/\pi$ un lacet $u_\alpha : I \to B$ représentant un élément quelconque de cette classe. Les ensembles Nb $(U, V; u_\alpha s)$ sont ouverts et deux à deux disjoints (si les chemins $(u_\alpha s)\, w$ et $(u_{\alpha_1} s)\, w_1$ avec $w(I) \subset U$, $w_1(I) \subset U$ définissent un même point de l'espace E, alors $\alpha = \alpha_1$, étant donné que le lacet $((u_\alpha s)\, w) \times \times ((u_{\alpha_1} s)\, w_1)^{-1}$ et le lacet $u_\alpha u_{\alpha_1}^{-1}$ qui lui est homotope appartiennent à une classe de π). Ces ensembles recouvrent $p^{-1}(V)$ (chaque chemin s' qui joint b_0 à un point de V est homotope à un chemin de la forme $(us)\, w$, où u est un lacet et $w(I) \subset U$, par exemple au chemin, $(((s'w^{-1})\, s^{-1})\, s)\, w$, où w est un chemin de U qui joint b à $s'(1)$). Enfin, les applications ab p: Nb $(U, V; u_\alpha s) \to V$ sont ouvertes en même temps que p et sont bijectives (si les chemins $(u_\alpha s)\, w$, $(u_\alpha s)\, w_1$ vérifiant $w(I) \subset U$, $w_1(I) \subset U$ ont même extrémité, ils sont homotopes), i.e. ce sont des homéomorphismes. Ainsi la restriction $\xi|_V$ est effectivement un fibré trivial à fibre discrète.

Il reste à démontrer que E est connexe et qu'un chemin de E d'origine x_0 qui recouvre un lacet de classe σ appartenant à $\pi_1(B, b_0)$ est fermé si et seulement si $\sigma \in \pi$. Désignons, pour le chemin s: $I \to B$ d'origine b_0, par $\tilde{s}$ un chemin de E qui fait correspondre à un nombre $t \in I$ le point de l'espace E représenté par le chemin $\tau \mapsto \mapsto s(t\tau)$. Il est clair que $\tilde{s}$ joint x_0 au point de l'espace E représenté par le chemin s et recouvre s. On en déduit tout d'abord que chaque point de E peut être joint à x_0 par un chemin et, ensuite, que l'extrémité d'un chemin d'origine x_0 qui recouvre un lacet d'origine b_0 coïncide avec le point de l'espace E qui est représenté par ce lacet.

Le premier fait montre que l'espace E est connexe, tandis que le deuxième, que l'extrémité d'un chemin d'origine x_0 qui recouvre un lacet d'origine b_0 coïncide avec x_0 si et seulement si la classe d'homotopie de ce lacet appartient à π.

17. Le théorème précédent termine notre exposé de la théorie des revêtements à base donnée. Avec le théorème *7*, il établit une bijection entre les classes de revêtements équivalents au-dessus d'un espace B connexe, localement connexe et micro-simplement connexe à point de base b_0 et les classes des sous-groupes conjugués du groupe $\pi_1(B, b_0)$. Cette bijection établit une correspondance entre la hiérarchie des revêtements et la hiérarchie usuelle des sous-groupes, les sous-groupes normaux correspondant aux revêtements réguliers. Au sous-groupe trivial correspond le revêtement à espace total simplement connexe. Puisque tous les autres revêtements sont subordonnés à celui-ci, on l'appelle *universel.* (Mise en garde : il ne faut pas confondre cette universalité avec celle envisagée dans la théorie des fibrés de Steenrod. Par ailleurs, parmi les fibrés de Steenrod universels, certains sont des revêtements universels : tels sont les fibrés universels principaux qui correspondent aux sous-groupes discrets ; voir 1.5 et cf. 18.)

Application: espaces classifiants des groupes discrets

18. Pour qu'un espace topologique connexe X soit un espace classifiant d'un groupe discret π, il est nécessaire et, dans le cas où X est localement connexe et micro-simplement connexe, également suffisant que les groupes $\pi_r(X)$, $r \geqslant 2$, soient triviaux et le groupe $\pi_1(X)$ soit isomorphe à π.

La nécessité découle de 1.5, *13* et 1.9.15, la suffisance de *16*, 1.8.12 et 1.5.

Applications de revêtements

19. Soient ξ, ξ' des revêtements à points de base $x_0 \in \mathrm{tl}\,\xi$, $x'_0 \in \mathrm{tl}\,\xi'$ et f: $(\mathrm{bs}\,\xi', \mathrm{pr}\,\xi'(x'_0)) \to (\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{pr}\,\xi(x_0))$ une application continue. Alors l'inclusion $f_*(\mathrm{gr}\,\xi'(x'_0)) \subset \mathrm{gr}\,\xi(x_0)$ est une condition nécessaire et, dans le cas où la base $\mathrm{bs}\,\xi'$ est localement connexe, également suffisante de l'existence d'une application $\varphi: \xi' \to \xi$ vérifiant $\mathrm{tl}\,\varphi(x'_0) = x_0$. Si une telle application φ existe, alors elle est unique.

Démonstration. Le fait que l'existence d'une telle application implique l'inclusion $f_*(\mathrm{gr}\,\xi'(x'_0)) \subset \mathrm{gr}\,\xi(x_0)$ se déduit de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\mathrm{tl}\,\xi', x'_0) & \xrightarrow{\mathrm{tl}\,\varphi_*} & \pi_1(\mathrm{tl}\,\xi, x_0) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}\,\xi'_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}\,\xi_*} \\
\pi_1(\mathrm{bs}\,\xi', \mathrm{pr}\,\xi'(x'_0)) & \xrightarrow{\mathrm{bs}\,\varphi_*} & \pi_1(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{pr}\,\xi(x_0))
\end{array}$$

(voir 1.8.6). Démontrons la réciproque. Considérons un fibré $f^!\xi$ et une application ad $f : f^!\xi \to \xi$. Soit y'_0 un point de la fibre $(\mathrm{pr}\, f^!\xi)^{-1} \times \times (\mathrm{pr}\, \xi'(x'_0))$ tel que tl ad $f(y'_0) = x_0$. Soient ensuite Y' la composante de l'espace tl $(f^!\xi)$ qui contient y'_0 et p' la restriction de l'application pr $f^!\,\xi$ à Y'. Il est clair que $(Y', p', \mathrm{bs}\,\xi')$ est un revêtement, que tl ad f forme avec f une application de ce revêtement dans ξ et que l'application tl ad $f\,|_{Y'}$ est injective sur chaque fibre de ce revêtement. Puisque dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(Y', y'_0) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_1(\mathrm{bs}\,\xi', \mathrm{pr}\,\xi'(x'_0)) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_0((p')^{-1}(\mathrm{pr}\,\xi'(x'_0)), y'_0) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ab\ tl\ ad}\, f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ab\ tl\ ad}\, f_*} \\
\pi_1(\mathrm{tl}\,\xi, x_0) & \xrightarrow{\mathrm{pr}\,\xi_*} & \pi_1(\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{pr}\,\xi(x_0)) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_0(\mathrm{pr}\,\xi^{-1}(\mathrm{pr}\,\xi(x_0)), x_0)
\end{array}$$

les lignes sont exactes, tandis que l'homomorphisme vertical à gauche est un monomorphisme, on a $f_*^{-1}(\mathrm{Im}\,(\mathrm{pr}\,\xi_*)) = \mathrm{Im}\, p'_*$ et donc $\mathrm{Im}\, p'_* \supset \mathrm{gr}\,\xi'(x'_0)$. On en déduit, en vertu de la connexité locale de l'espace bs ξ', que le revêtement $(Y', p', \mathrm{bs}\,\xi')$ à point de base y'_0 est subordonné au revêtement ξ' à point de base x'_0. Si ψ' est la subordination, alors la composée $(\mathrm{tl\ ad}\, f\,|_{Y'}) \circ \mathrm{tl}\,\psi'$ forme avec f l'application cherchée φ.

Démontrons enfin l'unicité de φ. Soit $\varphi_1 : \xi' \to \xi$ une autre application vérifiant tl $\varphi_1(x'_0) = x_0$. Alors, pour chaque point $x' \in \mathrm{tl}\,\xi'$ et chaque chemin $s' : I \to \mathrm{tl}\,\xi'$ qui joint x'_0 à x', les chemins tl $\varphi \circ s'$, tl $\varphi_1 \circ s'$ recouvrent le chemin $f \circ \mathrm{pr}\,\xi' \circ s'$ et ont pour origine le point x_0. Par conséquent on a dans ces conditions tl $\varphi \circ s' =$ tl $\varphi_1 \circ s'$ et donc tl $\varphi(x') =$ tl $\varphi \circ s'(1) =$ tl $\varphi_1 \circ s'(1) =$ tl $\varphi_1(x')$.

20. Soient ξ un revêtement à point de base $x_0 \in \mathrm{tl}\,\xi$, Y un espace localement connexe à point de base y_0 et $f : (Y, y_0) \to (\mathrm{bs}\,\xi, \mathrm{pr}\,\xi(x_0))$ une application continue. Si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \mathrm{gr}\,\xi(x_0)$ (en particulier, si Y est simplement connexe), il existe une application $F : (Y, y_0) \to (\mathrm{tl}\,\xi, x_0)$ qui recouvre f.

(Voir 4.1.3.8.)

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème *19* aux revêtements ξ et $\xi' = (Y, \mathrm{id}, Y)$.

Revêtements et structures supplémentaires

21. Selon un principe général important, toute structure supplémentaire définie dans la base d'un revêtement se retrouve naturellement, sous conditions favorables, dans l'espace de revêtement. Nous concluons notre exposé de la théorie des revêtements en appliquant ce principe à trois structures : différentielle, cellulaire et simpliciale. D'autres exemples sont donnés dans les exercices 5.10, 5.11.

Dans le cas d'une structure différentielle, nous nous limitons dès le début aux variétés, i.e. nous supposons que la base bs ξ du revête-

ment ξ est une $\mathscr{C}^r$-variété ($1 \leqslant r \leqslant a$) et que le nombre de feuillets est dénombrable. Chaque carte $\varphi \in \mathrm{Atl}\ \mathrm{bs}\ \xi$ au-dessus de laquelle ξ est un fibré trivial possède des copies dans tl ξ qui recouvrent l'ensemble $\mathrm{pr}\ \xi^{-1}(\mathrm{supp}\ \varphi)$; il est clair que la famille de toutes ces copies constitue un $\mathscr{C}^r$-atlas de l'espace tl ξ. Cet atlas munit l'espace tl ξ d'une $\mathscr{C}^r$-structure, le transformant en une $\mathscr{C}^r$-variété. La propriété fondamentale de la $\mathscr{C}^r$-structure « relevée », qui la détermine de manière unique, consiste en ce que la projection pr ξ est une $\mathscr{C}^r$-submersion relativement à cette structure, i.e. le revêtement ξ est un $\mathscr{C}^r$-fibré. Ajoutons que l'orientabilité de bs ξ implique celle de tl ξ.

Le relèvement d'une structure cellulaire s'effectue d'une manière analogue, sauf que dans le cas des cellules et des applications caractéristiques il faut se servir du théorème *20*. Il en résulte que l'espace total d'un revêtement à base cellulaire devient un espace cellulaire (équipé si la base était équipée) et la projection devient une application cellulaire.

Le relèvement d'une structure simpliciale peut être envisagé comme un cas particulier de celui d'une structure cellulaire. L'espace total du revêtement à base simpliciale devient un espace simplicial (ordonné si la base était ordonnée), et la projection, une application simpliciale.

22. Pour toutes les trois situations envisagées, la structure « relevée » est invariante relativement aux automorphismes du revêtement; il est clair, au moins dans le cas d'un revêtement régulier ξ, que chaque structure différentielle ou cellulaire (définie dans tl ξ) invariante relativement aux automorphismes du revêtement peut être « descendue » dans bs ξ, ce qui veut dire qu'elle a été obtenue par relèvement (dans le cas d'une structure simpliciale ce dernier fait reste valable à condition d'effectuer deux fois une subdivision barycentrique). Par exemple, les lentilles et les espaces quotients de la sphère S^3 par les groupes binaires du tétraèdre, du cube et du dodécaèdre (voir 4.2.3.17) possèdent des revêtements réguliers dont l'espace total est une sphère (voir 4.3.2.11 et *13*) et sont donc des $\mathscr{C}^a$-variétés.

Remarquons que la condition précédente d'invariance d'une structure relativement aux automorphismes d'un revêtement ξ est certainement satisfaite si ξ est un $\mathscr{C}^r$-fibré et s'il s'agit d'une $\mathscr{C}^r$-structure dans tl ξ. Dans ce cas la $\mathscr{C}^r$-structure « descendue » coïncide évidemment avec celle qui était donnée dans bs ξ. Ce sera le cas, par exemple, pour tous les revêtements décrits dans 4.1.2.6, en particulier, pour les revêtements ($\mathbf{R}$, hel, S^1), (S^1, hel_m, S^1) et (S^n, pr, $\mathbf{R}P^n$).

3. Orientations

1. Nous allons appliquer les méthodes du sous-paragraphe précédent aux problèmes d'orientabilité envisagés aux §§ 3.1 et 4.5 (voir pp. 3.1.3 et 4.5.1, 4.5.4). Nous suivrons le schéma du p. 4.5.1, qui est valable pour tous les fibrés au-dessus d'un espace quelconque, tandis que le schéma du p. 4.5.4 permet d'obtenir les mêmes résultats seulement dans le cas d'une base cellulaire.

2. Soit ξ un fibré vectoriel réel de dimension n. Considérons le fibré principal associé asso $(\xi, GL(n, \mathsf{R}))$ et prenons l'espace quotient de son espace total tl asso $(\xi, GL(n, \mathsf{R}))$ par l'action à droite du groupe $GL_+(n, \mathsf{R})$ que l'on obtient par restriction de l'action canonique à droite du groupe $GL(n, \mathsf{R})$ dans tl asso $(\xi, GL(n, \mathsf{R}))$ (voir 4.3.2.10). L'espace des orbites de cette action du groupe $GL_+(n, \mathsf{R})$ est désigné par $\mathrm{bs}_+ \xi$. Il sert d'espace total d'un fibré à base bs ξ et à projection fact pr asso $(\xi, GL(n, \mathsf{R}))$. Il est clair que ce fibré est un revêtement au sens large à deux feuillets. On le désigne par or ξ.

Les points de l'espace $\mathrm{bs}_+ \xi$ peuvent être interprétés de manière naturelle comme étant des couples (x, ε), où x est un point de l'espace bs ξ et ε une orientation de la fibre pr $\xi^{-1}(x)$. Ceci permet d'interpréter l'orientation simultanée des fibres du fibré ξ comme une application s: bs $\xi \to \mathrm{bs}_+ \xi$ telle que pr or $\xi \circ s =$ id bs ξ; on voit que la compatibilité de ces orientations au sens de 4.5.1.8 est tout simplement équivalente à la continuité de l'application s. Ainsi les orientations du fibré ξ sont les sections du fibré or ξ.

Conséquences importantes:

(i) un fibré ξ est orientable si et seulement si or ξ est un fibré trivial;

(ii) le fibré ξ est toujours orientable si la base bs ξ est localement connexe et les groupes fondamentaux de ses composantes n'ont pas de sous-groupes d'indice 2 (cette dernière condition est satisfaite, par exemple, si les composantes sont simplement connexes);

(iii) si le fibré ξ est orientable, alors le nombre de ses orientations coïncide avec le nombre d'applications comp bs $\xi \to S^0$ (en particulier, si le nombre des composantes est fini et égal à m, le nombre des orientations est égal à 2^m).

3. Aux considérations ci-dessus ajoutons la remarque suivante: soit ξ un fibré vectoriel réel; considérons un fibré ξ_+ à base $\mathrm{bs}_+ \xi$ induit du fibré ξ par la projection pr or ξ; nous affirmons que le fibré ξ_+ possède une orientation canonique. A savoir, l'orientation de sa fibre pr $\xi_+^{-1}(x, \xi)$, où x est un point de la base bs ξ, tandis que ε est l'orientation de la fibre pr $\xi^{-1}(x)$, se définit comme l'orientation ε transférée dans pr $\xi_+^{-1}(x, \varepsilon)$ par l'isomorphisme

$$\text{ab tl ad (pr or } \xi): \text{ pr } \xi_+^{-1}(x, \varepsilon) \to \text{pr } \xi^{-1}(x).$$

Ces orientations sont compatibles au sens de 4.5.1.8.

Le cas des variétés différentiables

4. En remarquant qu'orienter une variété différentiable c'est orienter son fibré tangent (voir 4.6.4.4), on voit que les considérations exposées dans *2* sont applicables à l'orientabilité et aux orientations des variétés différentiables. En particulier, une variété différentiable X est orientable si et seulement si le fibré or tang X (qui est un fibré au sens large à deux feuillets à base X) est trivial ; une variété différentiable est certainement orientable si les groupes fondamentaux de ses composantes n'ont pas de sous-groupes d'indice 2 (en particulier, si toutes les composantes sont simplement connexes).

Ajoutons qu'en vertu de 2.21 l'espace tl or tang X est une variété différentiable, et *3* implique qu'il possède une orientation canonique. Si X est connexe et non orientable, alors or tang X est un revêtement (à deux feuillets) au sens restreint ; on l'appelle *revêtement d'orientation.*

4. Quelques fibrés au-dessus des sphères

1. Nous étudions certaines propriétés élémentaires des fibrés vectoriels réels orientés et des fibrés vectoriels complexes au-dessus des sphères de petites dimensions. Présentant un certain intérêt intrinsèque, ces propriétés donnent en même temps une illustration de la théorie générale.

Rappelons que les classes des $GL_+\mathbf{R}^n$-fibrés $GL_+\mathbf{R}^n$-équivalents au-dessus d'une base cellulaire sont en bijection naturelle avec les classes d'homotopie des applications continues de cette base dans $G_+(\infty, n)$, tandis que les classes des $GL\mathbf{C}^n$-fibrés $GL\mathbf{C}^n$-équivalents au-dessus d'une base cellulaire sont en bijection naturelle avec les classes d'homotopie des applications continues de cette base dans $\mathbf{C}G(\infty, n)$ (voir 4.5.3.7). Si la base est la sphère S^r, $r \geqslant 1$, alors, puisque les espaces $G_+(\infty, n)$ et $\mathbf{C}G(\infty, n)$ sont simples, les classes homotopiques indiquées peuvent être identifiées avec les éléments des groupes $\pi_r(G_+(\infty, n))$ et $\pi_r(\mathbf{C}G(\infty, n))$, mais ces derniers sont canoniquement isomorphes aux groupes $\pi_{r-1}(SO(n))$ et $\pi_{r-1}(U(n))$ (voir 2.8.2 et 2.8.4). Ainsi les classes des $GL_+\mathbf{R}^n$-fibrés $GL_+\mathbf{R}^n$-équivalents au-dessus de S^r, $r \geqslant 1$, sont en bijection naturelle avec les éléments du groupe $\pi_{r-1}(SO(n))$, tandis que les classes des $GL\mathbf{C}^n$-fibrés $GL\mathbf{C}^n$-équivalents au-dessus de S^r, $r \geqslant 1$, sont en bijection naturelle avec les éléments du groupe $\pi_{r-1}(U(n))$. Connaissant les groupes $\pi_{r-1}(SO(n))$ et $\pi_{r-1}(U(n))$ pour les premières valeurs de r (voir p. 2.6), nous pouvons classifier les fibrés correspondants. Nous en donnons ici une classification succincte. Certaines notions supplémentaires sont données dans les exercices 5.14 à 5.19.

Il faut remarquer que cette méthode est applicable à une situation beaucoup plus générale. Soit G un groupe topologique et F un

G-espace fidèle. D'après la théorie générale des fibrés (voir 4.4.2), les éléments de l'ensemble Stee (S^q, F) sont en bijection naturelle avec les éléments de l'ensemble $\pi(S^q, X)$, où X est un espace classifiant quelconque du groupe G. Si X est q-simple (par exemple, si le groupe G est connexe), alors $\pi(S^q, X)$ ne diffère pas de $\pi_q(X)$ et, pour $q \geqslant 1$, ne diffère pas de $\pi_{q-1}(G)$ (voir 1.6).

Le cas orienté réel

2. Les groupes $\pi_0(SO(n))$ étant triviaux, quel que soit le nombre naturel n, tout $GL_+\mathbf{R}^n$-fibré au-dessus du cercle S^1 est $GL_+\mathbf{R}^n$-trivial.

Puisque le groupe $\pi_1(SO(1))$ est trivial, le groupe $\pi_1(SO(2))$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$, tandis que le groupe $\pi_1(SO(n))$, pour $n \geqslant 3$, est isomorphe à $\mathbf{Z}_2$; on en déduit que : chaque $GL_+\mathbf{R}^1$-fibré au-dessus de la sphère S^2 est $GL_+\mathbf{R}^1$-trivial; le nombre de $GL_+\mathbf{R}^2$-fibrés qui ne sont pas deux à deux $GL_+\mathbf{R}^2$-équivalents au-dessus de la sphère S^2 est infini dénombrable; pour $n \geqslant 3$ le nombre de $GL_+\mathbf{R}^n$-fibrés deux à deux $GL_+\mathbf{R}^n$-non-équivalents au-dessus de S^2 est égal à 2.

Les groupes $\pi_2(SO(n))$ étant triviaux, quel que soit le nombre naturel n, tout $GL_+\mathbf{R}^n$-fibré au-dessus de la sphère S^3 est $GL_+\mathbf{R}^n$-trivial.

Les groupes $\pi_3(SO(1))$ et $\pi_3(SO(2))$ étant triviaux et le groupe $\pi_3(SO(n))$ (pour $n \geqslant 3$) infini dénombrable, on voit que : tout $GL_+\mathbf{R}^1$-fibré au-dessus de la sphère S^4 est $GL_+\mathbf{R}^1$-trivial; tout $GL_+\mathbf{R}^2$-fibré au-dessus de S^4 est $GL_+\mathbf{R}^2$-trivial; pour $n \geqslant 3$ le nombre de $GL_+\mathbf{R}^n$-fibrés qui ne sont pas deux à deux $GL_+\mathbf{R}^n$-équivalents au-dessus de S^4 est infini dénombrable.

Le cas complexe

3. Les groupes $\pi_0(U(n))$ étant triviaux, quel que soit le nombre naturel n, tout $GL\mathbf{C}^n$-fibré au-dessus de S^1 est $GL\mathbf{C}^n$-trivial.

Le groupe $\pi_1(U(n))$, pour $n \geqslant 1$, étant isomorphe à $\mathbf{Z}$, pour chaque nombre naturel n l'ensemble de $GL\mathbf{C}^n$-fibrés qui ne sont pas deux à deux $GL\mathbf{C}^n$-équivalents au-dessus de S^2 est infini dénombrable.

Les groupes $\pi_2(U(n))$ étant triviaux, pour chaque nombre naturel n tout $GL\mathbf{C}^n$-fibré au-dessus de S^3 est $GL\mathbf{C}^n$-trivial.

Le groupe $\pi_2(U(1))$ étant trivial et le groupe $\pi_3(U(n))$, pour $n \geqslant 2$, isomorphe à $\mathbf{Z}$, on a : chaque $GL\mathbf{C}^1$-fibré au-dessus de S^4 est $GL\mathbf{C}^1$-trivial; pour $n \geqslant 2$ l'ensemble de $GL\mathbf{C}^n$-fibrés qui ne sont pas deux à deux $GL\mathbf{C}^n$-équivalents au-dessus de S^4 est infini dénombrable.

5. Exercices

1. Montrer que les variétés différentiables de dimension deux n'admettent pas de revêtement non identique par le disque D^2.

2. Montrer que les variétés différentiables compactes de dimension deux n'admettent pas de revêtement par le demi-plan R^2_-.

3. Montrer qu'une sphère à $\tilde{g}$ anses peut être revêtement à m feuillets d'une sphère à g anses si et seulement si $\tilde{g} - 1 = m\,(g - 1)$ (cf. 4.1.5.1).

4. Montrer qu'une sphère à $\tilde{h}$ bandes peut être revêtement à m feuillets d'une sphère à h bandes si et seulement si $\tilde{h} - 2 = m\,(h - 2)$ (cf. 4.1.5.2).

5. Montrer qu'une sphère à g anses peut être revêtement à m feuillets d'une sphère à h bandes si m est pair et $g - 1 = m\,(h - 2)/2$.

6. Montrer qu'un espace topologique peut être un revêtement non identique d'une bouteille de Klein si, et seulement si, il est homéomorphe à la bouteille de Klein, à la partie intérieure d'une bande de Mœbius ou à l'un des produits $\mathsf{R} \times \mathsf{R}$, $\mathsf{R} \times S^1$, $S^1 \times S^1$.

7. Montrer que pour tout groupe π_1 et toute suite de groupes abéliens $\pi_2, \pi_3, \ldots$ munis d'une action à droite du groupe π_1, il existe un espace cellulaire X à point de base x_0 et un isomorphisme f: $\pi_1 \to \pi_1\,(X, x_0)$ tels que les groupes $\pi_2\,(X, x_0)$, $\pi_3\,(X, x_0)$, ... sont f-isomorphes aux groupes $\pi_2, \pi_3, \ldots$

8. Montrer que si la base d'un revêtement ξ est un espace localement euclidien de dimension n, alors tl ξ est un espace localement euclidien de dimension n à bord pr ξ^{-1} (∂ bs ξ).

9. Montrer qu'un revêtement d'un espace cellulaire localement fini est localement fini (voir 2.21).

10. Supposons que la base d'un revêtement ξ est un groupe topologique. Montrer que pour chaque point x de la fibre pr ξ^{-1} ($e_{\mathrm{bs}\,\xi}$) l'espace tl ξ possède une structure de groupe unique qui transforme tl ξ en groupe topologique à unité x et pr ξ en homomorphisme.

11. Montrer que si la base d'un revêtement à nombre de feuillets fini admet une action transitive d'un groupe topologique compact connexe, alors une telle action d'un groupe topologique compact connexe peut être définie dans l'espace total de ce revêtement.

12. Montrer que si un revêtement ξ à deux feuillets a pour base une variété différentiable non orientable, l'espace total étant orientable, alors ξ est équivalent au revêtement d'orientation de la variété bs ξ.

13. Montrer que si une variété différentiable non orientable X admet pour revêtement une variété orientable, alors tl or tang X admet cette même variété pour revêtement.

14. Montrer que : (i) pour chaque nombre naturel n il existe un $GL\mathsf{R}^n$-fibré $GL\mathsf{R}^n$-non-trivial au-dessus du cercle S^1, unique à une

$GL\mathbf{R}^n$-équivalence près, et dans le cas $n = 1$ son espace total est homéomorphe à la partie intérieure d'une bande de Mœbius; (ii) le nombre des $GL\mathbf{R}^2$-fibrés deux à deux $GL\mathbf{R}^2$-non-équivalents au-dessus de S^2 est infini dénombrable; (iii) pour $n \geqslant 3$ le nombre de $GL\mathbf{R}^n$-fibrés qui ne sont pas deux à deux $GL\mathbf{R}^n$-équivalents au-dessus de S^2 est égal à 2; (iv) pour chaque nombre naturel n tout $GL\mathbf{R}^n$-fibré au-dessus de S^3 est $GL\mathbf{R}^n$-trivial; (v) tout $GL\mathbf{R}^2$-fibré au-dessus de S^4 est $GL\mathbf{R}^2$-trivial; (vi) pour $n \geqslant 3$ le nombre de $GL\mathbf{R}^n$-fibrés deux à deux $GL\mathbf{R}^n$-non-équivalents au-dessus de S^4 est infini dénombrable.

15. Montrer que pour $r \geqslant 2$ tout $GL\mathbf{R}^1$-fibré au-dessus de S^r est $GL\mathbf{R}^1$-trivial.

16. Montrer que pour $r \geqslant 3$: tout $GL\mathbf{R}^2$-fibré au-dessus de S^r est $GL\mathbf{R}^2$-trivial; tout $GL_+\mathbf{R}^2$-fibré au-dessus de S^r est $GL_+\mathbf{R}^2$-trivial; tout $GL\mathbf{C}^1$-fibré au-dessus de S^r est $GL\mathbf{C}^1$-trivial.

17. Montrer que deux $GL_+\mathbf{R}^2$-fibrés au-dessus de S^2 deviennent équivalents par extension du groupe structural $GL_+(2, \mathbf{R})$ à $GL(2, \mathbf{R})$ si et seulement si les éléments correspondants du groupe $\pi_1(SO(2))$ (voir 4.1) coïncident ou sont inverses l'un de l'autre.

18. Montrer que pour chaque $O\mathbf{R}^2$-fibré ξ non trivial, ayant pour base S^2, l'espace total tl asso (ξ, S^1) est homéomorphe à une des lentilles $L(m; 1, 1)$ (il s'agit de l'action canonique du groupe $O(2)$ dans S^1).

19. Montrer que pour $n \geqslant 2$ le nombre de $GL\mathbf{C}^n$-fibrés qui ne sont pas deux à deux $GL\mathbf{C}^n$-équivalents au-dessus de S^5 est inférieur ou égal à 2.

Information. Ce nombre est égal à 2 si $n = 2$ et à 1 si $n > 2$.

BIBLIOGRAPHIE

1. ADAMS J. F. On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. Math. 72, n° 1 (1960), 20-104.
2. ADAMS J. F., ATIYAH M. F. *K*-theory and the Hopf invariant, Quart. J. Math. 17, n° 65 (1966), 31-38.
3. BOURBAKI N. Topologie Générale. Structures Fondamentales, Hermann, Paris, 1972.
4. BROWN M. Locally flat imbeddings of topological manifolds, Ann. Math. 75, n° 2 (1962), 331-341.
5. CALABI E., ROSENLICHT M. Complex-analytic manifold without countable base, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1954), 335-340.
6. DOWKER C. H. Topology of metric complexes, Amer. J. Math. 74 (1952), 555-577.
7. FUCHS D. B. Topologie homotopique (dans le recueil « Algèbre, Topologie, Géométrie », série « Itogui Naouki », VINITI, 1971, 71-122 (en russe).
8. GRAUERT H. On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, Ann. Math. 68 (1958), 460-472.
9. HODGE V., PIDO D. Methods of algebraic geometry, vol. 1, Cambridge, 1947.
10. KAMPEN E. R., van, Komplexe in Euklidischen Räumen, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 9 (1932), 72-78, 152-153.
11. KELLEY J. General Topology, Toronto — London — New-York, 1957.
12. KERVAIRE M. A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math. Helv. 34 (1960), 257-270.
13. KURATOWSKI K. Topologie, vol. 1, New-York, 1966.
14. KURATOWSKI K. Topologie, vol. 2, New-York, 1968.
15. MILNOR J. On manifolds, homeomorphic to the 7-sphere, Ann. Math. 64, n° 2 (1956), 399-405.
16. MILNOR J. On spaces having the homotopy type of CW-complex, Trans. Amer. Math. Soc., 90, n° 2 (1959), 272-280.
17. MILNOR J. Morse Theory, Princeton Univ. Press, 1963.

18. ROHLIN V. A. Plongement des variétés non orientables de dimension trois dans l'espace de dimension cinq. Doklady Acad. Sci. URSS **160**, n° 3 (1965), 549-551 (en russe).
19. SERRE J.-P. Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. Math. 58, n° 2 (1953), 258-294.
20. SMALE S. A survey of some recent development in differential topology, Bull. Amer. Math. Soc. 69, n° 2 (1963), 131-145.
21. STERNBERG S. Lectures on differential geometry, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
22. WHITNEY H. Differentiable manifolds, Ann. Math. **37** (1936), 645-680.
23. WHITNEY H. A function not constant on a connected set of critical points, Duke math. J. 1 (1935), 514-517.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Abréviation d'une application 12
Action 274
— continue 277
— à droite 275
— — canonique 276
— — intérieure 276
— effective 274
— fidèle 274
— à gauche 275
— — canonique 276
— — intérieure 276
— de groupe 276
— d'un groupe 274
— induite 275
— topologiquement fidèle 297
— transitive 274
Actions adjointes 276
— duales 276
— équivalentes 275, 278
Addition d'anses 231
Adhérence d'un ensemble 15
Affaiblissement cellulaire 83
Anse 247
Application 11
— adjointe 256
— analytique 142
— d'attachement 85
— biholomorphe 161
— bijective 11
— cellulaire 86
— de classe $\mathscr{C}^r$ 138
— classifiante 310
— continue 20
— — fermée 20
— — ouverte 20
— — en un point 21
— décomposable 38
— diagonale 13
— différentiable 142
— différentielle 154
— holomorphe 161, 164
Application homotope 61
— injective 11
— de recouvrement 259
— simpliciale 99, 103
— — monotone 103, 105
— de subordination 471
— surjective 11
— tangentielle 347
Applications transversales 215, 218
Approximation cellulaire d'un couple topologique 457
— — d'un espace topologique 454
— simpliciale d'une application 116
Assemblage de groupes 362, 365, 370
— canonique simple 364
— induit 363
— inférieur 388, 399
— supérieur 387
Atlas 139
— complet 139
— équivalents 139
— holomorphe 163
Attachement 43, 77
Axiomes de dénombrabilité 27, 92
— de métrisabilité 92
— de séparation 23

Bande de Mœbius 247
Base d'un espace topologique 15
Boule 17
— ouverte 17
Bouquet d'espaces 55
Bouteille de Klein 248

Carte 138
— complexe 163
Cartes 138
— accordées 138
— adjacentes 175

Cartes compatibles 138
Cellule 82
— fermée 82
Centre du bouquet 55
— du join 57
— du produit tensoriel 56
— du simplexe euclidien 99
Champ de k-repères 317
—de vecteurs 156, 317
Chemin 65
— fermé 65
— inverse (d'un autre) 65
Classe d'homotopie 61
Cobordisme 235
— élémentaire 238
— standard élémentaire 235
— — trivial 238
— trivial 235
Cobordismes difféomorphes 231
Codimension 143
Col 202
— bilatère 204
Complémentaire orthogonal 319
Complexification 322
Composante de l'unité 267
Composition 416
—, distributivité à droite 416
—, — à gauche 416
Condition de Serre 259
— — forte 262
Cône 47, 56
—d'une application 50
— — simplicial 111
Coordonnées homogènes 45
Couple de Borsuk 70
— cellulaire 85, 118
— k-connexe 69
— r-simple 370
— simple 370
— topologique 18
Cylindre 34
— d'une application 50
— — simplicial 111

Décomplexification 316
Découpage 206
Degré d'une application 350
Diamètre d'un ensemble 17
Difféomorphisme 138, 142
Différentielle d'une application 154
Dimension d'une cellule 83
— d'un espace cellulaire 83
Disque à anse retournée 248
Distance 17
— de deux ensembles 17
— euclidienne 314
— riemannienne 347
Double d'un recollement 204
Droite projective de Cayley 46

Ensemble 11
— dénombrable 11
— fermé 14
— ouvert 14
— partout dense 15
— quotient 12
— rare 15
— saturé 12
Enveloppe complexe 322
Equipement d'une partition 82
Equivalence
— cellulaire 62, 65
— de fibrés 256
— — stable 322
— d'homotopie faible 445, 449
— homotopique 62, 65
Espace 14
— de Baire 212
— cellulaire 83
— — à recollements successifs 88
— classifiant 306
— compact 29
— connexe 66
— contractile 63
— de Grassmann 323
— — complexe 323
— — supérieur 323
— de Hausdorff 24
— homogène 279
— homotopiquement cellulaire 447
— k-connexe 68
— localement compact 32
— — connexe 69
— — contractile 69
— — euclidien 130
— métrique 17
— métrisable 18
— micro-simplement connexe 474
— normal 24
— des orbites 278
— paracompact 33
— pointé 54
— projectif 44
— — de Cayley 46
— — complexe 45
— — des quaternions 46
— — — à droite 46
— — — à gauche 46
— — réel 44
— quotient 37
— r-simple 366
— régulier 24
— de revêtement 258

Espace SCNR 73
— séparé 24
— simple 366
— simplement connexe 68
— simplicial 100
— simplicialement homéomorphes 103
— de Stiefel 329
— à structure de groupe 266
— tangent 152
— topologique 14
Etoile 112
— barycentrique 115
— ouverte 112
Extension du groupe 275
— — structural 280

Famille d'applications 11
Fibre 35
— standard 288
Fibré 255
— associé 293
— de classe $\mathscr{C}^r$ 333
— conjugué 316
— différentiable 333, 340
— d'Ehresmann-Feldbau 297
— euclidien 313
— faiblement associé 296
— de Grassmann 327
— hermitien 315
— de Hopf 335
— induit 256
— k-universel 306
— localement topologiquement trivial 257
— — trivial 257
— de Milnor 307
— normal 347
— orienté 315
— quotient 320
— de Serre 259
— — adjoint 265
— de Steenrod 288
— — principal 292
— tangent 346
— trivial 257
— — au sens stable 322
— — standard 257
— universel 305
— ∞-universel 307
— vectoriel 312
— — complexe 315
— — réel 312
Fibrés équivalents 256, 322
— isomorphes 256
Filtration 43
Fonction barycentrique 101
Fonction de classe $\mathscr{C}^r$ 137
— de Morse 232
— — propre 232
— d'Urysohn 25
Fonctorialité 294
Frontière d'un ensemble 15
— d'un sphéroïde 369

Groupe 266
— de difféomorphismes 271
— fondamental 359
— — des bouquets 435
— — d'un espace cellulaire 430
— — des surfaces compactes 433
— d'homéomorphismes 273
— d'homotopie 359
— — du cercle 412
— — des espaces projectifs 420
— — des groupes classiques 422
— — des lentilles 420
— — des sphères 419
— — stable 412, 423
— — des variétés 424
— linéaire général 273
— orthogonal 273
— — spécial 273
— de Poincaré 360
— du revêtement 470
— structural 288
— unitaire 273
— — spécial 273

Homéomorphisme 21
— caractéristique d'un simplexe 99
— distingué 287
Homomorphisme 268
— associé à une action 274
— d'ensembles 363
— de groupes topologiques 268
— induit par une application 361
Homotopie 61
— constante 61
— fixe 62
— inverse d'une autre homotopie 61
— libre 62, 65
— liée 62
— linéaire 61
— relative 64
— de sphéroïdes 385

Immersion 40, 158
— ν-ième 40
Inclusion 256
Indice d'un point 189

Inégalité triangulaire 17
Inversion homotopique 397
Isomorphisme 104, 256, 268, 363

Joint 48, 57
—, base 48
— cellulaire 96
—, génératrice 48
— itéré 49
— simplicial 111

Lacet 65
Lentille 284
— infinie 284
Limite 42, 110
— d'une suite d'applications 42
Link 113
— barycentrique 115

Monomorphisme 268
— linéaire 317
— orthogonal 317
— unitaire 317

Noyau de non-fidélité d'une action 274

Orbite d'un point 274
Orientation 149

Parallélisabilité d'une variété 156
Partition d'un espace 39
— cellulaire 82
— équipée 82
— fermée 39
— localement finie 84
— ouverte 40
Plan projectif de Cayley 179
Plongement 22
— cellulaire 87
— différentiable 157
— — propre 157
— topologique 22
Point 14
— d'adhérence 15
— critique 189
— — non dégénéré 189, 232
— extérieur 15
— frontière 15
— intérieur 15
Polyèdre 105
Polynôme non singulier 181
Produit 13
— d'actions 275
— d'applications 13
— d'espaces 34, 54, 55
— — cellulaire 94
— — simplicial 104
— — tensoriel cellulaire 97
— de fibrés 255
— d'homotopies 61
— d'orientations 150
— de Whitehead 463
Projection 13, 153
— i-ième 13

Recollement 40
— d'anses 243
— de variétés 202
Reconstruction 235
— d'anses 245
— suivant un plongement 245
Recouvrement d'un ensemble 16
— fermé 16
— fondamental 19
— localement fini 16
— ouvert 16
Rétracte 22
— de déformation 63
— de voisinage 73
Rétraction 22
— de déformation (stricte) 63
Revêtement 258
— d'orientation 480
— régulier 473
— au sens large 258
— au sens strict 258
— subordonné 470
— universel 467

Saturation d'un ensemble 12
Schéma simplicial 104
— — ordonné 105
Section d'un fibré 255
— associée 257, 296
— orthogonale 319
Sections homotopes 255
Simplexe 98
— engendré 102
— euclidien 98
— ordonné 99
— topologique 99
— unité 99
Somme d'applications 13
— des espaces 41
— d'une famille d'ensembles 13

Somme de fibrés 321
Sous-ensemble 12
— décomposable 23
— saturé 12
Sous-espace 18, 84, 102
— complet 103
— propre 144
Sous-fibré 319
Sous-groupe normal 267
— de stabilité 277
— de van Kampen 432
Sous-variété 146
— propre 146
Sphère 17
— à anses 247
— à bandes 247
— à trous 247
Sphéroïde 358
— fondamental de la boule 400
— — de la sphère 400
— homotope par fibres 385
— inverse 358
— librement homotopes 364, 369
Squelette 85
Structure homotope 350, 368
— topologique 14
Subdivision barycentrique 106
Submersion 159
Suite 373
— courte 374
— exacte 373, 377, 381
— de groupes et d'homomorphismes 373
— d'homotopie d'un couple 381
— — d'un fibré 391
— — — principal 399
— — d'un triplet 385
Surface modèle 247
Suspension sur un espace topologique 47, 57, 322
— d'un sphéroïde 407

Théorème d'addition 404
— sur les F-applications 291
— sur l'homotopie de recouvrement 261
— de métrisabilité 28
— de plongement 28, 195
— de prolongement 26
— des suspensions 409
Topologie 14
— cellulaire 83
— compacte 51
— discrète 14
— faible 83
— induite 18
Topologie métrique 18
— quotient 37
Translation 363
Transversalisation 197
— normale 197
Triade 19
— cellulaire 85
Triangulation d'un ensemble 100
Triplet 18
— cellulaire 85
— topologique 18
Tube 197
— ouvert 197
— propre 197

Variété 134
— analytique 145
— cobordante 232
— complexe 163
— différentiable 145
— fermée 134, 146
— de Grassmann 172
— — complexe 177
— — non compacte 180
— — non orientable 174
— — orientable 174
— — quaternionique 178
— — supérieure 173
— lisse 145
— orientable 147
— orientée 147
— d'origine complexe 166
— ouverte 134
— parallélisable 156
— de Stiefel 166
— — complexe 169
— — non compacte 170
— — quaternionique 170
— topologique 134
— totale des vecteurs tangents 154
Vecteur tangent 152
Voisinage 14
— métrique 18
— propre 118
— régulier 115

A-homotopie 62
$\mathscr{C}^r$-application 138, 334
$\mathscr{C}^r$-atlas 139
$\mathscr{C}^r$-équivalence 334
$\mathscr{C}^r$-espace 139
$\mathscr{C}^r$-fibré 333
$\mathscr{C}^r$-isomorphisme 334
$\mathscr{C}^r$-plongement 157
$\mathscr{C}^r$-sous-espace 143

$\mathscr{C}^r$-structure 139
$\mathscr{C}^r$-topologie 192
$\mathscr{C}^{\geqslant r}$-variété 145
$\mathscr{C}^{\geqslant r}$-espace 142
$\mathscr{C}^r$-fibré 333
F-application 289
F-équivalence 289
F-fibré 288
F-isomorphisme 288
F-structure 287
G-application 275
G-espace 277, 280
G-sous-espace 278
H-espace 396
k-connexité 68, 69
k-équivalence 448
W-F-application 288
W-F-équivalence 289
W-F-fibré 288
W-F-isomorphisme 289
γ-application 275
ξ-transversalisation 336
π-suite 377
φ-base 152
φ-coordonnées 152

LISTE DES NOTATIONS

ab	12	cha	82	DS	59
abs	12	Cl	14	DS_-	67
ad	256	comp	66	DS_+	67
asso	294	Cône	50	DT	99
Atl	139	cône	47	e_G	267
Atl_x	152	conj	316	El	236
att	85	cop	134	el	236
Aut	472	corr	256	Emb^r	192
Aux	226	$\mathbf{C}P^n$	45	Esi	98
aux	226	$\mathbf{C}P^\infty$	47	ev	472
ba	106	csc	112	ext	303
bar	98	Cub	403	fact	11
blk	115	cub	403	Fibr	296
bp	54	$\mathbf{C}V(n, k)$	168	Fr	15
bs	255	$\mathbf{C}V(\infty, k)$	328	$G(n, k)$	172
bst	115	$\mathbf{C}V'(n, k)$	170	$G(\infty, n)$	323
Buc	403	$\mathbf{C}V'(\infty, k)$	326	$G'(n, k)$	180
buc	403	Cyl	50	$G_+(n, k)$	173
$\mathbf{C}$	44	$\mathbf{C}\xi$	322	$G_+(\infty, n)$	321
$\mathscr{C}$	50	d	155	GF	427
$\mathbf{C}^n$	44	∂	131	$GL(n, \mathbf{C})$	171
$\mathscr{C}^r$	137	D_i	155	$GL(n, \mathbf{H})$	172
$\mathscr{C}^{\geqslant r}$	139	D^n	17	$GL(n, \mathbf{R})$	173
$\mathscr{C}^r_\partial$	193	d_x	152	$GL\mathbf{R}^n$	312
$\mathbf{C}^\infty$	47	D^∞	47	$GL\mathbf{C}^n$	312
$\mathbf{C}^*$	270	$d_\tau(x, \rho)$	197	$GL_+\mathbf{R}^n$	312
Ca	44	deg	350	gr	470
$\mathrm{Ca}P^1$	46	DH	288	Gra	324
$\mathrm{Ca}P^2$	46	diag	13	grad	233
Catl	148	Diff^r	192	$\mathbf{H}$	44
cell	83	Dist	17	$\mathbf{H}^n$	44
$\mathbf{C}G(n, k)$	177	dist	17	$\mathbf{H}^\infty$	44
$\mathbf{C}G(\infty, k)$	323	dopp	134	$\mathbf{H}^*$	270

hel	258	pr_τ	197	Subm^r	192
hel_m	257	pr ξ	255	supp	138
$\mathsf{H}G_e(n, k)$	178	R	17	Symm	271
$\mathsf{H}P^n$	47	R^n	17	T_s	362
$\mathsf{H}P^\infty$	47	R^∞	47	T^r	99
$\mathsf{H}V(n, k)$	170	R^*	270	Tang	152
$\mathsf{H}V'(n, k)$	172	R^n_-	130	tang	346
I	19	R^{n-1}_1	132	TD	99
I^n	19	R^*_+	270	TG	307
ID	59	R^ξ_ξ	316	tl	255
id	11	Reg	472	tn	153
$ID^\#$	401	rel	12	Top	271
Imm	435	rel id	12	Tu	197
imm	40	$\mathsf{R}\tilde{G}(n, k)$	172	tu	197
Imm^r	192	$\mathsf{R}G'(n, k)$	180	Tub	197
in	11	$\mathsf{R}P^n$	44	tub	197
in_ν	11	$\mathsf{R}P^\infty$	47	U	423
ind	189	rt	50	$U(n)$	169
induz	304	$\mathsf{R}V(n, k)$	166	$U\mathsf{C}^n$	312
Int	15	$\mathsf{R}V'(n, k)$	170	$V(n, k)$	166
int	131, 141	S^n	17	$V(\infty, k)$	329
IS	400	S^∞	47	$V'(\infty, k)$	329
IS_τ	400	$s_\tau(x, \rho)$	197	vk	431
$J(\varphi, \psi)$	147	Scyl	111	Wd	460
jc	48	Sec^r	336	wd	460
kug	400	sh	104	Z	270
L	284	shi	181	Z_m	284
lim	42	Si	101	zer	13
lk	113	si	100	Δ	391
loc	142	ske	85	π	62
lp	408	SO	423	$\varnothing$	11
Mi	307	$SO(n)$	167	$\sqcup$	13
mo	237	$SO\mathsf{R}^n$	312	$\times$	11, 255
nat	197	Sp	419	$*$	48
Nb	271	$Sp(n)$	170	$\vee$	55
norm	348	Sph_r	358	$\otimes$	56
$O(n)$	167	sph	400	$\otimes_c$	98
$O\mathsf{R}^n$	312	$\mathrm{Srh}^\bigcirc$	400	$\oplus$	321
or	479	St	112	U_φ	43
ort	22	st	112	$\times_c$	94
perm	417	Stab	417	$\times_s$	108
Pr	436	Stee	303	$*_c$	96
pr	12	su	47	$*_s$	111
pr_i	13	$SU(n)$	169	$\preccurlyeq$	104

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES PROCESSUS ALÉATOIRES

par I. GUIKHMAN et A. SKOROKHOD

L'ouvrage de I. Guikhman et A. Skorokhod, membres correspondants de l'Académie des sciences de l'Ukraine, développe la théorie des processus aléatoires sur des bases mathématiques rigoureuses. Il suppose au lecteur des connaissances de la théorie des probabilités. Les principales notions de la théorie de la mesure sont rappelées sans démonstration. Les auteurs se penchent sur les principes généraux de la théorie y compris sur l'axiomatique de la théorie des probabilités et sur les principales classes de processus aléatoires. Les auteurs ont fait une place importante aux processus à accroissements indépendants, aux processus markoviens, au problème de la prévision linéaire, ainsi qu'aux théorèmes limites pour les processus aléatoires. Le mérite de cet ouvrage est dans son laconisme, sa rigueur, l'enchaînement judicieux des sujets abordés, la mise en relief des problèmes clés de la théorie.
Ce manuel s'adresse aux élèves du second et du troisième cycle ainsi qu'aux personnes désireuses de s'initier aux principales méthodes mathématiques de la théorie des processus aléatoires.

MÉTHODES DE CALCUL NUMÉRIQUE

par G. MARCHOUK

Le manuel de l'académicien G. Marchouk, l'un des plus éminents spécialistes en matière de calcul numérique, est consacré à la description des méthodes actuelles de résolution sur calculatrices d'une vaste gamme de problèmes appliqués. L'auteur s'est penché sur des problèmes complexes de physique mathématique se réduisant à d'autres plus simples et programmables sur des calculatrices. Il passe en revue les problèmes généraux de calcul numérique : approximation d'équations, stabilité des schémas aux différences, convergence des solutions approchées. Il traite des principes variationnels de discrétisation des équations de physique mathématique, des méthodes de décomposition appliquées à des problèmes complexes de dimension n. L'auteur attache une attention particulière aux méthodes de résolution des problèmes stationnaires et communique par ailleurs quelques résultats de la théorie actuelle des méthodes de résolution directe et itérative de ces problèmes.
Cet ouvrage qui est destiné aux élèves du second et du troisième cycle des facultés de physique et de mathématiques peut être d'une grande utilité aux spécialistes en calcul numérique et en mathématiques appliquées.